

ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО КЛИНА СЛАБО СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

С. К. Асланов

(Саратов)

Задача обтекания клина сверхзвуковым потоком в случае отсоединенной ударной волны и области местных дозвуковых скоростей за ней содержит большие трудности. Причиной их являются смешанный характер течения и сложность граничных условий на ударной поляре. В настоящей работе удается определить сопротивление клина, обходя эти трудности. Волновое сопротивление выражается через скачок энтропии. Приведение последнего в соответствие с околосзвуковым законом подобия [1,2] позволяет найти формулы для коэффициента сопротивления клина в зависимости от параметра подобия и для отхода скачка. Далее, этим же методом определяется сопротивление клина в случае прямолинейного скачка на его острие.

§ 1. Упрощение уравнений ударной поляры и эциклоиды в трансзвуковом потоке. Критический параметр подобия. Безразмерное уравнение скачка на плоскости годографа, как известно, имеет вид [3]:

$$\frac{2\kappa}{\kappa+1} \lambda_1 \lambda^2 \cos^2(\theta - \theta_1) - \lambda (\lambda^2 + \lambda_1^2 + 2) \cos(\theta - \theta_1) + \frac{2}{\kappa+1} \lambda_1 \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda_1} + \lambda_1 = 0 \quad (1.1)$$

$$\lambda = W/a_*, \quad \lambda_1 = W_1/a_*$$

где W_1 — скорость набегающего потока, a_* — критическая скорость звука, θ_1 — угол наклона скорости набегающего потока.

Пусть тонкий профиль относительной толщины τ обтекается слабо сверхзвуковым потоком. Тогда все скорости в потоке мало отличаются от критической a_* , а значит, величины $\lambda_1 - 1 = \alpha_1$ и $\lambda - 1 = \alpha$ одного порядка. Далее, из рассматриваемого приближения следует, что $\lambda - 1$ и $M - 1$, а также τ и θ будут тоже одного порядка. Поэтому на основании критерия подобия [1,2]

$$\frac{M-1}{[1/2(\kappa+1)\tau]^{1/2}} = K \quad (K = \text{const}) \quad (1.2)$$

закключаем

$$\theta^2 \approx \alpha^3 \approx \alpha_1^3 \approx \alpha^2 \alpha_1 \approx \alpha \alpha_1^2 \quad (1.3)$$

Если теперь разложить $\cos \theta$ в ряд, то, пренебрегая членами [выше порядка, указанного в (1.3)], получим приближенное уравнение ударной поляры

$$\frac{2}{\kappa+1} (\theta - \theta_1)^2 = (\lambda_1 - \lambda)^2 (\lambda + \lambda_1 - 2) \quad (1.4)$$

Переход в рамках данного приближения к декартовым координатам дает

$$\frac{2a_*}{\kappa+1} (V - V_1)^2 = (W_1 - U)^2 (U + W_1 - 2a_*)$$

или в безразмерных переменных

$$u = \frac{x+1}{a_*} (U - a_*), \quad v = \frac{x+1}{a_*} V \quad (1.5)$$

имеем

$$(u_1 - u)^2 (u_1 + u) = 2(v - v_1)^2 \quad (1.6)$$

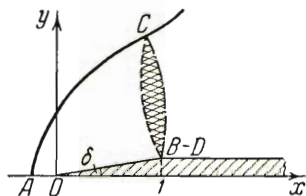
Дифференциальное уравнение характеристик плоского безвихревого сверхзвукового потока имеет вид [3]:

$$d\theta \pm h \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{h^2 - \lambda^2}} \frac{d\lambda}{\lambda} = 0 \quad \left(h^2 = \frac{x-1}{x+1} \right) \quad (1.7)$$

Положив α^2 и θ^2 функциями малого параметра ε , разлагаем их в степенные ряды:

$$\alpha^2(\varepsilon) = \alpha^2 + 3\alpha^2 \frac{d\alpha}{d\varepsilon} \varepsilon + \dots$$

$$\theta^2(\varepsilon) = \theta^2 + 2\theta \frac{d\theta}{d\varepsilon} \varepsilon + \dots$$



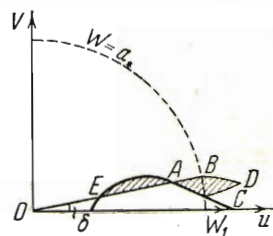
Фиг. 1

Конечно, нужно ввести предположение о законности данных операций. Сравнение полученных рядов на основании (1.3) приводит к заключению, что

$$\theta \frac{d\alpha}{d\varepsilon} \sim \alpha \frac{d\theta}{d\varepsilon} \quad (1.8)$$

Применяя последнее к (1.7) и пренебрегая членами выше порядка, указанного в (1.3), можно получить

$$(h\sqrt{2\alpha^{3/2}} \pm \sqrt{h^2 - 1} \theta) \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = 0$$



Фиг. 2

Если воспользуемся (1.8) и проинтегрируем получающееся соотношение, то придем к приближенному уравнению эпициклоиды

$$\pm \frac{3}{2\sqrt{x+1}} (\theta - \theta_1) = (\lambda - 1)^{3/2} - (\lambda_1 - 1)^{3/2} \quad (1.9)$$

