

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОТРАЖЕНИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ОТ ЖЕСТКОЙ ПЛОСКОСТИ, ИМЕЮЩЕЙ ДЕФОРМИРУЕМУЮ ЧАСТЬ

Х. А. Рахматулин

(Москва)

§ 1. Постановка задачи. Пусть звуковая плоская волна, имеющая заданный профиль, в момент  $t = 0$  встречается с жесткой плоскостью  $z = 0$ , имеющей некоторую деформируемую бесконечную полосу (фиг. 1). Пусть деформируемая часть плоскости в начальный момент покоится, а закон дальнейшего движения ее задан в виде

$$v_z = f(x, t) \quad (1.1)$$

Заметим, что фронт отраженной волны будет плоскостью, и значение потенциала скорости на ней будет заданным и равным его значению, полученному из решения задачи Коши по данным на оси  $z$  в начальный момент. То же значение на фронте будет иметь потенциал скорости для случая отражения от жесткой плоскости. Поэтому нам для решения задачи об отражении от плоскости, имеющей деформируемую часть, надо решить: 1) задачу Коши для одномерного движения падающей волны, 2) задачу об отражении этой волны от жесткой плоскости. Пусть задача Коши решена и имеет значение потенциала скорости

$$\varphi = \varphi_0(t) \text{ на линии } z = at \quad (1.2)$$

Здесь  $a$  — скорость звука,  $t$  — время.

Для потенциала  $\varphi_1$  скорости волны, отраженной от жесткой стенки, очевидно, имеем

$$\varphi_1(z, t) = f_1(z - at) + f_2(z + at) \quad (1.3)$$

Граничные условия для определения  $f_1$  и  $f_2$  следующие:

$$\varphi_0(t) = f_1(0) + f_2(2at), \quad f_1'(-at) + f_2'(at) = 0 \quad (1.4)$$

Из (1.4) получаем

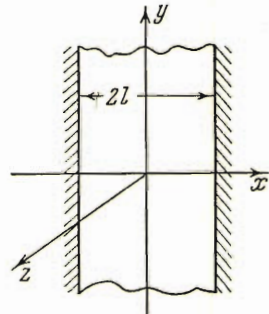
$$f_1'(-at) = -\frac{1}{2a} \varphi_0' \left( \frac{t}{2} \right)$$

Интегрируя, получим

$$\frac{1}{a} f_1(-at) = \frac{1}{a} \varphi_0 \left( \frac{t}{2} \right) + \text{const}$$

следовательно,

$$\varphi_1(z, t) = \varphi_0 \left( \frac{at - z}{2a} \right) + \varphi_0 \left( \frac{at + z}{2a} \right). \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \quad (1.6)$$

при следующих условиях:

(1) на фронте отраженных волн

$$\Phi = \varphi_0(t) \quad \text{при } z = at \quad (1.7)$$

(2) на неподвижной части плоскости

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.8)$$

(3) на подвижной части плоскости

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = f(x, t) \quad \text{при } z = 0 \quad (1.9)$$

Задачу об определении  $\Phi(t, x, z)$  назовем основной задачей.

**§ 2. Решение основной задачи.** Решение задачи ищем в угле, ограниченном плоскостью  $z = at$  и плоскостью  $z = 0$  при граничных условиях (1.7), (1.8) и (1.9). Положим

$$\Phi(x, t, z) = \varphi_1(z, t) + \varphi(z, t, x) \quad (2.1)$$

Тогда для  $\varphi$  получаем следующие условия:

(1) на фронте отраженных волн

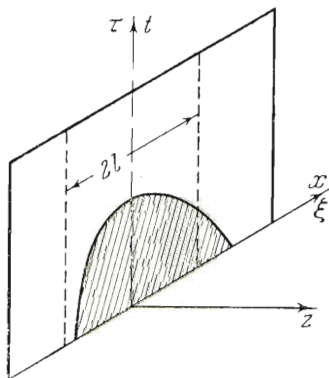
$$\varphi(x, z, t) = 0 \quad \text{на } z = at \quad (2.2)$$

(2) на неподвижной части

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (2.3)$$

(3) на подвижной части

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = f(x, t) \quad \text{при } z = 0 \quad (2.4)$$



