

## К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ ОКОЛОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

А. Ф. Крючкин

(Рига)

В работе изучается установившееся околосвуковое течение газа при отсутствии трения и теплопередачи. В качестве примера рассматривается симметричное обтекание клина с отсоединенной линией сильного разрыва в предположении, что скорость потока на бесконечности мало превосходит скорость звука и клин имеет небольшой угол раствора.

Применением закона околосвукового подобия и переходом в плоскость «голдграфа» задача обтекания клина сводится к некоторой граничной задаче для уравнения

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (0.1)$$

Для решения этой задачи используются частные решения уравнения (0.1), линейными комбинациями которых удается приближенно удовлетворить всем граничным условиям.

В результате численных расчетов найдены распределение давления по профилю, положение и форма линии сильного разрыва, уравнения звуковой линии.

**§ 1. Основные соотношения.** Пусть  $u, v$  — проекции вектора скорости на оси  $x, y$  декартовой системы координат,  $a_*$  — критическая скорость звука,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\kappa$  — показатель адиабаты.

Выведем уравнения околосвукового движения газа, некоторые соотношения, характерные для околосвукового движения, и поставим задачу обтекания тонкого профиля.

Эти результаты были получены в работах [1–3].

Систему уравнений, описывающую безвихревой поток, берем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \left[ \frac{\kappa+1}{2} (1-u^2) - \frac{\kappa-1}{2} v^2 \right] \frac{\partial u}{\partial x} + 2uv \frac{\partial u}{\partial y} + \\ &+ \left[ \frac{\kappa+1}{2} (1-v^2) - \frac{\kappa-1}{2} u^2 \right] \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $u, v$  измеряются в долях критической скорости звука.

Для скорости потока, мало отличающейся от скорости звука и при

малых относительных толщинах обтекаемого тела эту систему уравнений представим в ином виде; для этого положим

$$\frac{u}{a_*} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \varepsilon^n, \quad U_0 = 1 \quad (1.2)$$

$$\frac{v}{a_*} = \varepsilon \beta \sum_{n=0}^{\infty} V_{n+1} \varepsilon^n, \quad V_1 \neq 0, \quad (\beta > 0) \quad (1.3)$$

$$x = l_* X, \quad y = l_* V \varepsilon^{-\gamma} \quad (\gamma > 0) \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon$  — постоянная малая по сравнению с единицей величина, величины  $U_n$ ,  $V_n$  и их производные по  $X$  и  $Y$  считаем конечными, имеющими в преобладающей части потока порядок единицы;  $\beta$  и  $\gamma$  — положительные числа;  $l_*$  — характерная длина.

Подставим в уравнения (1.1) выражения (1.2)—(1.4) и перегруппируем члены по возрастающим степеням  $\varepsilon$ . Из полученной системы уравнений находим единственные значения для  $\beta = 3/2$  и  $\gamma = 1/2$ , при которых система уравнений не вырождается в тривиальную. Отсюда получаем следующий результат: для того чтобы уравнения (1.1) в условиях околозвукового безвихревого движения выполнялись с точностью  $\varepsilon^3$ , необходимо и достаточно, чтобы величины  $V_1$  и  $U_1$  удовлетворяли уравнениям

$$\frac{\partial V_1}{\partial X} - \frac{\partial U_1}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial Y} - (\kappa + 1) U_1 \frac{\partial U_1}{\partial X} = 0 \quad (1.5)$$

Для того чтобы уравнения (1.1) выполнялись с точностью  $\varepsilon^4$ , необходимо и достаточно, чтобы  $V_1$ ,  $U_1$  удовлетворяли уравнениям (1.5), а  $V_2$ ,  $U_2$  уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial X} - \frac{\partial U_2}{\partial Y} &= 0 \\ \frac{\partial V_2}{\partial Y} - (\kappa + 1) U_1 \frac{\partial U_2}{\partial X} - (\kappa + 1) \frac{\partial U_1}{\partial X} U_2 - \frac{\kappa + 1}{2} U_1^2 - \\ &- (\kappa - 1) U_1 \frac{\partial V_1}{\partial Y} + 2V_1 \frac{\partial U_1}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

В этой системе  $V_1$ ,  $U_1$  предварительно определяются из системы (1.5). Аналогично можно составить системы уравнений, которые будут являться условиями выполнения уравнений (1.1) с точностью  $\varepsilon^5$ ,  $\varepsilon^6$  и т. д.

Если рассмотреть систему уравнений, которая описывает вихревой поток, то аналогичным образом можно показать, что уравнения околозвукового вихревого и безвихревого потоков совпадают с точностью до  $\varepsilon^3$ . Уравнения околозвукового движения с точностью  $\varepsilon^4$  для безвихревого и вихревого потоков различны. Это значит, что величина вихря в околозвуковом движении имеет по меньшей мере порядок  $\varepsilon^3$ . Прямыми вычислениями

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

легко показать, что вихрь имеет порядок  $\varepsilon^{1/2}$ .