или в безразмерных переменных (1.5)

$$\pm \frac{3}{2} (v - v_1) = u^{3/2} - u_1^{3/2} \quad (1.10)$$

Пусть на тонкий клин единичной длины, расположенный под нулевым углом атаки, набегают слабо сверхзвуковой поток (фиг. 1). Тогда граничные условия [2] на бесконечности и на стороне клина в безразмерных переменных (1.5) принимают вид:

$$u = u_1 = M_1^2 - 1, \quad v = 0 \text{ на } \infty, \quad v = v_0 = (x+1)\delta \text{ при } y = \pm 0 \quad (1.11)$$

а параметр подобия выражается таким образом:

$$\frac{M^2 - 1}{[(x+1)\delta]^{2/3}} = K \quad (1.12)$$

Как известно, при обтекании клина сверхзвуковым потоком возможны следующие три режима. При скоростях потока, весьма близких к скоро-

сти звука, перед клином возникает отсоединенная ударная волна, за которой следует область местных дозвуковых скоростей. Затем с увеличением скорости набегающего потока скачок садится на острие клина, а скорость за ним остается дозвуковой. Наконец, головная волна выпрямляется, скорость между ней и клином становится постоянной и большей скорости звука. На плоскости годографа прямая OB , соответствующая стороне клина (фиг. 2), лежит вне петли ударной поляры для первого режима, касается ее для второго и пересекает для третьего. Причем, из двух точек пересечения E и A реализуется более удаленная [7].

Тогда интересно определить границы существования режима обтекания с присоединенной ударной волной. Для данного полуугла раствора клина δ известна наименьшая величина числа M_1 , свободного потока, при которой косою скачок, начинающийся от носка клина, достаточен для поворота потока вдоль его поверхности. Найдем это критическое значение $M_1 = M_*$, являющееся функцией угла δ , или, точнее, найдем значение параметра подобия K_1 , которое назовем критическим: $K_1 = K_*$.

Точку касания прямой OB с петлей ударной поляры (1.4) можно определить как максимум угла θ для последней. А соотношение (1.4) в точке касания дает в переменных (1.5)

$$K_* = \frac{M_*^2 - 1}{[(\kappa + 1)\delta]^{1/2}} = \frac{3}{2^{1/2}} \approx 1.19 \quad (1.13)$$

При меньших K_1 скачок отходит от острия клина.

§ 2. Обтекание клина и ромбовидного профиля сверхзвуковым потоком в случае прямолинейного присоединенного скачка. Предельный параметр подобия и наклон скачка. Поток снова предполагается околосзвуковым, а клин столь тонким, чтобы ударная волна сидела на его острие. В силу однородности потока за скачком условие $v = v_0 = (\kappa + 1)\delta$ справедливо во всей области над клином. Поэтому, учитывая (1.11), запишем (1.6) по-другому:

$$(K_1 - K)^2(K_1 + K) = 2 \quad (2.1)$$

где K_1 — параметр подобия в набегающем потоке, K — за скачком.

Очевидно, предельному случаю рассматриваемого режима соответствует точно звуковой поток за ударной волной, т. е. $K = 0$. Тогда из (2.1) найдем значение параметра подобия K_{lim} , которое назовем предельным:

$$K_{\text{lim}} = \frac{M_{\text{lim}}^2 - 1}{[(\kappa + 1)\delta]^{1/2}} = \sqrt{2} \approx 1.26 \quad (2.2)$$

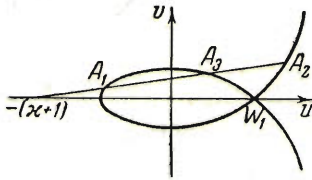
Решая (2.1) по формуле Кардана, получим

$$K = \frac{1}{3} \left[K_1 + 2 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^3 - K_1^3 + \left(\left(\frac{3}{2} \right)^3 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^3 - 2K_1^3 \right] \right)^{1/2} \right\}^{1/2} + \right. \\ \left. + 2 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^3 - K_1^3 - \left(\left(\frac{3}{2} \right)^3 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^3 - 2K_1^3 \right] \right)^{1/2} \right\}^{1/2} \right] \quad (2.3)$$

Из трех значений корня кубического

$$\sqrt[3]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[3]{r} \left\{ \cos \frac{1}{3}(\varphi + 2\pi m) + i \sin \frac{1}{3}(\varphi + 2\pi m) \right\}$$

нужно брать результат при $m = 2$, так как он соответствует точке A_3 , которая действительно реализуется в потоке ($m = 0$ соответствует точке A_1 , а $m = 1$ — точка A_2) (фиг. 3).



Фиг. 3

Если за головной волной устанавливается точно звуковое течение, то легко определить угол наклона скачка λ_* . Как видно из фиг. 4, в рассматриваемом приближении, используя (1.5) и (1.11), можно считать

$$\operatorname{tg} \lambda_* = \frac{M_1^2 - 1}{(x + 1)\delta} = \frac{K_1}{(x + 1)^{1/2} \delta^{1/2}}$$

В нашем случае $K_1 = K$ согласно (2.2); таким образом будем иметь

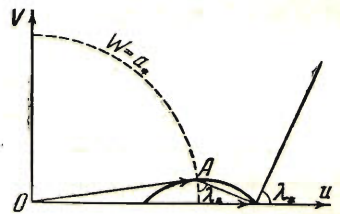
$$\operatorname{tg} \lambda_* = \sqrt[3]{\frac{2}{(x + 1)\delta}} \quad (2.4)$$