Фиг. 2

Указанная задача решается следующей формулой

$$\varphi = \iint_S \frac{a q(\tau, \xi) d\xi d\tau}{V a^2(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - z^2} \quad (2.5)$$

где  $S$  является частью плоскости  $\xi\tau$ , отсекаемой конусом

$$a^2(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (z-\zeta)^2 = 0$$

Мы принимаем ветвь гиперболы (фиг. 2).

$$a\tau = at - \sqrt{(x-\xi)^2 + z^2} \quad (2.6)$$

При таком выборе решения  $\varphi = 0$  не только на плоскости  $z = at$ , но и во всем указанном выше угле, за исключением его части, ограниченной поверхностью, являющейся огибающей конусов с вершиной на отрезке оси абсцисс  $-l \leq \xi \leq l$ .

Покажем, что условиям (2.3) и (2.4) можно удовлетворять соответствующим выбором мощности распределенных источников  $q(\tau, \xi)$ .

В самом деле, легко показать, что

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\pi q(x, t)$$

Следовательно, (2.3) и (2.4) будут выполнены, если положить  $q(x, t) = 0$  в неподвижной и  $\pi q = -f(x, t)$  в подвижной части плоскости  $xt$ .

Таким образом, областью интегрирования должна являться подвижная часть плоскости  $\xi\tau$ , отсекаемая гиперболой (2.6). Итак, окончательно имеем

$$\Phi = \varphi_1(t, z) - \frac{a}{\pi} \iint_{S_1} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (x-\xi^2) - z^2}} \tag{2.7}$$

где  $S_1$  — часть подвижной части плоскости, отсекаемая гиперболой (2.6). Ниже дадим приложение этой гидродинамической задачи к решению вопроса о движении поршня, вставленного в жесткую плоскость, на которую падает фронт звуковой волны.

**§ 3. Задача об отражении звуковой волны от поршня, вставленного в бесконечную жесткую плоскость.** Для решения этой задачи нужно знать величину давления, действующего на поршень. Как известно, давление определяется по формуле Лагранжа

$$p = c(t) - \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{3.1}$$

Функцию времени  $c(t)$  определим из условий на фронте отраженной волны. Обозначая через  $v_{1z}, p_1$  скорость и давление перед фронтом, а через  $v_{2z}, p_2$  те же величины за фронтом отраженной волны, получим по теореме количества движения

$$\rho a (v_{2z} - v_{1z}) = p_2 - p_1 \tag{3.2}$$

В этой формуле приняты положительными скорости, направленные вдоль оси  $z$ . Из (3.1) имеем

$$p_2 = c(t) - \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=at} \tag{3.3}$$

следовательно,

$$p_{z=0} = p_2 + \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=at} - \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=0}$$

Подставляя сюда  $p_2$  из (3.2), получим

$$p_{z=0} = p_1 + \rho a \left[ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=at} - v_{1z} \right] + \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=at} - \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=0} \tag{3.4}$$

Так как в этом случае  $f = f(t)$ , т. е. не зависит от  $\xi$ , то в (2.7) можно выполнить однократное интегрирование. При этом могут быть три случая (фиг. 3) в зависимости от того, как будет расположена гипербола (2.6) по отношению к полосе шириной  $2l$  в плоскости  $\xi, \tau$ .

Случай (а), указанный на фиг. 3, соответствует таким значениям переменных  $x, z, t$ , когда часть гиперболы (2.6) в плоскости  $\xi\tau$ , лежащая выше оси  $\xi$ , расположена целиком в полосе  $-l \leq \xi \leq l$ . Здесь в силу симметрии относительно оси  $t$  достаточно рассмотреть только случай  $x > 0$ . Очевидно, полагая в (2.6)  $\tau = 0, \xi = l$ , найдем связь между  $t_0$  и  $x, z$ , соответствующими приходу точки  $A$  (фиг. 3, а) к правому краю полосы.