Уравнения (1.5) после замены

$$U_1 = -\frac{-U}{x+1}, \quad V_1 = \frac{V}{x+1}$$

принимают вид:

$$\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} = 0, \quad U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1.7)$$

Если в уравнениях (1.7) принять  $X$  и  $Y$  за искомые функции, а  $V$  и  $U$  за независимые переменные, то получим линейную систему уравнений

$$\frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial U} - U \frac{\partial Y}{\partial V} = 0 \quad (1.8)$$

Исключая из уравнений (1.8) функцию  $X$ , получим для определения  $Y$  уравнение Эйлера-Дарбу (0.1)

$$U \frac{\partial^2 Y}{\partial V^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial U^2} = 0$$

Соотношения (1.2)—(1.4) и формулы для плотности и давления запишутся в этом приближении так:

$$\begin{aligned} \frac{u}{a_*} &= 1 - \varepsilon \frac{U}{x+1}, & \frac{p}{p_*} &= 1 + \varepsilon \frac{x}{x+1} U, & \frac{x}{l_*} &= X \\ \frac{v}{a_*} &= \varepsilon^{1/2} \frac{V}{x+1}, & \frac{\rho}{\rho_*} &= 1 + \varepsilon \frac{U}{x+1} - \varepsilon^2 \frac{x-1}{2(x+1)^2} U^2, & \frac{y}{l_*} &= \varepsilon^{-1/2} Y \end{aligned} \quad (1.9)$$

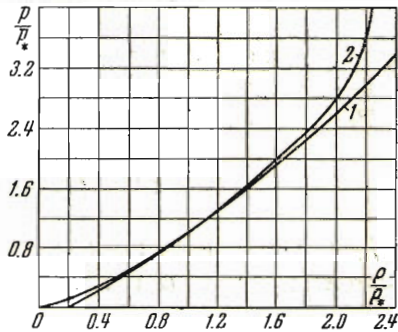
Из соотношений (1.9) легко установить следующую связь между плотностью и давлением в околосвуковом потоке газа:

$$\frac{\rho}{\rho_*} = 1 + \frac{1}{x} \left( \frac{p}{p_*} - 1 \right) - \frac{x-1}{2x^2} \left( \frac{p}{p_*} - 1 \right)^2 \quad (1.10)$$

На плоскости переменных  $p/p_*$  и  $\rho/\rho_*$  график этой зависимости есть квадратная парабола 2 с вершиной в точке (2.25, 4.50). Она имеет (фиг. 1) в точке (1.1) с адиабатой Пуассона общую касательную и одинаковую кривизну. Из графика видно, что зависимость (1.10) удовлетворительно аппроксимирует адиабату 1 Пуассона. На этом участке от  $\rho/\rho_* = 0,6$  до  $\rho/\rho_* = 1,5$  относительная погрешность не превышает 3%.

Из соотношений (1.9) для давления и плотности получим

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_*} &= 1 + x - x \frac{u}{a_*} \\ \frac{\rho}{\rho_*} &= \frac{5-x}{2} + (x-2) \frac{u}{a_*} - \frac{x-1}{2} \frac{u^2}{a_*^2} \end{aligned}$$



Фиг. 1

Графики этих зависимостей даны на фиг. 2, где одновременно приведены аналогичные соотношения для адиабатического течения. Сравни-

вая адиабатическое и околосвуковое течения газа, видим, что в диапазоне изменения относительной скорости  $u/a_*$  от 0.6 до 1.4 относительная погрешность для  $\rho/\rho_*$  и  $p/p_*$  не превышает 1.63% и 2.65% соответственно.

Если использовать уравнения связи параметров за и перед линией сильного разрыва, то получим

$$2(V - V_1)^2 + (U - U_1)^2(U + U_1) = 0 \quad (1.11)$$

$$U + U_1 + 2\Phi'^2 = 0 \quad (1.12)$$

где индексом 1 обозначены параметры газа перед линией сильного разрыва,  $X = \Phi(Y)$  — уравнение линии сильного разрыва.

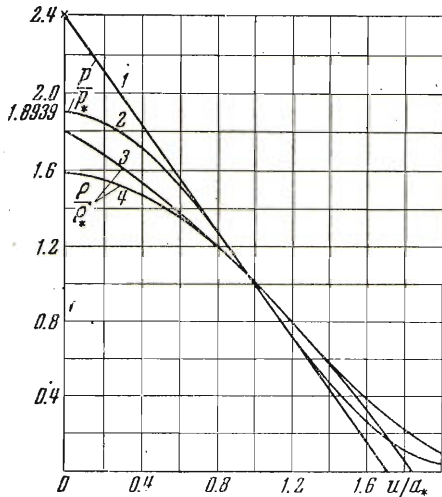
Первое из этих уравнений есть уравнение «ударной поляры» в околосвуковом движении. Ударная поляра (1.11) — кривая третьего порядка —

в отличие от ударной поляры адиабатического потока не имеет асимптот. Звуковой круг вырождается в прямую, совпадающую с осью  $OV$  в плоскости  $V, U$ .