Формула для коэффициента давления C_p из теории тонких профилей [2] в трансзвуковом случае имеет вид:

$$C_p = -\frac{2}{x + 1}(u - u_1)$$

или

$$C_p = -\frac{2\delta^{3/2}(K - K_1)}{(x + 1)^{1/2}} \quad (2.5)$$



Фиг. 4

Внося в последнее выражение (2.3), в данном случае имеем для коэффициента сопротивления

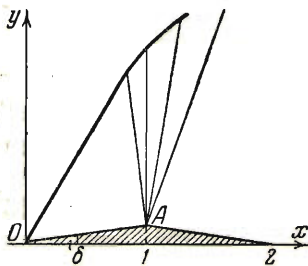
$$C_x = \frac{4}{3} \left\{ K_1 - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - K_1^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 2K_1^3\right]} - \right. \\ \left. - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - K_1^3} - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 2K_1^3\right]} \right\} \frac{\delta^{3/2}}{(x + 1)^{1/2}} \quad (K_1 \geq \sqrt[3]{2}) \quad (2.6)$$

Подстановка (2.2) в формулу (2.5) дает в предельном случае обтекания для коэффициента сопротивления

$$C_{x \text{ lim}} = 2 \sqrt[3]{2} \frac{\delta^{3/2}}{(x + 1)^{1/2}} \quad (2.7)$$

Результаты вычислений по формуле (2.6) приведены ниже (фиг. 11), где построена кривая

$$C_x^0 = C_x \frac{(x + 1)^{1/2}}{\delta^{3/2}} (K_1)$$



Фиг. 5

Рассмотрим слабо сверхзвуковой поток, набегающий на тонкий ромбовидный профиль, причем угол δ выберем таким малым, чтобы имел место режим обтекания с присоединенной ударной волной (прямолинейной) (фиг. 5). Тогда задняя стенка профиля мало влияет на обтекание передней, а поэтому коэффициент давления C_x на переднюю стенку ромба можно вычислять по формуле (2.5).

На задней стенке аналогично (1.11) имеем в данном приближении $v = -v_0 = -(x + 1)\delta$. Около средней вершины ромба A возникает

течение Прандтля-Майера, и поток поворачивает вдоль задней стенки [5]. Так как поток за ударной волной подавно весьма мало превосходит звуковой, то можно применить приближенное уравнение эпициклоиды (1.10) при условии

$$v = -v_0 = -(x + 1)\delta, \quad v_1 = v_0 = (x + 1)\delta$$

В результате, учитывая (1.11), получим

$$K_2 = (K^{3/2} + 3)^{2/3} \tag{2.8}$$

где K — параметр подобия после скачка, определяемый по (2.3), K_2 — параметр на задней части ромба. Применяя теперь (2.5), находим коэффициент давления C_{x_2} на задней стенке профиля:

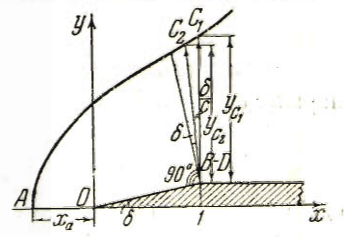
$$C_{x_2} = \frac{2\delta^{3/2}}{(x + 1)^{1/2}} [K_1 - (K^{3/2} + 3)^{2/3}] \tag{2.9}$$

сопротивление ромба при рассматриваемом режиме обтекания равно

$$C_x = C_{x_1} + C_{x_2}$$

График этого сопротивления для ромба приводится ниже на фиг. 11.

§ 3. Коэффициент сопротивления клина в сверхзвуковом потоке в случае отсоединенной ударной волны и области местных дозвуковых скоростей за ней. Отход и кривизна скачка. Рассмотрим слабо сверхзвуковой поток, набегающий на клин единичной длины (фиг. 1 и 6). Угол заострения клина δ и число M_1 свободного потока выберем таким образом, чтобы имел место режим обтекания с отсоединенной головной волной и областью местных дозвуковых скоростей перед клином. Последняя замыкается линией перехода, исходящей из заднего выступа клина [7].



Фиг. 6

Представим уравнение ударной волны на физической плоскости в виде степенного ряда по y^2 :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{2n}$$

Опираясь тогда на результаты экспериментов [8], можно заключить, что скачок имеет параболический характер¹, т. е. в последнем ряде ограничимся первыми двумя членами, и уравнение приближенно записывается

$$x = ay^2 - x_a \quad \left(a = \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dy^2} \right) \tag{3.1}$$

где a и x_a — пока неопределенные величины, большие или равные нулю.

Величина x_a представляет собой отход скачка от носика клина, коэффициент a характеризует его кривизну. С уменьшением скорости набегающего потока скачок отходит от клина все дальше, выпрямляется и слабеет, а при $M_1 = 1$ его интенсивность убывает до нуля ($x_a \rightarrow \infty$). С другой стороны, ударная волна приводит к необратимым потерям, а следовательно, к возрастанию энтропии протекающих через нее масс газа. Этот скачок энтропии порождает волновое сопротивление.

¹ Это допущение, как будет видно дальше, не влияет на C_x , а лишь на x_a и a .

