Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ РАСПОЛОЖЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

М. Г. Слободянский

(Москва)

Задача об определении областей расположения собственных значений самосопряженной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения рассматривалась рядом авторов (библиографию см. [1—7]).

Способ, применяемый в настоящей работе для определения областей расположения собственных значений, а также для приближенного решения указанной краевой задачи, основан на результатах работ [8—9] и может быть обобщен на самосопряженные краевые задачи для уравнений в частных производных. К указанной задаче, как известно, приводятся многие задачи математической физики. В § 3 рассмотрен численный пример для уравнения второго порядка.

§ 1. Определение областей расположения собственных значений.

1°. Пусть имеем самосопряженную краевую задачу

$$Au = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}\right] = f(x) \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} u^{(s-1)}(a) = u^{(s-2)}(a) = \ldots = u(a) = 0 \\ u^{(s-1)}(b) = u^{(s-2)}(b) = \ldots = u(b) = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

Положим, что все собственные значения уравнения

$$Au - \lambda u = 0 \tag{1.3}$$

при краевых условиях (1.2) положительные.

Рассмотрим сперва задачу об определении оценки снизу для первого собственного значения λ_1 краевой задачи (1.3) — (1.2).

Как известно, если $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ собственные значения уравнения (1.3) при краевых условиях (1.2), то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \int_a^b G(x, x)\,dx = J \tag{1.4}$$

где $G(x, y)$ — функция Грина (функция влияния) краевой рассматриваемой задачи (1.1)—(1.2). Записав уравнение (1.3) в виде

$$A_c u - (\lambda + c)\,u = 0, \qquad A_c u = Au + cu \tag{1.5}$$

где c — положительное число, получим аналогично (1.4)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i + c} = \int_a^b G_c(x, x)\,dx = J_c \tag{1.6}$$

Здесь $G_c(x, y)$ — функция Грина для дифференциального оператора $A_c u = Au + cu$ при тех же краевых условиях (1.2).

Из (1.6) следует

$$\lambda_1 > \frac{1}{J_c} - c \tag{1.7}$$

Представим функцию $G_c(x, y)$ в виде

$$G_c(x, y) = g_0(x, y) + v(x, y) \tag{1.8}$$

где $g_0(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям (1.2) и обладает той же особенностью при $x = y$, что и функция Грина $G_c(x, y)$, причем полагаем, что $g_0(x, y) = g_0(y, x)$. В качестве $g_0(x, y)$ можно взять, например, функцию Грина для оператора

$$L_1 u = (-1)^s \frac{d^s}{dx^s}\left(p_s \frac{d^s u}{dx^s}\right)$$

при краевых условиях (1.2).

Очевидно, что функция $v_c(x, y) = v_c(y, x)$ также удовлетворяет краевым условиям (1.2). Функция $G_c(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$A_c G_c = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x) \frac{d^k}{dx^k} G_c\right] = \psi(x, y) \tag{1.9}$$

где

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \psi(x, y)\, dx = 1, \qquad \psi(x, y) = 0 \qquad \begin{pmatrix} a \leqslant x \leqslant y - \varepsilon \\ y + \varepsilon \leqslant x \leqslant b \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$G_c(x, x) = \int_a^b A_c[G_c(x, y)]\, G_c(x, y)\, dy = (A_c G_c, G_c) \tag{1.10}$$

Здесь скалярное произведение определяется по формуле

$$(u, v) = \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx$$

Принимая далее во внимание (1.8) и учитывая, что $(A_c g_0, v_c) = (A_c v_c, g_0)$, из (1.10) получим

$$G_c(x, x) = (A_c g_0, g_0) + 2(A_c v_c, g_0) + (A_c v_c, v_c) \tag{1.11}$$

где

$$A_c v_c = -A_c g_0 + \psi = \psi_0 - c g_0 = \psi_c, \qquad \psi_0 = -A g_0 + \psi \tag{1.12}$$

Далее, на основании теоремы 1, доказанной в работе [8], и формулы (14) той же работы [8] имеем

$$H_{\psi c}(v_n) = (Av_n, v_n) + \frac{1}{c}\left\|\psi_c - Av_n\right\|^2 \geqslant (A_c v_c, v_c) \tag{1.13}$$

где функция $v_n(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (1.2), если ее рассматривать как функцию от x.