Для определения околосвукового потока около тонкого профиля надо найти решение уравнения (0.1) при дополнительных условиях, наложенных на значения  $V$  и  $U$  на контуре тела, в критической точке, в бесконечности и на линиях сильного разрыва.

Пусть уравнение обтекаемого контура взято в виде

$$y = \tau f(x)$$



Фиг. 2

где  $\tau$  — относительная толщина профиля, которая считается малой, а  $f(x)$  — функция порядка единицы.

Условие обтекания в физической плоскости имеет вид:

$$v[x, \tau f(x)] - u[x, \tau f(x)] \tau f'(x) = 0$$

Для упрощения этого условия представим  $u$  и  $v$  по формулам (1.9), а затем разложим  $U$  и  $V$  в ряд Маклорена по степеням  $f(x)$ :

$$u[x, \tau f(x)] = 1 - \frac{U(x, 0)}{x+1} \varepsilon + \varepsilon f(x) \frac{\partial U(x, 0)}{\partial y} \frac{\tau}{x+1} \dots \quad (1.13)$$

$$v[x, \tau f(x)] = \varepsilon^{1/2} \left[ \frac{V(x, 0)}{x+1} + \tau f(x) \frac{\partial V(x, 0)}{\partial y} + \dots \right] \quad (1.14)$$

Рассматривая обтекание тонких тел, принимаем

$$\varepsilon^{1/2} = (\kappa + 1) \tau \quad (1.15)$$

Переходя в выражениях (1.13), (1.14) к переменным по формулам (1.9) и учитывая соотношение (1.15), получим условие обтекания, выполняющееся с точностью  $\varepsilon^2$ , в следующем виде:

$$V(X, 0) = f'(l_* X) \quad (1.16)$$

В критической точке, где  $u^2 + v^2 = 0$ , имеем условие

$$U = \frac{\kappa + 1}{\varepsilon} + 0(\varepsilon) \quad (1.17)$$

Условие в бесконечности  $v \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \infty$  для околосзвукового потока заменяется условием

$$V \rightarrow 0, \quad U \rightarrow \Lambda \quad (1.18)$$

где значение  $\Lambda$  считается заданным.

Из первого соотношения (1.9) находим

$$\varepsilon = \frac{\kappa + 1}{\Lambda} \left( 1 - \frac{u_\infty}{a_*} \right) = \frac{2(1 - M_\infty)}{\Lambda} \quad (1.19)$$

Введенная связь (1.15) позволяет выяснить порядок малости величины  $\varepsilon$  и найти значение  $\Lambda$  в условии (1.18) через исходные данные задачи. Именно, исключая  $\varepsilon$  из (1.19) и (1.15), находим

$$\Lambda = \frac{2(1 - M_\infty)}{[(\kappa + 1) \tau]^{1/2}} \quad (1.20)$$

Каждому решению системы (1.8) при условиях (1.16)–(1.18) и фиксированных  $f(l_* X)$  и  $\Lambda$  соответствует целое семейство околосзвуковых движений, определяемых значениями  $\tau$  или  $M_\infty$ .

Получим выражения для коэффициентов давления  $\bar{p}$ , лобового сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$  в условиях рассматриваемого приближения. Если использовать соотношения (1.9) и (1.15), то коэффициент давления запишется

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{(\rho_\infty u_\infty^2)/2} = \frac{4(U - \Lambda)}{(\kappa + 1)\Lambda} (1 - M_\infty) [1 + 2(1 - M_\infty) + \dots] \quad (1.21)$$

Коэффициент сопротивления профиля найдем, если проинтегрируем горизонтальную составляющую коэффициента давления по контуру профиля; имеем

$$C_x = \frac{Q}{^{1/2}\rho_\infty u_\infty^2 b} \frac{2l_* \tau^{1/2}}{b(\kappa + 1)^{1/2}} \int_l (U - \Lambda) V dX \quad (1.22)$$

Здесь  $b$  — хорда профиля

$$Q = \int_l p \sin \varphi ds$$

при этом  $p$  — давление в данной точке профиля,  $\varphi$  — местный угол наклона профиля,  $ds$  — элемент дуги профиля.