Теперь окончательно можно сделать вывод, что сопротивление клина при рассматриваемом режиме обтекания складывается из волнового сопротивления и сопротивления в случае звукового обтекания. Значит, коэффициент сопротивления принимает вид:

$$C_x = C_x^\circ \frac{\delta^{3/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} + C_x^* \quad (3.2)$$

где C_x° — коэффициент сопротивления^[9] при $M_1 = 1$ (Γ — гамма-функция):

$$C_x^\circ = \frac{8}{3^{1/2}} \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma^2(2/3)} n \left(\frac{2}{3}\right) \quad \left(n \left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} m^{-2/3}\right) \quad (3.3)$$

Для определения C_x^* воспользуемся выражением

$$C_x^* = \frac{2F_x^*}{\rho_1 U_1^2}, \quad F_x^* = p_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta S}{R} dy \quad (3.4)$$

Здесь p_1 , ρ_1 , U_1 относятся к набегающему потоку, R — газовая постоянная, ΔS — скачок энтропии, а интеграл берется по сечению, расположенному за профилем. Теперь используем представление^[6]

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{1}{\kappa - 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} A_n \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^n, \quad A_n = \left(\frac{1 - \kappa}{2}\right)^n + \kappa - \left(\frac{1 + \kappa}{2}\right)^n$$

В рассматриваемом случае скачок слабый, поэтому можно ограничиться в последнем разложении двумя отличными от нуля членами. Тогда

$$\frac{\Delta S}{R} \approx \frac{\kappa(\kappa + 1)}{12} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^3 - \frac{\kappa(\kappa + 1)}{8} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^4 \quad (3.5)$$

Но для слабого косога скачка из уравнения сохранения массы при переходе через него можно найти^[4]

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\varphi}{\sin \alpha \cos \alpha} \quad (3.6)$$

где α — угол Маха набегающего потока, φ — угол отклонения вектора скорости после скачка. Ясно, что для данного приближения в безразмерных величинах (1.5) будем иметь $\varphi = v / (\kappa + 1)$ (3.7), где v — непосредственно за скачком. Если выразить α через число M_1 и учесть (1.11), то

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx \frac{M_1^2}{(\kappa + 1) U_1^{1/2}} v \quad (3.8)$$

Теперь (3.5) примет вид:

$$\frac{\Delta S}{R} \approx \frac{\kappa M_1^6}{12(\kappa + 1)^2} \frac{v^3}{u_1^{1/2}} - \frac{\kappa M_1^8}{8(\kappa + 1)^3} \frac{v^4}{u_1^2} \quad (3.9)$$

Пусть за клином находится бесконечный стержень (прямолинейный). Тогда сечение, вдоль которого берется интеграл (3.4), можно провести произвольно (лишь бы оно было за клином). Далее предположим, что сверхзвуковая зона на заднем выступе клина, непосредственно прилегающая к линии перехода, пренебрежительно мало влияет на обтекание, в частности на сопротивление. В таком случае за сечение, на котором производится интегрирование (3.4), можно приближенно принять звуковую линию. Следовательно, интеграл нужно брать от заднего выступа

клина ($y = 0$) до точки пересечения линии перехода с ударной волной ($y = y_c$). Таким образом, предполагается, что скачок за $y = y_c$ совсем слаб и им можно пренебречь. Конечно, такой метод является приближенным, но он учитывает главную часть коэффициента сопротивления.

На основании введенных предположений F_x^* можно записать, используя (3.9):

$$F_x^* = \rho_1 \frac{\kappa M_1^6}{4(\kappa + 1)^2} \left\{ \frac{1}{3 u_1^{3/2}} \int_0^{y_c} v^3 dy - \frac{M_1^2}{2(\kappa + 1) u_1^2} \int_0^{y_c} v^4 dy \right\} \quad (3.10)$$

К появляющимся здесь интегралам можно применить теорему о среднем. Причем, за среднее значение v примем значение v в точке C пересечения ударной волны и звуковой линии (фиг. 1). Это допущение, повидимому, грубо, но оно совершенно не влияет на определение C_x , а только на x_a и a . Но на звуковой линии ($u = 0$) (1.6) дает

$$v = 2^{-1/2} u_1^{3/2} \quad (3.11)$$

Далее, введя в (3.4) безразмерные величины (1.5), имеем для волнового сопротивления

$$C_x^* = \frac{2 F_x^*}{\rho_1 a_*^2} \left[1 + 2 \left\{ \frac{u_1}{\kappa + 1} + \frac{u_1^2}{(\kappa + 1)^2} \right\} \right]^{-1}$$

Подставим сюда (3.10), (3.11) и разложим последнюю дробь в ряд по степеням u_1 . Тогда, ограничиваясь в найденном выражении для C_x^* членами четвертого порядка, получим

$$C_x^* = \frac{\kappa \rho_1}{\rho_1 a_*^2} \frac{M_1^6}{3 \cdot 2^{3/2} (\kappa + 1)^2} y_{c_1} u_1^3 - \frac{\kappa \rho_1}{\rho_1 a_*^2} \left\{ \frac{M_1^8}{16 (\kappa + 1)^3} + \frac{M_1^6}{3 \cdot 2^{3/2} (\kappa + 1)^3} \right\} y_{c_1} u_1^4$$

Последней формуле можно придать другой вид, если ввести параметр подобия (1.12), т. е.

$$C_x^* = \left\{ \frac{\kappa \rho_1}{\rho_1 a_*^2} \frac{M_1^6 (M_1^2 - 1)^2}{3 \cdot 2^{3/2} (\kappa + 1)} \frac{y_{c_1}}{\delta} \right\} \left[\frac{\delta^{5/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \right] K_1 - \left\{ \frac{\kappa \rho_1}{\rho_1 a_*^2} \frac{M_1^6 (M_1^2 - 1)^2}{4 (\kappa + 1)^{4/2}} \frac{y_{c_1}}{\delta^{1/2}} \left(\frac{M_1^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right\} \left[\frac{\delta^{5/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \right] K_1^2 \quad (3.12)$$

Такое преобразование было сделано для того, чтобы удовлетворить околосверхзвуковому закону подобия и чтобы осуществить гладкий переход кривой сопротивления через скорость звука ($K_1 = 0$).