Из (1.11), принимая во внимание (1.12) — (1.13), найдем

$$G_c(x, x) < P_n(x, x) = (A_c g_0, g_0) + 2(A_c v_c, g_0) + (Av_n, v_n) + \tag{1.14}$$

$$+ \frac{1}{c}\|\psi_0 - c g_0 - Av_n\|^2 = (A(g_0 + 2v_n), g_0) + (Av_n, v_n) + \frac{1}{c}\|\psi_0 - Av_n\|^2$$

Отсюда

$$P_n(x, x) = g_0(x, x) + \int_a^b (2A[v_n] - \psi_0)\, g_0\, dy + \int_a^b A[v_n]\, v_n\, dy +$$

$$+ \frac{1}{c}\int_a^b \{\psi_0 - A[v_n]\}^2\, dy \tag{1.15}$$

Следовательно,

$$J_c = \int_a^b G_c(x, x)\, dx < J_{cn} = \int_a^b P_n(x, x)\, dx \tag{1.16}$$

Подставляя (1.16) в (1.7), найдем

$$\lambda_1 > \lambda_{11} = \frac{1}{J_{cn}} - c \tag{1.17}$$

Подберем теперь постоянное c так, чтобы правая часть (1.17) имела минимальное значение, считая элемент v_n заданным. Имеем

$$-\left(\frac{1}{J_{cn}}\right)^2 \frac{dJ_{cn}}{dc} - 1 = 0$$

Откуда найдем, принимая во внимание (1.14) — (1.16):

$$c = \frac{\delta_n(1 - \delta_n)}{\mu_n} \tag{1.18}$$

$$\lambda_{11} = \frac{(1 - \delta_n)^2}{\mu_n} \tag{1.19}$$

$$\delta_n{}^2 = \int_a^b\!\!\int_a^b \{\psi_0(x, y) - A[v_n(x, y)]\}^2\, dx\, dy \tag{1.20}$$

$$\mu_n = \int_a^b g_0(x, x)\, dx + \int_a^b\!\!\int_a^b \{2A[v_n(x, y)] - \psi_0(x, y)\}\, g_0(x, y)\, dx\, dy +$$

$$+ \int_a^b\!\!\int_a^b A[v_n(x, y)]\, v_n(x, y)\, dx\, dy$$

Заметим, что применение формул (1.18) — (1.19) законно лишь тогда когда

$$1 - \delta_n > 0 \tag{1.21}$$

Подбирая v_n из условия

$$\delta_n{}^2 = \int_a^b\!\!\int_a^b (\psi_0 - Av_n)^2\, dx\, dy \to 0 \tag{1.22}$$

найдем

$$\lambda_{11} \to \frac{1}{J} = \frac{1}{\mu}, \qquad c \to 0 \qquad (\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n)$$

Повторяя указанный процесс для оператора $A_{\lambda_{11}}u = Au - \lambda_{11}u$, найдем аналогично

$$\lambda_{12} = \frac{(1 - \delta_{n1})^2}{\mu_{n1}}; \qquad \delta_{n1}^2 = \int_a^b\!\!\int_a^b [\psi_{\lambda_{11}} - A_{\lambda_{11}} v_{n1}]^2\, dx\, dy \tag{1.23}$$

и т. д., причем полагаем, что $1-\delta_{n1}>0$ и $v_{n1}(x, y)$ удовлетворяет условиям (1.2). Очевидно, что $\lambda_1>\lambda_{11}+\lambda_{12}$.

При соблюдении условий вида (1.21) мы получим последовательность $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \ldots$ причем $\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\ldots\leqslant\lambda_1$, т. е. найдем нижнюю грань для первого собственного значения λ_1.

Верхняя грань для первого собственного значения может быть получена, как известно, при помощи вариационного метода Релея-Ритца или же мётодом Галеркина.

Таким образом, мы получим двусторонние приближения для первого собственного значения λ_1.

2°. Пусть каким-либо способом найдена функция $v_n(\lambda)=v_n(x, y, \lambda)$ так, что

$$1-\delta_n(\lambda, \lambda')>0 \qquad \text{при} \quad 0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^{(n)} \tag{1.24}$$

где

$$\delta_n(\lambda, \lambda')=\int_a^b\int_a^b[\psi_\lambda-(Av_n(\lambda')-\lambda v_n(\lambda'))]^2\,dx\,dy \tag{1.25}$$

На основании изложенного в 1° способа определения нижней границы для первого собственного значения λ_1 следует, что если по функции $v_n(0)$ найти λ_{11} при помощи (1.18) — (1.20), а затем, пользуясь функцией $v_n(\lambda_{11})$, найти λ_{12} по формулам (1.23) [аналогичным формулам (1.18) — (1.20)] и т. д., то мы, очевидно, получим указанный выше ряд чисел $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \ldots$.