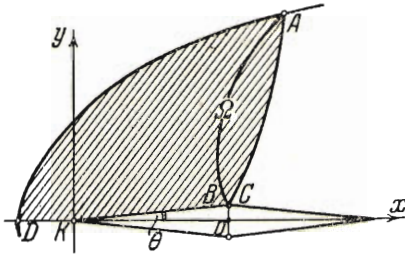
Аналогично коэффициент подъемной силы  $C_y$  найдется, если проинтегрировать по контуру вертикальную составляющую давления:

$$C_y = \frac{2l_* \tau^{1/2}}{b(x+1)^{1/2}} \int (U - \Lambda) V dX$$

§ 2. Околовзвукое обтекание клина. Рассмотрим задачу симметричного обтекания клина потоком газа при  $M_\infty > 1$ .

В этом случае поток около клина найдется в результате решения некоторой граничной задачи в плоскости  $VU$  для уравнения (0.1).

Картина движения на плоскости  $xu$  и на плоскости  $VU$  показана на фиг. 3 и 4, причем соответственные точки обозначены одинаковыми буквами.



Фиг. 3

Решение уравнения (0.1) следует искать в области  $KBCADK'$  по условиям:

- (1)  $Y = 0$  вдоль  $BK$  и  $DK'$ ;
- (2)  $Y = 0$  вдоль характеристики  $BC$  с уравнением

$$(V - 1)^2 + \frac{4}{9} U^3 = 0$$

- (3)  $Y = Y_A > 0$  в точке  $A$ ,
- (4) вдоль кривой третьего порядка

$$2V^2 + (U - \Lambda)^2 (U + \Lambda) = 0 \quad (2.1)$$

выполняется соотношение

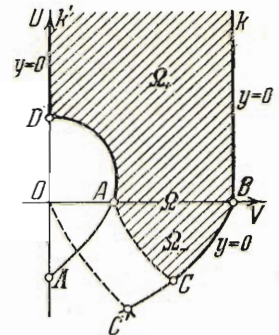
$$\sqrt{2} (5U + 3\Lambda) \frac{\partial Y}{\partial U} + \sqrt{-\Lambda - U} (7U + \Lambda) \frac{\partial Y}{\partial V} = 0$$

При этом значение  $\Lambda$  определяется по (1.20), где следует взять

$$\tau = \operatorname{tg} \theta \approx \theta$$

Выведем соотношение (2.1). На кривой третьего порядка должно быть выполнено такое условие, которое обеспечило бы непрерывное изменение функции тока при переходе через линию сильного разрыва. Вывод аналогичного условия в иной постановке задачи обтекания клина, когда головная линия сильного разрыва не касается клина и между этой линией и клином образуется область местных дозвуковых скоростей, был дан в работе [4]. Если  $X = \Phi(Y)$  — уравнение линии сильного разрыва, то для любой функции  $f(X, Y)$ , заданной в окрестности линии сильного разрыва, имеем

$$\frac{df}{dY} = \frac{\partial f}{\partial Y} + \Phi' \frac{\partial f}{\partial X}$$



Фиг. 4

Применяя это соотношение к  $U$  и  $V$  и обозначая

$$U' = \frac{dU}{dY}, \quad V' = \frac{dV}{dY}, \quad \frac{\partial U}{\partial X} = U_X \quad \text{и т. д.}$$

получим

$$\Phi' U_X + U_Y = U', \quad \Phi' V_X + V_Y = V'$$

Частные производные от  $U$  и  $V$  по  $X$  и  $Y$  в точках линии сильного разрыва найдутся из системы уравнений

$$\begin{aligned} V_X - U_Y &= 0, & \Phi' U_X + U_Y &= U' \\ V_Y - U U_X &= 0, & \Phi' V_X + V_Y &= V' \end{aligned} \quad (2.2)$$

Определитель этой системы  $\Delta$  равен

$$\Delta = -(U + \Phi'^2), \quad \Delta = \frac{1}{2}(U_1 - U) \neq 0$$

При этом использовано уравнение (1.12). Решая систему (2.2), найдем

$$V_X = 2 \frac{(7U + U_1) V^{-1/2} (U + U_1)}{U - U_1} \Phi'', \quad V_Y = 2U \frac{5U + 3U_1}{U - U_1} \Phi''$$

$$U_X = 2 \frac{5U + 3U_1}{U - U_1} \Phi'', \quad U_Y = -2 \frac{(7U + U_1) V^{-1/2} (U + U_1)}{U - U_1} \Phi''$$

Для производных имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial U} &= \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial (X, Y)}{\partial (V, U)} = - \frac{(7U + U_1) V^{-1/2} (U + U_1)}{(U - U_1)^2 \Phi''} \\ \frac{\partial Y}{\partial V} &= - \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial (X, Y)}{\partial (V, U)} = - \frac{5U + 3U_1}{(U - U_1)^2 \Phi''} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Исключая из (2.3)  $\Phi''$ , получим однородно-линейное соотношение (2.1).