Производная от C_x^* слева выражается следующим образом:^[9]

$$\frac{dC_x}{dK_1} \Big|_{K_1=0} = 2 \left[\frac{\delta^{5/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \right] \quad (3.13)$$

Отсюда видно, что C_x^* должно иметь по крайней мере один линейный относительно K_1 член с положительным коэффициентом. Что же касается второго члена в (3.12), то дальше будет показано, что степень K_1 в нем должна быть не ниже второй.

С другой стороны, чтобы C_x^* выражалось в соответствии с законом подобия^[2], нужно коэффициенты в фигурных скобках (3.12) приравнять

постоянным величинам

$$\frac{\kappa p_1}{\rho_1 a_*^2} \frac{M_1^6 (M_1^2 - 1)^2}{3 \cdot 2^{3/2} (\kappa + 1)} \frac{y_{c_1}}{\delta} = A_1$$

$$\frac{\kappa p_1}{\rho_1 a_*^2} \frac{M_1^6 (M_1^2 - 1)^2}{4 (\kappa + 1)^{4/3}} \frac{y_{c_2}}{\delta^{1/3}} \left(\frac{M_1^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = A_2 \quad (3.14)$$

Здесь A_1 и A_2 — пока неопределенные величины. Теперь (3.12) принимает вид:

$$C_x = (A_1 K_1 - A_2 K_1^2) \left[\frac{\delta^{3/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \right] \quad (3.15)$$

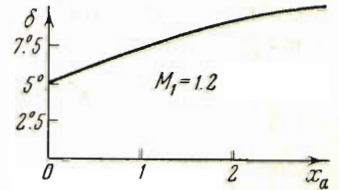


Фиг. 7

Причем, как уже отмечалось выше, y_c есть ордината точки пересечения головной волны ($x = ay^2 - x_a$) с линией перехода. Для члена первого порядка в (3.12) будем считать, что звуковая линия располагается по $x = 1$, т. е. будем брать для нее первое приближение. В этом случае

$$y_{c_1} = \sqrt{\frac{x_a + 1}{a}} \quad (3.16)$$

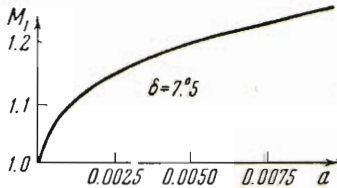
Далее, для члена второго порядка будем предполагать, что звуковая линия располагается по прямой $1 - x = (\delta y / C)$, где C — пока произвольная величина. Такое положение



Фиг. 8

линии перехода можно рассматривать как второе приближение. Пренебрегая величиной $\delta^2 / 4 a^2 c^2$ по сравнению с $(x_a + 1) / a$, для данного случая легко найти

$$y_{c_2} = \sqrt{\frac{x_a + 1}{a}} - \frac{\delta}{2aC} \quad (3.17)$$



Фиг. 9

Выражая p_1 и ρ_1 через число M_1 , получим

$$\frac{\kappa p_1}{\rho_1 a_*^2} = \frac{a_*^2}{a_*^2} = \frac{\kappa + 1}{2} \frac{1}{1 + 1/2 (\kappa - 1) M_1^2} \quad (3.18)$$

Условие гладкого перехода кривой сопротивления через скорость звука ($K_1 = 0$) на основании (3.13) определяет одну из постоянных:

$$A_1 = 2 \quad (3.19)$$

Другую постоянную A_2 найдем из условия непрерывного перехода кривой сопротивления через предельный параметр подобия (2.2). Физически это означает непрерывный переход от режима обтекания с областью местных дозвуковых скоростей за головной волной к режиму с постоянным сверхзвуковым течением за ней.

Использование (2.7), (3.2), (3.19) и (3.15) приводит к

$$A_2 = \frac{2^{1/3}}{3^{2/3}} \frac{\pi^{1/3}}{\Gamma^2(2/3)} n^{(2/3)} \approx 1.05 \quad (3.20)$$

Если внести в (3.14) значения постоянных A_1 и A_2 , а также (3.16), (3.17) и (3.18), то для определения a и x_a получится система двух уравнений. Решая ее, найдем