Однако в данном случае, так как мы полагаем известной функцию $v_n(\lambda')$, нет необходимости в последовательном определении чисел λ_{11}, $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \ldots$, а достаточно найти наименьшее значение $\lambda_{1\nu}$, при котором правая часть (1.19), где δ_n заменено на $\delta_n(\lambda, \lambda')$, будет равняться нулю:

$$1-\delta_n(\lambda_{1\nu}, \lambda')=0 \tag{1.26}$$

При этом полагаем, что соблюдено условие (1.24). Величина $\lambda_{1\nu}$ может быть принята за нижнюю границу первого собственного значения λ_1.

Напишем уравнение (1.26) в развернутом виде, принимая во внимание (1.25) и (1.12). Имеем

$$\alpha\lambda_{1\nu}^2-2\beta\lambda_{1\nu}-(1-\gamma)=0 \tag{1.27}$$

где

$$\alpha(\lambda')=\int_a^b\int_a^b[g_0-v_n(\lambda')]^2\,dx\,dy$$

$$\beta(\lambda')=\int_a^b\int_a^b[\psi_0-Av_n(\lambda')]\,[g_0-v_n(\lambda')]\,dx\,dy \tag{1.28}$$

$$\gamma(\lambda')=\int_a^b\int_a^b[\psi_0-Av_n(\lambda')]^2\,dx\,dy$$

Откуда

$$\lambda_{1\nu}(\lambda')=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\alpha(1-\gamma)}}{\alpha} \tag{1.29}$$

Функция $v_n(\lambda')$ может быть найдена каким-либо приближенным методом, например методом наименьших квадратов, т. е. из условия минимума правой части (1.25) ($\delta_n(\lambda, \lambda') \to 0$), или, например, методом Галеркина, применяя его к уравнению

$$Av(\lambda') - \lambda' v(\lambda') = \psi_0$$

Система уравнений Галеркина для этого уравнения имеет вид [7]

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda' (\varphi_k, \varphi_m)] = (\psi_0, \varphi_m) \qquad (m = 1, \ldots, n)$$

где $a_k = a_k(\lambda')$, φ_k — допустимые элементы, удовлетворяющие краевым условиям (1.2). Определив $a_k = a_k(\lambda')$ из системы уравнений (1.28), найдем

$$v_n(\lambda') = \sum_{k=1}^{n} a_k(\lambda') \varphi_k$$

3°. В частности, в качестве $v_n(\lambda')$ можно взять решение уравнения

$$A^* v^* - \lambda v^* = \sum_{k=0}^{s} (-1)^m \frac{d^k}{dx^k} \left[p_k^*(x) \frac{d^k}{dx^k} v^* \right] - \lambda v^* = \psi_\lambda \qquad (1.30)$$

где функции $p_k^*(x)$ мало отличаются от функции $p_k(x)$ и $v^* = v^*(\lambda)$.

Тогда на основании (1.25) имеем

$$\delta_n(\lambda) = \int_a^b \int_a^b [\psi_\lambda - (Av^* - \lambda v^*)]^2 \, dx \, dy =$$

$$= \int_a^b \int_a^b [(A^* v^* - \lambda v^*) - (Av^* - \lambda v^*)]^2 \, dx \, dy = \int_a^b \int_a^b [(A - A^*) v^*] \, dx \, dy \qquad (1.31)$$

Полагая, в частности, в (1.30) и (1.31) $\lambda = 0$, $v^*(0) = v_0^*$, получим на основании (1.19) — (1.20)

$$\lambda_{11} = \frac{[1 - \delta_n(0)]^2}{\mu_n(0)} \qquad (1.32)$$

где

$$\delta_n(0) = \int_a^b \int_a^b [(A^* - A) v_0^*]^2 \, dx \, dy$$

$$\mu_n(0) = \int_a^b g_0(x, x) \, dx + \int_a^b \int_a^b [2Av_0^* - \psi_\lambda] g_0 \, dx \, dy + \int_a^b \int_a^b A[v_0^*] v_0^* \, dx \, dy \qquad (1.33)$$

Соотношения (1.31) — (1.33) дают возможность определить нижнюю границу для λ_1, если соблюдены условия вида (1.21) или (1.24).

4°. Пусть λ — произвольное положительное число и λ_p — ближайшее к λ собственное значение уравнения (1.3) при краевых условиях (1.2).

Перепишем уравнение (1.3) в виде

$$Au - \lambda u - (\lambda_p - \lambda) u = 0 \qquad (1.34)$$

Из (1.34) следует

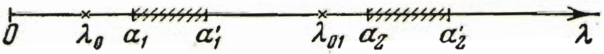
$$(A - \lambda E)^2 u - (\lambda_p - \lambda)^2 u = 0 \qquad (1.35)$$

где E — тождественный оператор.

Применяя к оператору $(A-\lambda E)^2$ выводы 1° или 2°— 3°, найдем оценку снизу для величины $(\lambda_p-\lambda)^2$. Пусть

$$(\lambda_p-\lambda)^2 < \varepsilon(\lambda) \tag{1.36}$$

Неравенство (1.36) дает возможность определить области расположения



Фиг. 1

собственных значений уравнения (1.3).