Данная постановка задачи соответствует постановке, указанной в работе [4]. Здесь решение зависит только от значения критерия подобия  $\Lambda$ . Это позволяет сделать некоторые качественные выводы.

Например, момент присоединения ударной волны  $DA$  к острию клина определяется таким значением  $\Lambda = \Lambda_1$ , при котором кривая (1.11) касается прямой  $V = 1$ . Вычисление дает

$$\Lambda_1 \approx -1.19$$

При меньших  $\Lambda$  поток между ударной волной и клином в некоторых пределах остается дозвуковым. Момент перехода в чисто сверхзвуковой режим обтекания определяется из условия прохождения кривой (1.11) через точку (1.0), что дает  $\Lambda_2 \approx -1.26$ .

**§ 3. Метод численного решения задачи обтекания клина.** Общий прием решения смешанных граничных задач для уравнения (0.1) может быть изложен кратко так: составляем два соотношения между решением  $\tau(V) = Y(V, 0)$  на оси  $V$ , производной  $\nu(V) = (\partial Y / \partial U)_{U=0}$  и заданными граничными условиями, из которых определяем  $\tau(V)$  и  $\nu(V)$  через граничные условия. Когда же функция  $\tau(V)$  известна, то принципиально можно вычислить  $Y(V, U)$  в любой точке смешанной области  $\Omega$  (фиг. 4).

Действительно, для этого достаточно было бы воспользоваться известным решением граничной задачи в эллиптической области  $\Omega_+$  по данным на контуре этой области и известным решением краевой задачи в гиперболической области  $\Omega_-$  по данным на одной из характеристик и значению решения на переходной линии  $AB$ .

Одно из этих соотношений между  $\tau(V)$  и  $\nu(V)$  получается из решения задачи Коши в характеристическом треугольнике  $ABC$  фиг. 4 с данными на переходной линии  $AB$ . Это решение имеет следующий вид [5]:

$$Y(V, U) = \gamma_1 \int_0^1 \tau \left[ V + \frac{2}{3} (-U)^{3/2} (2t-1) \right] t^{-5/2} (1-t)^{-5/2} dt + \\ + \left( \frac{4}{3} \right)^{3/2} \gamma_2 U \int_0^1 \nu \left[ V + \frac{2}{3} (-U)^{3/2} (2t-1) \right] t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} dt \quad (3.1)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(1/6)}, \quad \gamma_2 = \left( \frac{3}{4} \right)^{3/2} \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(5/6)}$$

Применяя формулу (3.1) к точкам, лежащим на характеристике  $BC$ , где решение задано и равно  $\varphi(V)$ , получим соотношение между  $\tau(V)$  и  $\nu(V)$ . Это соотношение после замены переменных по формулам

$$V = 1 + V^1, \quad U = U^1, \quad t = 1 - t^1$$

имеет следующий вид:

$$\varphi(V^1) = \gamma_1 V^1{}^{3/2} \int_0^{V^1} \tau(U+1) U^{-5/2} (V^1-U)^{-5/2} dU - \\ - \gamma_2 \int_0^{V^1} \nu(U+1) U^{-1/2} (V^1-U)^{-1/2} dU$$

Решение этого уравнения представим в виде

$$\tau(V^1+1) = \tau_0(V^1+1) + \psi(V^1+1)$$

где  $\tau_0(V^1+1)$  и  $\psi(V^1+1)$  — соответственно решения уравнений

$$\gamma_1 V^1{}^{3/2} \int_0^{V^1} \tau_0(U+1) U^{-5/2} (V^1-U)^{-5/2} dU = \\ = \gamma_2 \int_0^{V^1} \nu(U+1) U^{-1/2} (V^1-U)^{-1/2} dU \\ \int_0^{V^1} \psi(U+1) U^{-5/2} (V^1-U)^{-5/2} dU = \frac{1}{\gamma_1} V^1{}^{-3/2} \varphi(V^1)$$

Эти уравнения Вольтерра первого рода непосредственно обращаются по формуле Абеля. Переходя к старым переменным, получим следующее соотношение между  $\tau(V)$  и  $\nu(V)$ :

$$\tau(V) = \psi(V) + \gamma \int_V^1 \frac{\nu(U) dV}{(U-V)^{3/2}} \quad (3.2)$$



где

$$\psi(V) = -\frac{(1-V)^{1/2}}{2\pi\gamma_1} \frac{d}{dV} \int_V^1 \frac{\varphi(U) dU}{(1-U)^{1/2}(U-V)^{1/2}} \quad (3.3)$$

$$\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{3}{2})}$$

Формула (3.2) дает решение граничной задачи для уравнения (0.1) в гиперболической части области  $\Omega$  — по данным значениям этого решения на характеристике

$$V + \frac{2}{3}(-U)^{3/2} = 1$$

и значениям его производной по  $U$  при  $U = 0$ . Найдя по этой формуле  $\tau(V)$ , по формуле (3.1) находим решение во всей области  $\Omega_-$ .