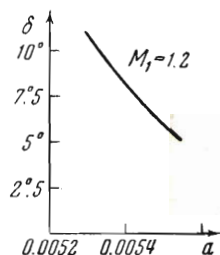
$$a = \frac{\frac{1}{16} \frac{\delta^{3/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \frac{M_1^6 (M_1^2 - 1)^2}{1 + 1/2 (\kappa - 1) M_1^2} \left(\frac{M_1^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \frac{1}{C}}{6 \sqrt{2} \frac{\delta^{3/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \left(\frac{M_1^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) - \frac{2^{7/2}}{3^{5/2}} \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma^2(2/3)} n^{(2/3)}} \quad (3.21)$$

$$x_a = \frac{288 \frac{\delta^{3/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \frac{1 + 1/2 (\kappa + 1) M_1^2}{M_1^6 (M_1^2 - 1)^2} \left(\frac{M_1^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \frac{1}{C}}{6 \sqrt{2} \frac{\delta^{3/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \left(\frac{M_1^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) - \frac{2^{7/2}}{3^{5/2}} \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma^2(2/3)} n^{(2/3)}} - 1 \quad (3.22)$$

Остается определить величину C . Применяем для этой цели соображение, что при $K_1 = K_*$ (1.13) скачок садится на острие клина, т. е. $x_a = 0$. Отсюда получаем

$$C = \frac{\frac{2^{7/2}}{(\kappa + 1)^{5/2}} \frac{\delta^{3/2}}{[1 + 2^{-4/2} 3 (\kappa + 1)^{3/2} \delta^{3/2}]} \left[\frac{1}{2} (\kappa + 1) + 2^{-7/2} 3 (\kappa - 1) (\kappa + 1)^{3/2} \delta^{3/2} \right]}{\frac{6 \sqrt{2} \delta^{3/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2^{10/2}} (\kappa + 1)^{3/2} \delta^{3/2} \right] - \frac{2^{7/2}}{3^{5/2}} \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma^2(2/3)} n^{(2/3)}} \left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2^{10/2}} (\kappa + 1)^{3/2} \delta^{3/2} \right]} \quad (3.23)$$

Таким образом, отход скачка и его кривизна выразились в функциях числа M_1 и полуугла клина δ . Из последних формул непосредственно видно, что $x_a \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow 0$ при $M_1 \rightarrow 1$, т. е. скачок уходит в бесконечность и становится прямым, полностью теряя при этом свою интенсивность. На фиг. 7, 8, 9, 10 приведены кривые изменения x_a и a по числам M_1 и по углам δ . Кроме того, на фиг. 7 для сравнения нанесена экспериментальная кривая^[3] зависимости $x_a(M_1)$ для конуса с полууглом 20° , откуда можно заключить о качественном совпадении графиков.



Фиг. 10

Покажем, что второй член в (3.12) содержит K_1 в степени не ниже чем в квадрате. В самом деле, в противном, как легко убедиться, первое слагаемое знаменателя в формуле (3.22) будет содержать $M_1^2 - 1$ в некоторой положительной степени. А это приводит к $x_a \rightarrow -\infty$ при $M_1 \rightarrow 1$, что противоречит действительности ($x_a \geq 0$).

Вернемся к вопросу о сопротивлении клина. Внося (3.15), а также значения A_1 и A_2 в (3.2), получим приближенную формулу для коэффициента сопротивления клина в сверхзвуковом потоке в случае отсоединенной ударной волны и области местных дозвуковых скоростей за ней:

$$C_x = \left\{ \frac{8}{3^{5/2}} \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma^2(2/3)} n^{(2/3)} + 2 K_1 - \frac{2^{7/2}}{3^{5/2}} \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma^2(2/3)} n^{(2/3)} K_1^2 \right\} \left[\frac{\delta^{3/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \right] \quad (3.24)$$

где $0 \leq K_1 \leq \sqrt[3]{2}$.

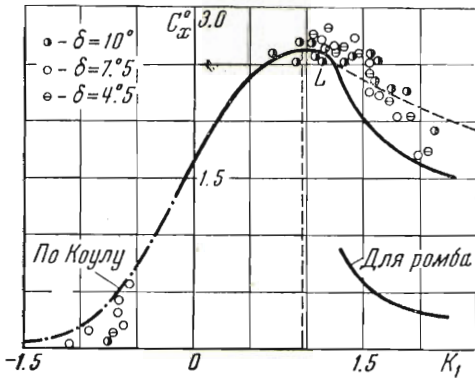
Из формулы (3.24) имеем

$$C_{x \max} = \left\{ \frac{8}{3^{3/2}} \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma^2(2/3)} n^{(2/3)} + \frac{3^{3/2}}{2^{7/2}} \frac{\Gamma^2(2/3)}{\pi^{1/2} n^{(2/3)}} \right\} \frac{\delta^{3/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \approx 2.63 \frac{\delta^{3/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}}$$

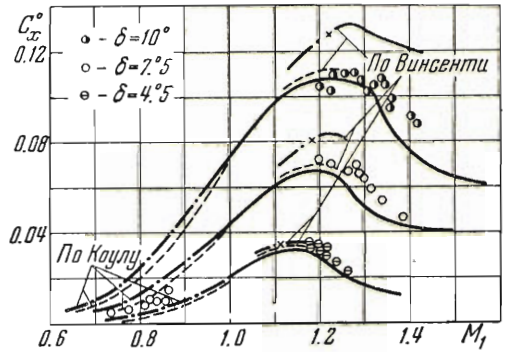
при

$$K_1 = \frac{3^{3/2}}{2^{7/2}} \frac{\Gamma^2(2/3)}{\pi^{1/2} n^{(2/3)}} \approx 0.955$$

На фиг. 11 приведена кривая зависимости C_x° от K_1 ($0 \leq K_1 \leq \sqrt[3]{2}$). Там же для сравнения нанесены точки, полученные экспериментально^[8], и кривая Коула^[9] при $K_1 < 0$.