Допустим, что таким путем найдено, что собственные значения могут быть расположены лишь в заштрихованных частях прямой $0 \leqslant \lambda < \infty$ (фиг. 1), т. е. значения $0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_1$, $\alpha_1' \leqslant \lambda \leqslant \alpha_2$ и т. д. являются регулярными значениями. Естественно, возникает вопрос о числе собственных значений в интервалах $[\alpha_1, \alpha_1']$, $[\alpha_2, \alpha_2']$, ...

Если обозначим через λ_0 — положительное число, где $0 < \lambda_0 < \alpha_1$, и положим, что в интервале $\alpha_1 < \lambda < \alpha_1'$ имеется r собственных значений (при этом S-кратное собственное значение считается столько раз, какова его кратность), то на основании (1.6) и (1.16) имеем, если вместо c подставим $-\lambda_0$:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\lambda_i-\lambda_0} < J_{\lambda_0} < J_{n\lambda_0} \tag{1.37}$$

Откуда следует, принимая во внимание, что $(\alpha_1'-\lambda_0)^{-1} < (\lambda_i-\lambda_0)^{-1}$:

$$r < (\alpha_1'-\lambda_0)\, J_{n\lambda_0} \tag{1.38}$$

Если $r < 2$, то либо в интервале $\alpha_1 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_1'$ нет собственных значений, либо имеется лишь одно собственное значение.

Неравенство для величины r противоположного знака можно получить аналогичным образом. Имеем

$$\frac{r}{\alpha_1-\lambda_0} > J_{\lambda_0} - \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i-\lambda_0}$$

$$\sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i-\lambda_0} < \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\lambda_0} \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\lambda_0}\left(J-\frac{r}{\alpha_1'}\right)$$

Оценку для J_{λ_0} снизу можно получить, оценив снизу правую часть (1.13), пользуясь вариационным методом

$$(A_c v_c, v_c) > 2(\psi_c, v_n) - (A_c v_n, v_n)$$

полагая $c=\lambda_0$. Оценка сверху для J_{λ_0} находится как и выше.

Наличие собственного значения в интервале $\alpha_1 < \lambda < \alpha_1'$ может быть обнаружено при помощи вариационного метода Релея-Ритца, дающего верхние границы для собственных значений. Наличие в каком-либо интервале $\alpha < \lambda < \beta$ собственных значений может быть обнаружено при помощи теоремы включения Крылова-Боголюбова[1, 6, 7] или при помощи теоремы включения Темпля [2, 5].

Неравенство для числа собственных значений на интервале $\alpha_2 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_2'$, аналогичное (1.38), можно найти, если напишем неравенство, аналогичное (1.37), для оператора $(A - \lambda_{01}E)^2$, где $\alpha_1' \leqslant \lambda_{01} \leqslant \alpha_2$. Получим

$$\sum_{i=r+1}^{t} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_{01}} < J_{n\lambda_{01}} \tag{1.39}$$

где $J_{n\lambda_{01}}$ вычисляется по заданному оператору $(A - \lambda_{01}E)^2$, так же как $J_{n\lambda_0}$ вычисляется по заданному оператору $A - \lambda_0 E$.

§ 2. Приближенное решение самосопряженной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Рассмотрим теперь задачу о построении приближенного решения краевой задачи (1.1) — (1.2) и нахождении оценки погрешности приближенного решения. Для этого, наряду с указанной краевой задачей, рассмотрим краевую задачу

$$Av = -Ag_0 + \psi = \psi_0 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} v^{(s-1)}(a) &= v^{(s-2)}(a) = \ldots = v(a) = 0 \\ v^{(s-1)}(b) &= v^{(s-2)}(b) = \ldots = v(b) = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Имеем

$$u(x) = \int_a^b g_0(x, y) f(y)\, dy + (v, f) \tag{2.3}$$

где

$$(v, f) = \int_a^b v(x, y) f(y)\, dy \tag{2.4}$$

Величины, в (2.1) — (2.4) имеют те же значения, что и в § 1. Пусть u_n и v_n — приближенные решения краевых задач (1.1) — (1.2) и (2.1) — (2.2), найденные каким-либо приближенным методом. Обозначим

$$A(u - u_n) = f - f_n = \varphi, \qquad A(v - v_n) = \psi_0 - \psi_{0n} = \chi \tag{2.5}$$

В частности, за приближенное решение u_n можно взять

$$u_n(x) = (f, g_0 + v_n) = \int_a^b f(y)\,[g_0(x, y) + v_n(x, y)]\, dy \tag{2.6}$$