Итак, имеем

$$t_0 = \frac{V(l-x)^2 + z^2}{a} \quad (3.5)$$

Указанную на фиг. 3, б величину  $\tau_0$ , очевидно, легко получить из (2.6), если положить  $\xi = l$ :

$$\tau_0 = t - t_0 \quad (3.6)$$

Момент времени  $t_1$ , соответствующий приходу точки В (фиг. 3, в) к левому краю полосы  $-l \leq \xi \leq l$ , также получится из (2.6), если положить  $\tau = 0$ ,  $\xi = -l$ :

$$t_1 = \frac{V(x+l)^2 + z^2}{a}$$

Найдем теперь выражение для потенциала скоростей в указанных выше трех случаях.

(1) Для  $0 \leq t \leq t_0 = \frac{1}{a} V(x-l)^2 + z^2$  имеем (фиг. 3, а)

$$\Phi = \varphi_1(t, z) - \frac{a}{\pi} \int_0^{t-z/a} f(\tau) d\tau \int_{-V a^2(t-\tau)^2 - z^2}^{V a^2(t-\tau)^2 - z^2} \frac{d(\xi - x)}{V a^2(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - z^2} \quad (3.7)$$

или

$$\Phi = \varphi_1(t, z) - a \int_0^{t-z/a} f(\tau) d\tau$$

Уравнение (3.7) показывает, что при  $t \leq t_0$  потенциал скорости не зависит от  $x$ , следовательно, также от  $x$  не будет зависеть и давление.

(2) Для  $t_0 \leq t \leq t_1$  имеем (фиг. 3, б)

$$\Phi = \varphi_1(t, z) - \frac{a}{\pi} \left\{ \int_0^{t-t_0} f(\tau) d\tau \int_{-V a^2(t-\tau)^2 - z^2}^{l-x} \frac{d(\xi - x)}{V a^2(t-\tau)^2 - (l-x)^2 - z^2} + \int_{t-t_0}^{t-z/a} \pi f(\tau) d\tau \right\}$$

или

$$\Phi = \varphi_1(t, z) - \frac{a}{\pi} \left\{ \int_0^{t-t_0} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{l-x}{V a^2(t-\tau)^2 - z^2} \right] f(\tau) d\tau + \int_{t-t_0}^{t-z/a} \pi f(\tau) d\tau \right\} \quad (3.8)$$

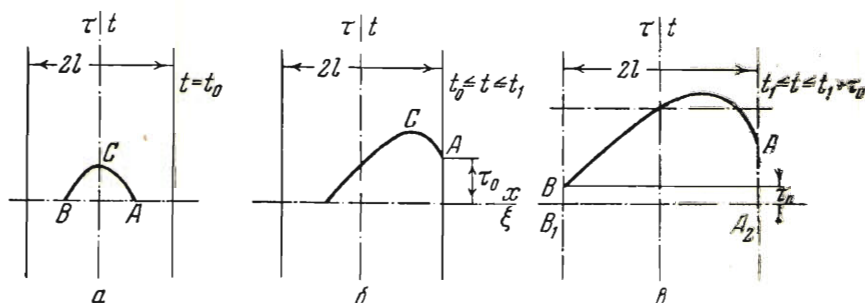
(3) Для  $t_1 \leq t \leq \infty$ , т. е. в случае, когда обе ветви гиперболы (2.6) выходят за полосу  $-l \leq \xi \leq l$ , имеем (фиг. 3, в)

$$\Phi = \varphi_1(t, z) - \frac{a}{\pi} \left[ \int_0^{t-t_1} f(\tau) d\tau \left( \arcsin \frac{l-x}{V a^2(t-\tau)^2 - z^2} + \arcsin \frac{l+x}{V a^2(t-\tau)^2 - z^2} \right) + \int_{t-t_1}^{t-t_0} f(\tau) d\tau \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{l-x}{V a^2(t-\tau)^2 - z^2} \right) + \int_{t-t_0}^{t-z/a} \pi f(\tau) d\tau \right] \quad (3.9)$$

Имея выражение для потенциала скорости, можно вычислить давление и найти величину силы  $F$ , действующей на поршень. Очевидно, эта сила будет зависеть от вида функции  $f(t) = -V(t)$ , где  $V(t)$  — скорость поршня.

Зная силу, можно составить дифференциальное уравнение движения для определения  $V(t)$ , т. е. вида функции  $f(t)$ . В следующем параграфе работы рассмотрена задача об определении закона движения поршня для

случая, когда падающая волна является постоянной по интенсивности в глубь фронта.