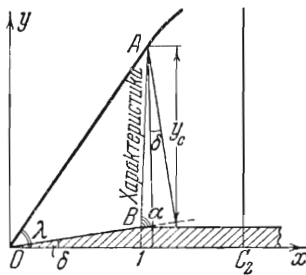
Фиг. 11



Фиг. 12

Близкое расположение экспериментальных точек для различных δ подтверждает околосзвуковой закон подобия^[2,4]. На фиг. 12 дается сравнение полученных нами результатов с результатами Винсенти и с экспериментальными данными для $\delta = 4.5, 7.5, 10^\circ$.

Пунктиром нанесена кривая Винсенти, полученная на основании выбора $C_p = -2u'/U_1$, сплошной линией для $C_p = -2u'/a_*$.



Фиг. 13

Из приведенных сравнений с экспериментальными данными следует, что формула (3.24) хотя и является приближенной, однако она с достаточной степенью точности отражает действительную картину обтекания клина слабо сверхзвуковым потоком идеального газа и дает хорошие результаты для довольно широкого диапазона углов заострения клина.

§ 4. Коэффициент сопротивления клина с прямолинейным скачком, сидящем на его острие. Наклон скачка. Недостатком построенной нами кривой сопротивления клина на фиг. 11 является ее довольно большой излом ($\approx 43^\circ.5$) в точке L , соответствующей предельному значению параметра подобия. Гладкий переход кривой через эту точку можно осуществить, применяя и в случае данного режима (фиг. 13) для нахождения C_x тот же метод, что и в § 3.

построенной нами кривой сопротивления клина на фиг. 11 является ее довольно большой излом ($\approx 43^\circ.5$) в точке L , соответствующей предельному значению параметра подобия. Гладкий переход кривой через эту точку можно осуществить, применяя и в случае данного режима (фиг. 13) для нахождения C_x тот же метод, что и в § 3.

В рассматриваемом случае скачок поворачивает поток вдоль стенки клина так, что $\varphi = \delta$ в (3.6), а сопротивление возникает как результат необратимых потерь в ударной волне, т. е. $C_x = C_x^*$. Сечение, вдоль которого производится интегрирование в (3.4), проведем пока произвольно за клином. Следовательно, интеграл нужно брать от $y = 0$ до пересечения со скачком (y_c). Этот приближенный метод достаточно хорошо учитывает главную часть коэффициента сопротивления: Тогда аналогично § 3 получим

$$C_x = \frac{\kappa p_1}{\rho_1 a_*^2} \frac{(\kappa + 1) M_1^6 y_c}{2 [1 + u_1 / (\kappa + 1)]^2} \left\{ \frac{\delta^3}{3 u_1^{3/2}} - \frac{M_1^2 \delta^4}{2 u_1^2} \right\}$$

Последнее приведем к следующему виду, учитывая (9.11) и (3.18).

$$C_x = \left\{ \frac{A_1}{\sqrt{K_1}} - \frac{A_2}{K_1^2} \right\} \left[\frac{\delta^{3/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \right] \tag{4.1}$$

где

$$A_1 = \frac{(\kappa + 1)^2 \delta}{12} \frac{M_1^6 y_{c_1}}{[(M_1^2 + \kappa) / (\kappa + 1)]^2 [1 + 1/2 (\kappa - 1) M_1^2] (M_1^2 - 1)}$$

$$A_2 = \frac{(\kappa + 1) \delta}{8} \frac{M_1^8 y_{c_2}}{[(M_1^2 + \kappa) / (\kappa + 1)]^2 [1 + 1/2 (\kappa - 1) M_1^2]} \tag{4.2}$$

причем A_1 и A_2 , чтобы C_x было в соответствии с околосзвуковым законом подобия^[2], нужно считать пока неопределенными, но постоянными величинами.

Для второго члена в (4.1) будем считать, что сечение, на котором берется интеграл, проходит по $x = C_2$. Поэтому, если уравнение скачка $y = ax$, то $y_{c_2} = C_2 a$. В первом члене положим $y_{c_1} = C_1 y_a$. Здесь y_a — ордината точки пересечения ударной волны и первой линии Маха, исходящей из заднего выступа клина: $(x - 1) / y = \sqrt{M_2^2 - 1} - \delta$ (M_2 — число Маха за скачком). Тогда

$$\sqrt{M_2^2 - 1} = \frac{y_a / a - 1}{y_a} + \delta \tag{4.3}$$

причем постоянные C_1 и C_2 пока произвольны.