Тогда

$$f_n(x) = Au_n = \int_a^b f(y)\, A\,[g_0(x, y) + v_n(x, y)]\, dy =$$

$$= \int_a^b f(y)\, A\,[g_0 + v + v_n - v]\, dy = \int_a^b f(y)\,\psi(x, y)\, dy +$$

$$+ \int_a^b f(y)(\psi_{0n} - \psi_0)\, dy = f(x) + \int_a^b f(y)(\psi_{0n} - \psi_0)\, dy$$

Откуда

$$f - f_n = \varphi = \int_a^b f(y)(\psi_0 - \psi_{0n})\, dy = (f, \chi) = \int_a^b f(y)\,\chi(x, y)\, dy \tag{2.7}$$

На основании работы [9] можно получить следующие результаты.

1. Если принять приближенно [см. [9], формулы (1.14) — (1.16)]

$$(v, f) \approx b_{nm}^* = (f, v_n) + (\chi, u_n) + \tfrac{1}{2} H(u_m', v_m') \tag{2.8}$$

то

$$|(v,\ f)-b_{nm}^{*}|<\delta=\tfrac{1}{2}\sqrt{H_{\varphi}(u_m')\,H_{\chi}(v_m')} \tag{2.9}$$

Здесь H — функционал, имеющий в нашем случае вид (1.13) [см. [8], формулы (13)—14)], где c заменено на λ_{11} или на $\lambda_{1\nu}$ (λ_{11} и $\lambda_{1\nu}$ — границы снизу для первого собственного значения уравнения (1.3)), т. е.

$$H_{\varphi}(u_m')=(Au_m',\ u_m')+\frac{1}{\lambda_{11}}\|\varphi-Au_m'\|^2 \tag{2.10}$$

где u_m' — допустимые элементы в задаче о минимуме функционала H.

В нашем случае допускаемые функции u_m должны удовлетворять краевым условиям (1.2). Аналогичное выражение получим для $H_{\chi}(v_m')$, если в (2.10) заменим φ на χ и u_m' на v_m', где v_m' — допустимые функции, удовлетворяющие (2.2). Заметим, что u_m' и v_m' являются приближенными решениями уравнений (2.5). Полагая, в частности, $u_m'=v_m'=0$, получим

$$H_{\varphi}(0)=\frac{1}{\lambda_{11}}\|\varphi\|^2=\frac{1}{\lambda_{11}}\int_a^b\varphi^2\,dy,\qquad H_{\chi}(0)=\frac{1}{\lambda_{11}}\|\chi\|=\frac{1}{\lambda_{11}}\int_a^b\chi^2\,dy$$

$$H(u_m',\ v_m')=H(0,\ 0)=\frac{1}{\lambda_{11}}(\varphi,\ \chi)=\frac{1}{\lambda_{11}}\int_a^b\varphi(y)\,\chi(x,\ y)\,dy \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в (2.8) — (2.9), найдем

$$|(v,\ f)-b_{n0}^{*}|<\delta=\frac{1}{2\lambda_{11}}\|\varphi\|\ \|\chi\|=\frac{1}{2\lambda_{11}}\left\{\int_a^b\varphi^2(y)\,dy\int_a^b\chi^2(x,\ y)dy\right\}^{1/2} \tag{2.12}$$

где

$$b_{n0}^{*}=\int_a^b f(y)\,v_n(x,\ y)\,dy+\int_a^b\chi(x,\ y)\,u_n(y)\,dy+\frac{1}{2\lambda_{11}}\int_a^b\varphi(y)\,\chi(x,\ y)\,dy \tag{2.13}$$

2. Если за приближенное значение $(v,\ f)$ примем величину

$$(v,\ f)\approx b_{n0}^{*}=(\psi_0,\ u_n)+\frac{1}{2}H(u_m',\ v_m) \tag{2.14}$$

(см.[9], замечание 2), то

$$|(v,\ f)-b_{n0}^{*}|<\delta=\tfrac{1}{2}\sqrt{H_{\varphi}(u_m')\,H_{\psi_0}(v_m)} \tag{2.15}$$

Полагая далее, как и выше, $u_m'=v_m=0$, найдем из (2.14) — (2.15), принимая во внимание (2.10) — (2.11):

$$(v,\ f)\approx b_{n0}^{*}=(\psi_0,\ u_n)+\frac{1}{2\lambda_{11}}(\varphi,\ \psi_0)=\int_a^b\psi_0(x,\ y)\left[u_n(y)+\frac{1}{2\lambda_{11}}\varphi(y)\right]dy \tag{2.16}$$

$$|(v,\ f)-b_{n0}^{*}|<\delta=\frac{1}{2\lambda_{11}}\left\{\int_a^b\varphi^2dy\int_a^b\psi_0^2dy\right\}^{1/2} \tag{2.17}$$