Фиг. 3

Полученные результаты показывают, что эффект того, что движение неустановившееся, не сводится к появлению присоединенной массы, как это имеет место при движении несжимаемой жидкости.

**§ 4. Случай, когда падающая волна имеет в глубь фронта постоянную интенсивность.** Рассмотрим случай, когда скорость и давление за фронтом падающей волны остаются постоянными до некоторого расстояния от указанного фронта. Найдем решение задачи, имеющее место до момента времени, пока отраженная волна не пробегает указанного участка постоянной интенсивности падающей волны.

В этом случае в (3.4) нужно положить  $p_1 = \text{const}$ ,  $v_{1z} = -v_0 = \text{const}$  и функция  $\Phi$  на фронте волны должна определяться по (3.7), так как при  $z = at$  область интегрирования  $S_1$  стягивается к нулю. Кроме того, в этом случае  $\varphi_1 = \text{const}$  во всей области  $z \leq at$ . Имея в виду, что  $f(0) = 0$ , получим

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=at} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)_{z=at} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=at} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)_{z=at} = 0 \quad (4.1)$$

Следовательно, для давления на подвижной части плоскости получим

$$p = p_1 + \rho v_0 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=0} \rho = p_0 - \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=0} \quad (4.2)$$

Для различных моментов времени функция  $\Phi(x, t)$ , входящая в (4.2), выражается различными формулами из (3.7), (3.8) и (3.9).

Выведем теперь формулы для определения давления  $p$ . Рассмотрим сначала интервал времени от момента отражения падающей волны до момента встречи фронтов волн, возникающих у краев поршня в его середине. Очевидно, в этом случае имеем  $0 \leq t \leq l/a$ . В этом интервале времени поверхность поршня фронтом волн, возникающих у его краев, разобьется на две области:

первая область — за фронтом указанной волны, где

$$l - x \leq at \quad (4.3)$$

вторая область — впереди фронта той же волны, где

$$l - x \geq at \quad (4.4)$$

Из (4.3) получаем в первой области

$$l \geq \frac{l-x}{a} = t_0, \quad t_0 \leq t \leq \frac{l}{a} \leq \frac{l+x}{a} = t_1 \quad (4.5)$$

Из (4.4) получим во второй области

$$0 \leq t \leq \frac{l-x}{a} = t_0 \quad (4.6)$$

На основании (4.5) и (4.6) имеем:

во второй области согласно (3.7)

$$\Phi = -a \int_0^{t-z/a} f(\tau) dt$$

в первой области согласно (3.8)

$$\Phi = -\frac{a}{2} \left\{ \int_0^{t-t_0} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{l-x}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - x^2}} \right] f(\tau) d\tau + \pi \int_{t-t_0}^{t-z/a} f(\tau) d\tau \right\}$$

Таким образом, по (4.2) имеем:

в первой области  $l-x \leq at$

$$p = p_0 + \frac{a\rho}{\pi} \left\{ \pi f(t) - \int_0^{t-t_0} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(\tau) dt}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-x)^2}} \right\} \quad (4.7)$$

во второй области  $l-x \geq at$

$$p = p_0 + a\rho f(t) \quad (4.8)$$

Имея закон распределения давления по (4.7) и (4.8), можем вычислить силу, действующую на поршень со стороны падающей волны:

$$F = 2 \int_0^l p dx = 2 \int_0^{t-at} [p_0 + a\rho f(t)] dx + \\ + 2 \int_{t-at}^l \left\{ p_0 + \rho a f(t) - \frac{a\rho}{\pi} \int_0^{t-t_0} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-x)^2}} \right\} dx$$

Отсюда

$$F = 2l [p_0 + a\rho f(t)] - \frac{2a\rho}{\pi} \int_{t-at}^l dx \int_0^{t-t_0} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-x)^2}}$$

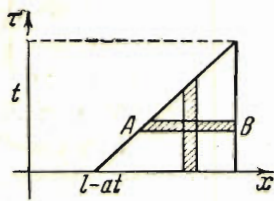
Последний интеграл в этом выражении легко может быть приведен к однократному интегралу путем перестановки порядка интегрирования.