Вместо того, чтобы выводить второе соотношение (из  $\Omega_+$ ), которое должно иметь в рассматриваемой задаче весьма сложный вид, мы используем прием разложения искомого решения в ряд частных решений уравнения (0.1). Линейными комбинациями частных решений приближенно удастся удовлетворить всем граничным условиям.

Решение задачи ищем в виде

$$Y(V, U) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \lambda(\pi^{1/2} n^{1/2} U) \sin \pi n V \quad (3.4)$$

где  $\lambda(\pi^{1/2} n^{1/2} U) \sin \pi n V$  — частное решение уравнения (0.1), причем функция  $\lambda(\pi^{1/2} n^{1/2} U)$  определена уравнениями

$$\lambda''(\pi^{1/2} n^{1/2} U) - \pi^{1/2} n^{1/2} U \lambda(\pi^{1/2} n^{1/2} U) = 0, \\ \lambda(0) = 1, \quad \lambda(+\infty) = 0 \quad (3.5)$$

Произвольные коэффициенты  $C_n$  выбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия на характеристике  $BC$  и на кривой третьего порядка  $AD$ .

Сначала ищем решение уравнения (0.1) для области  $K'OC'BK$  при следующих граничных условиях:

$$Y = 0 \text{ на } KB \text{ и } OK'; \quad Y = 0 \text{ на } BC; \quad Y = \varphi(V) \text{ на } CC'$$

Пусть в результате решения этой задачи мы выразили  $\tau(V) = Y(V, 0)$  через функцию  $\varphi(V)$ :

$$\tau(V) = L[\varphi(V)]$$

где  $L[\varphi(V)]$  — известный оператор.

Тогда  $C_n$  найдутся как коэффициенты ряда Фурье и решение (3.4) примет вид:

$$Y(V, U) = 2 \int_0^1 L[\varphi(V)] \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\pi^{1/2} n^{1/2} U) \sin \pi n \xi \sin \pi n V d\xi$$

Выбираем  $\varphi(V)$  так, чтобы выполнялось однородно-линейное соотношение (2.1), т. е., полагая

$$M(\xi, V, U) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\pi^{1/2} n^{1/2} U) \sin \pi n \xi \sin \pi n V$$

находим, что должно тождественно по  $U$  выполняться соотношение

$$\int_0^1 [(5U + 3\Lambda) M_V(\xi, V, U) + \sqrt{-\frac{\Lambda + U}{2}} (2U + \Lambda) [M_U(\xi, V, U)] L[\varphi(V)] d\xi = 0 \quad (3.6)$$

Таким образом, будут удовлетворены все граничные условия.

Выполняя эту идею, замечаем, что для граничной задачи, изображенной на фиг. 4, уравнение (3.3) запишется

$$\psi(V) = 0, \quad \text{если } V > \alpha$$

$$\psi(V) = -\frac{(1-V)^{1/2}}{2\pi\gamma_1} \frac{d}{dV} \int_V^{\alpha} \frac{\varphi(U) dV}{(1-U)^{1/2} (U-V)^{1/2}}, \quad \text{если } V < \alpha$$

так как  $\varphi(V) = 0$ , если  $V > \alpha$  и  $\varphi(V) = \varphi(V)$ , если  $V < \alpha$ . Согласно (3.2)

$$\tau(V) = \gamma \int_V^1 \frac{\nu(U) dU}{(U-V)^{1/2}} \quad \text{при } V > \alpha \quad (3.7)$$

$$\tau(V) = \gamma \int_V^1 \frac{\nu(U) dU}{(U-V)^{1/2}} - \frac{(1-V)^{1/2}}{2\pi\gamma_1} \frac{d}{dV} \int_V^1 \frac{\varphi(U) dU}{(1-U)^{1/2} (U-V)^{1/2}} \quad \text{при } V < \alpha$$

На отрезке  $0 < V < \alpha$  будем аппроксимировать функцию  $\psi(V)$  линейной комбинацией функций  $l_k(V)$ , построенных следующим образом:

$$l_k(V) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < V < \frac{k}{m} \alpha \\ 1, & \text{если } \frac{k}{m} \alpha < V < \frac{k+1}{m} \alpha \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ 0, & \text{если } \frac{k+1}{m} \alpha < V < 1 \end{cases}$$

т. е.

$$\psi(V) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k l_k(V) \quad (3.8)$$