Оценка (2.17) является грубой оценкой по сравнению с (2.12), однако в некоторых случаях она может оказаться полезной, так как

$$\delta\to 0\quad\text{при}\quad\int_a^b\varphi^2\,dy\to 0$$

3. Если за (v, f) принять приближенно b_{0m}^* (см. [9], замечание 2)

$$(v, f) \approx b_{0m}^* = \frac{1}{2} H(u_m, v_m) \tag{2.18}$$

то

$$|(v, f) - b_{0m}^*| < \delta = \frac{1}{2} \sqrt{H_\varphi(u_m) H_\psi(v_m)} \tag{2.19}$$

Полагая далее $u_m = 0$, $v_m = 0$, получим из (2.18) — (2.19), принимая во внимание (2.10) — (2.11):

$$(v, f) \approx b_{00}^* = \frac{1}{2\lambda_{11}} (f, \psi) = \frac{1}{2\lambda_{11}} \int_a^b f(y) \psi(x, y)\, dy \tag{2.20}$$

$$|(v, f) - b_{00}^*| < \delta = \frac{1}{2\lambda_{11}} \left\{ \int_a^b f^2(y)\, dy \int_a^b [\psi(x, y)]^2\, dy \right\}^{1/2} \tag{2.21}$$

Формулы (2.20) — (2.21) могут служить лишь для грубой оценки решения краевой задачи (1.1) — (1.2).

Примечание. Для того чтобы при данном выборе координатных функций для определения u_n, v_n, входящих в (2.5), получить наименьшую оценку погрешности δ в (2.12) и (2.17), следует, очевидно, воспользоваться методом наименьших квадратов для определения u_n и v_n, т. е. следует искать u_n и v_n из условий

$$\int_a^b [A(u - u_n)]^2\, dy = \int_a^b \varphi^2\, dy \to 0, \quad \int_a^b [A(v - v_n)]^2 = \int_a^b \chi^2\, dy \to 0$$

§ 3. Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка

1°. Пусть требуется решить краевую задачу:

$$A_\beta u = -\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) + (\beta + x) u = f(x) = 1 \tag{3.1}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{3.2}$$

Коэффициенту β мы затем дадим некоторые численные значения.

Определим прежде всего двусторонние приближения для первого собственного значения λ_1 уравнения (3.3) при краевых условиях (3.2):

$$A_1 u - \lambda u = -\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) + (1 + x) u - \lambda u = 0 \tag{3.3}$$

Заметим, что оператор A_1 — положительно определенный при краевых условиях (3.2), ибо коэффициент $p_1 = 1 > 0$ и $p_0 = 1 + x > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Воспользуемся выводами § 1. За функцию $g_0(x, y)$ возьмем функцию Грина для оператора $L_1 u = -d^2u / dx^2$ при краевых (3.2), которая как известно, будет

$$g_0(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant y \\ y(1 - x) & \text{при } y < x \leqslant 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

Из (1.12) найдем

$$\psi_0 = -A_1 g_0 + \psi = \begin{cases} -(1 + x) x (1 - y) & \text{при } 0 < x \leqslant y \\ -(1 + x) y (1 - x) & \text{при } y < x \leqslant 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\psi_\lambda = \psi_0 + \lambda g_0$$

где ψ имеет то же значение, что и в § 1.

Далее из (1.25) имеем

$$\delta_n(\lambda, \lambda') = \int_0^1\int_0^1 [\psi_\lambda - (A_1 v_n - \lambda v_n)]^2\, dx\, dy \tag{3.6}$$

где v_n — функции, удовлетворяющие краевым условиям (3.2).

Полагая, в частности, $v_n \equiv 0$, получим из (3.6)

$$\delta_n(\lambda) = \int_0^1\int_0^1 \psi_\lambda^2\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 [\psi_0 + \lambda g_0]^2\, dx\, dy = \frac{8}{315} - \frac{1}{30}\lambda + \frac{1}{90}\lambda^2$$

На основании (1.26) нижняя граница для первого собственного значения равна наименьшему положительному корню уравнения

$$1 - \delta_n(\lambda) = 1 - \left(\frac{8}{315} - \frac{1}{30}\lambda + \frac{1}{90}\lambda^2\right) = 0 \tag{3.7}$$