Положим

$$J_0 = \int_{t-at}^l dx \int_0^{t-t_0} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-x)^2}}, \quad t_0 = \frac{l-x}{a}$$

область интегрирования в  $J_0$  показана на фиг. 4.

Из чертежа непосредственно имеем (4.9)



Фиг. 4

$$j_0 = \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{t - \tau} \int_{l-a(t-\tau)}^l \frac{(l-x) dx}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-x)^2}} = a \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Следовательно, окончательно имеем

$$F = 2l [p_0 + a\rho f(t)] - \frac{2a^2\rho}{\pi} \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (4.10)$$

Обозначая через  $m$  массу единицы длины поршня, напишем его уравнения движения:

$$m \frac{dV}{dt} = F - F_0(V) - c \int_0^t V(\tau) d\tau \quad (4.11)$$

Здесь  $F_0(V)$  — сила, действующая на поршень с противоположной стороны. Имея в виду, что  $f(t) = -V(t)$ , получим

$$m \frac{d^2V}{dt^2} = -2l\rho a \frac{dV}{dt} - F_0' \frac{dV}{dt} - cV(t) + \frac{2a^2\rho}{\pi} V(t) \quad (4.12)$$

Предположим, что  $F_0(V) = F_1 + F_2V$ .

Тогда начальные условия для уравнения (4.12) будут при  $t = 0$

$$V = V(0) = 0, \quad \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=0} = \frac{2lp_0 - F_1}{m} = \gamma_0 \quad (4.13)$$

Введем новые обозначения:

$$\frac{F_2 + 2l\rho a}{m} = 2\beta^2, \quad c - \frac{2a^2\rho}{\pi} = m\alpha \quad (4.14)$$

Тогда

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -2\beta^2 \frac{dV}{dt} - \alpha V(t)$$

Отсюда имеем

$$V = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + 2\beta^2\lambda + \alpha = 0$  — равны:

$$\lambda_{1,2} = -\beta^2 \pm \sqrt{\beta^4 - \alpha}$$

Для постоянных, используя условия (4.13), имеем

$$A + B = 0, \quad \lambda_1 A + \lambda_2 B = \gamma_0$$

Отсюда

$$A = \frac{\gamma_0}{2V\beta^4 - \alpha}, \quad B = \frac{-\gamma_0}{2V\beta^4 - \alpha} \quad (4.15)$$

Следовательно,

$$V = \frac{\gamma_0}{2V\beta^4 - \alpha} [e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}]$$

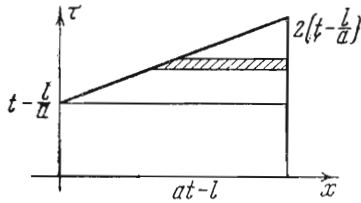
Могут быть два случая. Если  $\beta^4 - \alpha > 0$ , то

$$V = \frac{\gamma_0 e^{-\beta^2 t}}{2V\beta^4 - \alpha} [e^{\sqrt{\beta^4 - \alpha} t} - e^{-\sqrt{\beta^4 - \alpha} t}] \quad (4.16)$$

Если же  $\beta^4 - \alpha < 0$ , то

$$V = \frac{\gamma_0 e^{-\beta^2 t}}{\sqrt{\alpha - \beta^4}} \sin \sqrt{\alpha - \beta^4} t \quad (4.17)$$

Этот случай практически менее вероятен, так как требует очень высоких частот колебания поршня. Уравнение (4.11) показывает, что при неустановившемся движении сжимаемой жидкости не возникает эффект присоединенной массы, так как в правой части (4.11) нет члена, содержащего  $dV/dt$ . Таким образом, явления, происходящие в короткие промежутки, равные времени пробегания волн по поршню, существенно отличаются от явлений, происходящих в несжимаемой среде.