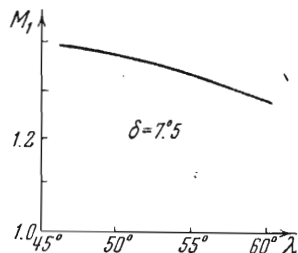
Условия непрерывности и гладкости перехода кривой сопротивления (3.24) в кривую (4.1) в точке, соответствующей предельному параметру подобия (2.2), определяют постоянные A_1 и A_2 :

$$A_1 = 2^{5/2} \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt[3]{2} C_x^\circ \right) \approx 3.18$$

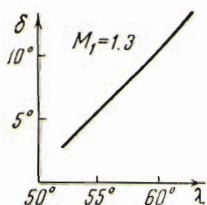
$$A_2 = 4 \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{2} C_x^\circ \right) \approx 0.496 \tag{4.4}$$

где C_x° взято из (3.3). Внося эти выражения в формулу (4.2), найдем

$$a = \operatorname{tg} \lambda = \frac{32 (1 - 2^{1/3} 2^{1/3} C_x^\circ) [1 + \frac{1}{2} (\kappa - 1) M_1^2]}{(\kappa + 1) \delta M_1^8 C_2} \left(\frac{M_1^2 + \kappa}{\kappa + 1} \right)^2 \tag{4.5}$$



Фиг. 14



Фиг. 15



Фиг. 16

$$y_a = \frac{48 \sqrt{2} (1 - 1/3 2^{1/3} C_x^0) [1 + 1/2 (\kappa - 1) M_1^2] (M_1^2 - 1)}{(\kappa + 1)^2 \delta M_1^6 C_1} \left(\frac{M_1^2 + \kappa}{\kappa + 1} \right)^2 \quad (4.6)$$

Остается получить величины C_1 и C_2 . Для этого используем факт, что при $K_1 = K_{\text{lim}}(2.2)$ $M_2 = 1$ и $a_* = \text{tg } \lambda_*$ выражается по (2.4). Следовательно, используя (4.3), имеем

$$C_1 = \frac{48 \sqrt{2} (1 - 1/3 \sqrt[3]{2} C_x^0) [1/2 (\kappa + 1) + 4^{-1/3} (\kappa - 1) (\kappa + 1)^{2/3} \delta^{2/3}] [1 + \sqrt[3]{2} (\kappa + 1)^{-1/3} \delta^{2/3}]^2}{[1 + 2^{1/3} (\kappa + 1)^{2/3} \delta^{2/3}]^3 \frac{(\kappa + 1)^{4/3}}{2^{1/3} \delta^{2/3} + (\kappa + 1)^{2/3}}}$$

$$C_2 = \frac{16 \sqrt[3]{4} (1 - 2/3 \sqrt[3]{2} C_x^0) [1/2 (\kappa + 1) + 4^{-1/3} (\kappa - 1) (\kappa + 1)^{2/3} \delta^{2/3}] \left[1 + \frac{2^{1/3}}{(\kappa + 1)^{1/3}} \delta^{2/3} \right]^2}{(\kappa + 1)^{2/3} \delta^{2/3} [1 + 2^{1/3} (\kappa + 1)^{2/3} \delta^{2/3}]^4}$$

Таким образом, наклон скачка λ , y_a , а также и M_2 по (4.4) выразились в функциях числа M_1 и полуугла клина δ . На фиг. 14, 15 приведены кривые изменения угла наклона ударной волны λ по M_1 и δ .

На фиг. 16 дается график изменения скорости за скачком в зависимости от скорости набегающего потока. Для сравнения нанесена кривая, полученная по (2.3) при $\delta = 7^\circ.5$. Обратимся к сопротивлению клина. Внося в (4.1) значения A_1 и A_2 , окончательно получим приближенную формулу для коэффициента сопротивления клина в сверхзвуковом потоке в случае присоединенной прямолинейной ударной волны и области постоянного сверхзвукового течения за ней:

$$C_x = \left\{ \frac{2^{2/3}}{\sqrt{K_1}} \left[1 - \frac{8 \cdot 2^{1/3}}{3 \cdot 3^{2/3}} \frac{\pi^{2/3}}{\Gamma^2(2/3)} n^{(2/3)} \right] - \frac{4}{K_1^2} \left[1 - \frac{16 \cdot 2^{1/3}}{3 \cdot 3^{2/3}} \frac{\pi^{1/3}}{\Gamma^2(2/3)} n^{(2/3)} \right] \right\} \frac{\delta^{5/3}}{(\kappa + 1)^{1/3}}$$

где $K_1 \geq 2^{1/3}$. На фиг. 11 дан график C_x^* (пунктир) из (4.8). Сравнивая его с экспериментальными результатами^[8], можно заключить, что приближенная формула (4.8) с достаточной степенью точности отражает истинный процесс обтекания. В заключение приношу глубокую благодарность С. В. Фальковичу за постановку задачи и указания.

Поступила 25 XI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалькович С. В. Плоское движение газа при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, т. XI, вып. 4, 1947.
2. Карман Т. Закон подобия для трансзвукового потока. Сб. «Газовая динамика». ИИЛ, 1950.
3. Кочин, Кибель и Розе. Теоретическая гидромеханика, ч. 2, 1950.
4. Карман Т. Проблема сопротивления в сжимаемой жидкости. Сб. «Газовая динамика». ГОНТИ, 1939.
5. Карман Т. Сверхзвуковая аэродинамика. ИИЛ, 1948.
6. Беленький С. З. О волновом сопротивлении тел в сверхзвуковом потоке. ПММ, т. VIII, вып. 1, 1944.
7. Франкль Ф. К вопросу о единственности решения задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком. ПММ, т. X, вып. 3, 1946.
8. Липман Г. и Брисон А., Обтекание клиновидных профилей потоком газа с околосубзвуковыми скоростями. Сб. «Механика», вып. 3. ИИЛ, 1951.
9. I. D. Cole. Drag of a Finite Wedge at High Subsonic Speeds. Journal of Math. and Physics, vol. 30, № 2, 1951.