Корни уравнения (3.7) будут $\lambda_{1,2} = 1.5 \pm 9.9849$, следовательно,

$$\lambda_{11} = 1.5 + 9.9849 = 10.9849 < \lambda_1 \tag{3.8}$$

Верхнюю границу для первого собственного значения найдем методом Релея-Ритца

$$\lambda_1 < \frac{(A_1 v_n, v_n)}{(v_n, v_n)}$$

где v_n удовлетворяет условиям (3.2). Полагая $v_n = x(1-x)$, получим

$$Av_n = 2 + x - x^3, \qquad \lambda_1 < 11.5 \tag{3.9}$$

Таким образом, из (3.8) и (3.9) найдем

$$10.9849 < \lambda_1 < 11.5 \tag{3.10}$$

т. е. погрешность в определении λ_1 составляет около 4.5%. Заметим, что границы для первого собственного значения уравнения

$$A_\beta u - \lambda u = -\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) + (\beta + x)\, u - \lambda u = 0 \tag{3.11}$$

при краевых условиях (3.2) будут

$$9.9849 + \beta = \lambda_{1\beta,1} < \lambda_{1\beta} < 11.5 + (\beta - 1) = 10.5 + \beta \tag{3.12}$$

Неравенством (3.12) воспользуемся ниже в 2°.

2°. Рассмотрим теперь краевую задачу (3.1)—(3.2).

Из (2.3) и (2.4) имеем, принимая во внимание, что в нашем случае $f(x) = 1$:

$$u(x) = \int_0^1 g_0\, dy + (v, f) = \frac{1}{2} x(1-x) + (v, f) \tag{3.13}$$

$$(v, f) = \int_0^1 vf\, dy \tag{3.14}$$

где v имеет то же значение, что и в § 2, g_0 определяется по формуле (3.4).

Таким образом, v является решением краевой задачи (3.15), аналогичной краевой задаче (3.1)—(3.2):

$$A_\beta v = -\frac{d}{dx}\frac{dv}{dx} + (\beta + x)\, v = \psi_\beta, \qquad v(0) = v(1) = 0 \tag{3.15}$$

где

$$\psi_\beta = -A_\beta g_0 + \psi = \begin{cases} -(\beta + x)\, x\,(1 - y) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant y \\ -(\beta + x)\, y\,(1 - x) & \text{при } y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{3.16}$$

а g_0 и ψ имеют те же значения, что и в (3.4)—(3.5).

Для нахождения приближенного значения u найдем приближенное значение для (v, f) и оценку погрешности, для чего воспользуемся формулами (2.11)—(2.12).

Для этого предварительно найдем приближенные решения краевых задач (3.1)—(3.2) и (3.15). Положим

$$u(x) = x(1 - x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \tag{3.17}$$

$$v(x, y) = x(1 - x)[b_0(y) + b_1(y)x + b_2(y)x^2 + \ldots] \tag{3.18}$$

и определим значения $a_0, \ldots b_0, \ldots$ методом наименьших квадратов в соответствии с примечанием в конце § 2. Ограничимся в (3.17) и (3.18) первыми членами,

$$u_1 = a_0 x(1 - x), \qquad v_1 = b_0 x(1 - x) \tag{3.19}$$

Тогда, принимая во внимание, что $f(x) = 1$, получим:

$$\int_0^1 [A_\beta u_1 - f]^2 dx = \int_0^1 \varphi_\beta^2\, dx = \min \tag{3.20}$$

$$\int_0^1 [A_\beta v_1 - \psi_\beta]^2\, dx = \int_0^1 \chi_\beta^2\, dx = \min \tag{3.21}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_\beta &= A_\beta(u - u_1) = f - f_\beta = 1 - a_0[2 + (\beta + x)\,x\,(1 - x)] \\ \chi_\beta &= A_\beta(v - v_1) = \psi_\beta - \psi_{\beta 1} = \psi_\beta - b_0[2 + (\beta + x)\,x\,(1 - x)] \end{aligned} \tag{3.22}$$

Откуда

$$a_0 = \frac{25 + 2\beta}{12\, h_1}, \qquad b_0(y) = \frac{h_2(y)}{h_1} \tag{3.23}$$

$$\int_0^1 \varphi_\beta^2\, dx = \frac{1}{24}\,\frac{13 + 28\beta\,(1 + \beta)}{912 + 7\beta\,(21 + \beta)}, \qquad \int_0^1 \chi_\beta^2\, dx = h_3 - \frac{h_2^2}{h_1} \tag{3.24}$$

где

$$h_1 = \frac{1}{5}\left(\frac{152}{7} + \frac{7}{2}\beta + \frac{1}{6}\beta^2\right)$$

$$h_2 = y\left[\frac{7}{20} + \frac{16}{15}\beta + \frac{1}{12}\beta^2 - \beta y - \frac{1}{6}(2 + \beta^2)\,y^2 + \frac{1}{12}\beta(\beta - 2)\,y^3 + \frac{1}{20}(2\beta - 1)\,y^4 + \frac{1}{30}y^5\right] \tag{3.25}$$

$$h_3 = y^2\left[\frac{1}{30} + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{3}\beta^2 - \frac{2}{3}\beta^2 y - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\beta\right)\beta y^2 - \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{3}\beta\right)y^3 + \frac{1}{10}y^4\right]$$