Фиг. 5

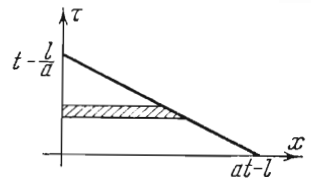
Рассмотрим теперь случай, когда  $t > l/a$ , что соответствует моментам времени после встречи волн, возникающих у краев поршня в его середине. В этом случае поверхность поршня также делится на две области фронтом волн, отраженных от середины:

первая область — за фронтом отраженной волны, где

$$x \leq at - l, \quad t \geq \frac{x + l}{a} = t_1$$

вторая область — впереди фронта отраженной волны, где

$$x \geq at - l, \quad \frac{l}{a} \leq t \leq \frac{x + l}{a} = t_1$$



Фиг. 6

В первой области  $\Phi$  определяется формулой (3.9), и, следовательно, в первой области имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = & -\frac{a}{\pi} \left\{ f(t - t_1) \left[ \arcsin \frac{l - x}{l + x} + \frac{\pi}{2} \right] + f(t - t_0) \pi - \right. \\ & - f(t - t_1) \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{l - x}{l + x} \right] + \pi [f(t) - f(t - t_0)] - \\ & - \int_0^{t-t_1} \left[ \frac{l - x}{l - \tau} \frac{f(\tau)}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - (l - x)^2}} + \frac{l + x}{l - \tau} \frac{f(\tau)}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - (l + x)^2}} \right] d\tau - \\ & \left. - \int_{t-t_1}^{t-t_0} \frac{l - x}{l - \tau} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - (l - x)^2}} \right\} \end{aligned}$$

Аналогично определяется согласно выражению (3.8) производная  $\partial \Phi / \partial t$  для второй области. Таким образом, для давления имеем:

в первой области

$$\begin{aligned} p_I = p_0 + \frac{a\rho}{\pi} \left[ \pi f(t) - \int_0^{t-t_0} \frac{l - x}{l - \tau} \frac{f\tau d\tau}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - (l - x)^2}} - \right. \\ \left. - \int_0^{t-t_1} \frac{l - x}{l - \tau} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - (l - x)^2}} \right] \quad (4.17) \end{aligned}$$



во второй области

$$p_{II} = p_0 + \frac{a\rho}{\pi} \left[ \pi f(t) - \int_0^{t-t_0} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l-x)^2} \right] \quad (4.18)$$

Пользуясь (4.17) и (4.18), подсчитаем силу, действующую на поршень со стороны падающей волны:

$$F = 2 \int_0^{at-l} p_I dx + 2 \int_{at-l}^l p_{II} dx = 2l [p_0 + a\rho f(t)] - \frac{2a\rho}{\pi} \int_0^{at-l} dx \left[ \int_0^{t-t_0} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l-x)^2} + \int_0^{t-t_1} \frac{l+x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l+x)^2} \right] - \frac{2a\rho}{\pi} \int_{at-l}^l dx \int_0^{t-t_0} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l-x)^2}$$

Двукратные интегралы, входящие в это выражение, путем перемены порядка интегрирования сведутся к однократным.

Рассмотрим интеграл

$$J_1 = \int_0^{at-l} dx \int_0^{t-t_0} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l-x)^2}$$

область интегрирования для  $J_1$  показана на фиг. 5. Очевидно, имеем

$$J_1 = \int_0^{t-l/a} \frac{f(\tau) d\tau}{t-\tau} \int_0^{at-l} \frac{(l-x) dx}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l-x)^2} + \int_{t-l/a}^{2(t-l/a)} \frac{f d\tau}{t-\tau} \int_{l-a(t-\tau)}^{at-l} \frac{(l-x) dy}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l-x)^2}$$

$$J_1 = \int_0^{t-l/a} \frac{V a^2 (t-\tau)^2 - (2l-at)^2 - V a^2 (t-\tau)^2 - l^2}{t-\tau} f(\tau) d\tau + \int_{t-l/a}^{2(t-l/a)} \frac{V a^2 (t-\tau)^2 - (2l-at)^2}{t-\tau} f(\tau) d\tau$$

Рассмотрим теперь другой интеграл, входящий в выражение силы

$$J_2 = \int_0^{at-l} dx \int_0^{t-t_1} \frac{l+x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l-x)^2}$$

Область интегрирования для  $J_2$  изображена на фиг. 6, где штрихом показана полоса интегрирования по  $x$ .