Коэффициенты в (3.4) определяются, если воспользоваться уравнением (3.2). Входящие в уравнение (3.2) функции  $\tau(V)$  и  $\nu(V)$  получаются из (3.4) на основании (3.5) в виде

$$\tau(V) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sin \pi p V \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.9)$$

$$\nu(V) = \lambda'(0) \sum_{p=1}^{\infty} a_p (\pi p)^{1/2} \sin \pi p V. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.9) и (3.10) в (3.2), получим

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p \left[ \sin \pi p V - \gamma \lambda'(0) (\pi p)^{1/2} \int_V^1 \frac{\sin \pi p U dU}{(U-V)^{1/2}} \right] = \psi(V) \quad (3.11)$$

Обозначая функцию в квадратных скобках через  $f_i(V)$  и замечая, что

$$\gamma \lambda'(0) = - \frac{1}{\Gamma^{2/3}}$$

найдем эту функцию в виде

$$f_i(V) = \omega(\pi_i V), \quad \omega(V) = \sin V + \frac{1}{(\Gamma^{2/3})} \int_V^1 \frac{\sin U dU}{(V-U)^{2/3}}, \quad (i=1, 2, \dots)$$

В принятых обозначениях уравнение (3.14) запишется

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p f_i(V) = \psi(V)$$

Решая эту систему, найдем  $a_p$ .

В работе Л. В. Овсянникова [6] доказано, что система функций  $\{f_i(V)\}$  является линейно независимой и полной в классе функций с интегрируемым квадратом. Однако функции  $f_i(V)$  попарно не ортогональны, поэтому будем искать коэффициенты  $a_p$  из условия аппроксимации в среднем функции  $\psi(V)$  линейной комбинацией

$$\bar{\psi}(V) = \sum_{p=1}^n a_p f_{ip}$$

т. е. из условия

$$\int_0^1 [\bar{\psi}(V) - \psi(V)]^2 dV = \min$$

Если обозначить

$$j_{ik}(\alpha) = \int_{k\alpha/m}^{(k+1)\alpha/m} f_i(V) dV, \quad f_{ip} = \int_0^1 f_i(V) f_p(V) dV$$

то предыдущее условие приводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{p=1}^n f_{ip} a_p = \sum_{k=0}^{m-1} b_k j_{ik}(\alpha)$$

Отсюда

$$a_p = \sum_{k=0}^{m-1} b_k t_{kp}(\alpha)$$

где  $t_{kp}(\alpha)$  определяются из системы уравнений

$$\sum_{p=1}^n f_{ip} t_{kp}(\alpha) = j_{ik}(\alpha)$$

Подставляя найденные коэффициенты  $a_p$  в уравнения (3.9), (3.10), найдем выражение для  $\tau(V)$  и  $\nu(V)$  через функцию  $\psi(V)$ , заданную числами  $b_k$ , следующим образом:

$$\tau(V) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k \alpha_k(V)$$

где

$$\alpha_k(V) = \sum_{p=1}^n t_{kp}(\alpha) \sin \pi p V \quad (3.12)$$

где

$$\nu(V) = \lambda'(0) \sum_{k=0}^{m-1} b_k \beta_k(V)$$

$$\beta_k(V) = \sum_{p=1}^n t_{kp}(\alpha) (\pi p)^{1/2} \sin \pi p V$$

Числа  $b_k$  определяются из (3.6). Используя уравнения кривой третьего порядка, граничное условие (3.6) можно записать

$$\int_0^1 \left\{ (5U + 3\Lambda) M_Y [\xi, V(U), U] + \sqrt{-\frac{\Lambda + U}{2}} (7U + \Lambda) M_U [\xi, V(U), U] \right\} \sum_{k=1}^{m-1} b_k \alpha_k(\xi) d\xi \equiv 0$$

где  $\alpha_k(\xi)$  определяется по формуле (3.12).

Если выражение в квадратных скобках обозначить через  $T(\xi, U)$ , то для определения  $b_k$  имеем следующую систему однородных алгебраических уравнений, в которых число неизвестных на единицу больше числа уравнений:

$$\sum_{k=0}^{m-1} b_k R_k(U_i) = 0, \quad R_k(U_i) = \int_0^1 T(\xi, U_i) \alpha_k(\xi) d\xi \quad (i = 1, \dots, m-1) \quad (3.13)$$

Система уравнений (3.13) может быть решена с точностью до заданного постоянного множителя. Этот множитель определяется единственным образом, если использовать связь плоскости «годографа» с плоскостью потока.