Воспользовавшись далее (2.11)—(2.12), найдем

$$|(v, f) - b_{n0}^*| < \delta = \frac{1}{2\lambda_{1\beta,1}}\left\{\int_0^1 \varphi_\beta^2\, dx \int_0^1 \chi_\beta^2\, dx\right\}^{1/2} \tag{3.26}$$

$$b_{n0}^* = \int_0^1 \psi_\beta u_1\, dx + \int_0^1 \varphi_\beta v_1\, dx + \frac{1}{2\lambda_{1\beta,1}}\int_0^1 \varphi_\beta \chi_\beta\, dx. \tag{3.27}$$

где $\lambda_{1\beta,1} = 9.9849 + \beta$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi_\beta u_1\, dx &= -a_0 y\left\{\frac{1}{30} + \frac{1}{12}\beta - \frac{1}{6}\beta y^3 + \frac{1}{12}(\beta - 1)\,y^3 + \frac{1}{20}y^4\right\} \\ \int_0^1 \varphi_\beta v_1\, dx &= -b_0\left\{a_0\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{30}\beta\right) - \frac{1}{6}\right\} \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\int_0^1 \varphi_\beta \chi_\beta \, dx = -y(1-y)\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{6}y\right)+a_0h_2$$

где a_0 и b_0 имеют те же значения, что и в (3.23).

Положим теперь $\beta=1$. Тогда из (3.26) — (3.28), принимая во внимание (3.13), (3.23) — (3.25), найдем при $x=0.5$

$$|u(0.5)-0.108193| < \delta(0.5) = 0.000239 \tag{3.29}$$

т. е. погрешность в определении $u(0.5)$ составляет 0,2%.

Положим теперь $\beta=-0,5$, т. е. рассмотрим краевую задачу

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)+(-0.5+x)u=1, \quad u(0)=u(1)=0 \tag{3.30}$$

(заметим, что коэффициент при u в (3.30) принимает как положительные, так и отрицательные значения на интервале $0\leqslant x\leqslant 1$).

Из (3.26) — (3.28) найдем в этом случае при $x=0.5$

$$|u(0.5)-0.125021| < \delta(0.5)=0.000065 \tag{3.31}$$

т. е. погрешность в определении $u(0.5)$ составляет в этом случае ($\beta=-0.5$) менее 0.06% от точного значения.

Более грубую оценку погрешности мы получим при несколько меньшем объеме вычислений, если воспользуемся формулами (2.16) — (2.17). Имеем

$$|(v,f)-b_{n0}^*| < \delta = \frac{1}{2\lambda_{1\beta,1}}\left\{\int_0^1 \varphi_\beta^2\,dx \int_0^1 \psi_\beta^2\,dx\right\}^{1/2} \tag{3.32}$$

$$b_{n0}^* = \int_0^1 \psi_\beta u_1 dx + \frac{1}{2\lambda_{1\beta,1}}\int_0^1 \varphi_\beta \psi_\beta\,dx \tag{3.33}$$

где

$$\int_0^1 \varphi_\beta \psi_\beta\,dx = -y(1-y)\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{6}y\right)+a_0h_2 \qquad \int_0^1 \psi_\beta^2\,dx = h_3 \tag{3.34}$$

Здесь h_2, h_3 и a_0 имеют прежние значения, а первый интеграл в правой части (3.33) определяется по (3.28). Положим $\beta=1$. Тогда из (3.32) — (3.34), принимая во внимание (3.17), (3.24) — (3.25) и (3.28), найдем при $x=0.5$

$$|u(0.5)-0.107915| < 0.000515 \tag{3.35}$$

т. е. погрешность в определении $u(0.5)$ составляет около 0.4% от точного значения.

Поступила 6 IV 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Sur le calcul de racines de la transcendante de Fredholm. Известия АН СССР, сер. ОМЕН, № 5, 1929.
2. Temple G. The Computation of Characteristic Number and Characteristic Functions. Proc. Lond. math. Soc. (2), (29), 1929.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, ГИТТИ, 1949.
4. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, т. II. ГСИСП, 1941.
5. Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig, 1949.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ИИЛ, 1950.
7. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. ГИТТИ, 1950.
8. Слободянский М. Г. О преобразовании проблемы минимума функционала к проблеме максимума. ДАН СССР, т. XCI, № 4, 1953.
9. Слободянский М. Г. О приближенном решении линейных задач, сводящихся к вариационным. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.