Меняя порядок интегрирования, для  $J_2$  получим новое выражение

$$J_2 = \int_0^{t-l/a} \frac{f(\tau) d\tau}{t-\tau} \int_0^{a(t-\tau)-l} \frac{(l+x) dx}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l+x)^2} = \int_0^{t-l/a} \frac{V a^2 (t-\tau)^2 - l^2}{t-\tau} f(\tau) d\tau$$

Рассмотрим теперь последний интеграл

$$J_3 = \int_{at-l}^l dx \int_0^{t-l} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(t) dt}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l-x)^2}$$

Меняя порядок интегрирования, для  $J_3$  получим новое выражение

$$J_3 = \int_0^{2(t-l/a)} \frac{f(\tau) d\tau}{t-\tau} \int_{at-l}^l \frac{(l-x) dx}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l-x)^2} + \\ + \int_{2(t-l/a)}^l \frac{f(\tau) d\tau}{t-\tau} \int_{l-a}^{l-\tau} \frac{(l-x) dx}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l-x)^2}$$

или

$$J_3 = \int_0^{2(t-l/a)} f(\tau) d\tau - \int_0^{2(t-l/a)} \frac{V a^2 (t-\tau)^2 - (2l-at)^2}{t-\tau} f(\tau) d\tau + \int_{2(t-l/a)}^l f(\tau) d\tau$$

Определим непосредственно следующую сумму:

$$J_1 + J_2 + J_3 + \int_0^{t-l/a} \frac{V a^2 (t-\tau)^2 (2l-at)^2}{t-\tau} f(\tau) d\tau + \\ + \int_{t-l/a}^{2(t-l/a)} \frac{V a^2 (t-\tau)^2 - (2l-at)^2}{t-\tau} f(\tau) d\tau + \int_0^l f(\tau) d\tau - \\ - \int_0^{2(t-l/a)} \frac{V a^2 (t-\tau)^2 - (2l-at)^2}{t-\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^l f(\tau) d\tau$$

Таким образом, для силы получаем

$$F = 2l [p_0 + a\rho f(t)] - \frac{2a\rho}{\pi} \int_0^l f(\tau) d\tau \quad (4.19)$$

Как видим, выражение силы  $F$  такое же, как и для случая  $t \leq l/a$ . Таким образом, выражения для скорости (4.15) и (4.16) будут иметь силу также и для случая, когда  $t \leq 2l/a$ .

Выведем теперь дифференциальное уравнение для  $V(t)$  при  $t \geq 2l/a$ . Очевидно, что в этом случае всегда  $t > t_1$ .

Следовательно, теперь функцию  $\Phi$  надо определять по формуле (3.9).

Выше нами было определено давление в случае  $t \geq t_1$  формулой (4.17).

Поэтому для силы  $F$  будем иметь

$$F = 2l [p_0 + a\rho f(t)] - \frac{2a\rho}{\rho} \int_0^l dx \left[ \int_0^{t-t_0} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l-x)^2} + \right. \\ \left. + \int_0^{t-t_1} \frac{l+x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{V a^2 (t-\tau)^2 - (l+x)^2} \right]$$

Рассмотрим следующий интеграл, входящий в выражение силы  $F$ :

$$J_4 = \int_0^l dx \int_0^{t-x} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-x)^2}}$$

Меняя порядок интегрирования, получим следующее выражение для  $J_4$ :

$$J_4 = \int_0^{t-l/a} \frac{f(\tau) d\tau}{t-\tau} \int_0^l \frac{(l-x) dx}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-x)^2}} + \\ + \int_{t-l/a}^t \frac{f(\tau) d\tau}{t-\tau} \int_{l-a(t-\tau)}^l \frac{(l-x) dx}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-x)^2}}$$

Откуда

$$J_4 = a \int_0^{t-l/a} f(\tau) d\tau - \int_0^{t-l/a} \frac{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - l^2}}{t-\tau} f(\tau) d\tau + a \int_{t-l/a}^t f(\tau) d\tau$$

Рассмотрим теперь другой интеграл, входящий в выражение силы  $F$ :

$$J_5 = \int_0^l dx \int_0^{t-x} \frac{l-x}{t-\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-x)^2}}$$

Меняя порядок интегрирования, получим новое выражение для  $J_5$ :

$$J_5 = \int_0^{t-2l/a} \frac{f(\tau) d\tau}{t-\tau} \int_0^l \frac{(l+x) dx}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-x)^2}} + \\ + \int_{t-2l/a}^{t-l/a} \frac{f(\tau) d\tau}{t-\tau} \int_0^{a(t-\tau)-l} \frac{(x+l) dx}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l+x)^2}}$$

Отсюда

$$J_5 = \int_0^{t-2l/a} \frac{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - l^2}}{t-\tau} f(\tau) d\tau - \int_0^{t-2l/a} \frac{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - 4l^2}}{t-\tau} f(\tau) d\tau + \\ + \int_{t-2l/a}^{t-l/a} \frac{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - l^2}}{t-\tau} f(\tau) d\tau$$

Таким образом, окончательно получим

$$F = 2l(p_0 + a\rho f) - \frac{2a\rho}{\pi} \left[ a \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^{t-2l/a} \frac{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - 4l^2}}{t-\tau} f(\tau) d\tau \right] \quad (4.20)$$

Следовательно, в этом случае уравнение движения будет иметь вид:

$$m \frac{dV}{dt} = 2l(p_0 - a\rho V) + \frac{2a^2\rho}{\pi} \int_0^t V(\tau) d\tau - \\ - \frac{2a\rho}{\pi} \int_0^{t-2l/a} \frac{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - 4l^2}}{t-\tau} V(\tau) d\tau - F_0(V)$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получим

$$m \frac{d^2 V}{dt^2} = -2al\rho \frac{dV}{dt} + \frac{2a^2 \rho}{\pi} V(t) - \frac{2a\rho}{\pi} \int_0^{t-2l/a} \frac{d}{dt} \left( \frac{V a^2 (t-\tau)^2 - 4l^2}{t-\tau} \right) V(\tau) d\tau - F_0'(V)$$

Заменяя производную  $d/dt$  через  $-d/d\tau$  и интегрируя по частям последний интеграл, окончательно получим

$$m \frac{d^2 V}{dt^2} = -2al\rho \frac{dV}{dt} + \frac{2a^2 \rho}{\pi} V(t) + \frac{2a\rho}{\pi} \int_0^{t-2l/a} \frac{V a^2 (t-\tau)^2 - 4l^2}{t-\tau} V'(\tau) d\tau - F_2 \quad (4.21)$$

Это уравнение только на вид кажется интегро-дифференциальным, ибо в последнем интеграле переменный предел интегрирования меняется в пределах  $0 \leq \tau \leq 2l$ .

В этих пределах функция  $V(\tau)$  известна и дается формулами (4.15) и (4.16). Таким образом, задача об определении  $V(t)$  для интервала времени  $2l/a \leq t \leq 4l/a$  сводится к решению неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Заметим, что, зная  $V$  для  $t \leq 4l/a$ , можно определять его для  $t \leq 6l/a$  по уравнению (4.21), которое опять будет обыкновенным дифференциальным уравнением с правой частью, так как переменное интегрирование меняется теперь в пределах  $2l/a \leq \tau \leq 4l/a$ . Очевидно, что этот расчет может быть продолжен до любого времени  $t$ .

Выше нами рассмотрен случай падения волны постоянной интенсивности. Из хода решения этой задачи видно, что в случае падения волны переменной интенсивности задача также сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Только в этом случае в правой части уравнения будут члены, не зависящие от скорости движения поршня  $V$ , которые будут определяться формой профиля падающей волны. Наконец, обращаем внимание на то, что задача может быть решена и в том случае, когда деформируемая часть плоскости является оболочкой или пластиной, опертой по краям. В этом случае следует задаться законом прогиба в форме

$$z = a_0(t)(l^2 - x^2) + a_1(t)(l^2 - x^2)^2 + \dots \quad (4.22)$$

Полином (4.22) удовлетворяет граничным условиям. Следует подобрать функции  $a_0(t)$ ,  $a_1(t)$  так, чтобы удовлетворялись уравнения движения оболочки. С этой целью можно оболочку заменить системой с конечным числом степеней свободы и составить уравнения Лагранжа второго рода.

Заметим также, что полученное решение гидродинамической задачи пригодно для случая, когда плоскость содержит не только одну деформируемую полосу, а имеет несколько таких полос, расположенных рядом или в отдалении друг от друга. В этих случаях область интегрирования должна быть распространена на все части подвижных полос, пересекаемых соответствующими гиперболами типа (2.6).