Действительно, решение задачи получается в виде

$$Y(V, U) = b_0 \sum_{p=1}^n \bar{a}_p \lambda(\pi^{1/2} p^{1/2} U) \sin \pi p V \quad \left( \bar{a}_p = \frac{a_p}{b_0} \right) \quad (3.14)$$

Из системы уравнений (1.8) имеем

$$\frac{\partial X}{\partial V} = -b_0 \pi^{1/2} \sum_{p=1}^n p^{1/2} \bar{a}_p \lambda'(\pi^{1/2} p^{1/2} U) \sin \pi p V$$

$$\frac{\partial X}{\partial U} = b_0 \pi U \sum_{p=1}^n p \bar{a}_p \lambda(\pi^{1/2} p^{1/2} U) \cos \pi p V$$

Отсюда

$$X = \frac{b_0}{\pi^{1/2}} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^{1/2}} \bar{a}_p \lambda' (\pi^{1/2} p^{1/2} U) \cos \pi p U + C(U) \quad (3.15)$$

Дифференцируя уравнение (3.15) по  $U$  и используя условие (3.5), находим, что  $C(U) = 0$ . Если принять расстояние  $KB$  в плоскости  $U, V$  за единицу и составить разность  $X_B - X_K$ , при этом необходимо учесть, что функция Эйри и ее производная от бесконечного аргумента равна нулю, то величина  $b_0$  определится по формуле

$$b_0 = \frac{\pi^{1/2}}{\lambda'_{(0)}} \left( \sum_{p=1}^n (-1)^p \frac{\bar{a}_p}{p^{1/2}} \right)^{-1}$$

Полученное решение (3.14) позволяет найти: уравнение линии сильного разрыва

$$x = \frac{b_0 l_*}{\pi^{1/2}} \sum_{p=1}^n \frac{\bar{a}_p}{p^{1/2}} \lambda' (\pi^{1/2} p^{1/2} U) \cos \pi p \left[ (U - \Lambda) \left( -\frac{U + \Lambda}{2} \right)^{1/2} \right]$$

$$y = \frac{b_0 l_* \theta^{-3}}{(x+1)^3} \sum_{p=1}^n \bar{a}_p \lambda (\pi^{1/2} p^{1/2} U) \sin \pi p \left[ (U - \Lambda) \left( -\frac{U + \Lambda}{2} \right)^{1/2} \right]$$

расстояние линии сильного разрыва от носика профиля

$$x = \frac{l_* b_0}{\pi^{1/2}} \sum_{p=1}^n \frac{\bar{a}_p}{p^{1/2}} \lambda' (\pi^{1/2} p^{1/2} U) \cos \pi p V$$

уравнение звуковой линии

$$x = \frac{l_* b_0}{\pi^{1/2}} \lambda'_{(0)} \sum_{p=1}^n \frac{\bar{a}_p}{p^{1/2}} \cos \pi p V$$

$$y = \frac{l_* l_0 \theta^{-3}}{(x+1)^3} \sum_{p=1}^n \bar{a}_p \sin \pi p V$$

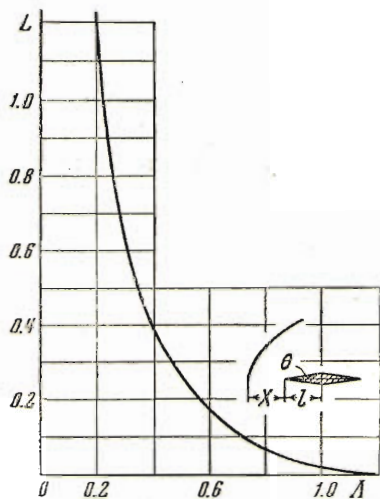
распределения давления по переднему скату профиля.

Коэффициент давления в данной точке у переднего ската  $KB$  вычисляется по формуле (1.21), в которой величину  $U$  находим из соотношения

$$x = l_* \frac{b_0}{\pi^{1/2}} \sum_{p=1}^n \frac{\bar{a}_p}{p^{1/2}} \lambda' (\pi^{1/2} p^{1/2} U) \cos \pi p$$

Задаваясь различными значениями  $U$  по этой формуле, определим  $x$ . Из графика  $U = U(x)$  найдем  $U$  для заданных  $x$ . Затем по формуле (1.21) определяем коэффициент давления.

Получение явной зависимости решения от критерия околзвукowego подобия приводит к большим трудностям, поэтому мы в интервале значений



Фиг. 5

$|\Lambda|$  от 0 до 1,19, в котором линия сильного разрыва не касается профиля, брали ряд точек (семь) и проводили численный расчет для каждого  $\Lambda$ . Принимались следующие значения:  $|\Lambda| = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 1.15$ .

Число функций, при помощи которых аппроксимировали функцию  $\psi(V)$ , принимали равным четырем. Кусок кривой третьего порядка  $AB$  (фиг. 4) разбивали на девять интервалов.

В результате расчета был построен график (фиг. 5) зависимости расстояния  $L = -x/l$  линии сильного разрыва до носика профиля от критерия околзвукowego подобия  $\Lambda$ .

Работа была выполнена под руководством Л. В. Овсянникова, которому выражаю глубокую благодарность за ряд ценных советов и указаний.

Поступила 8 II 1954.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Овсянников. Уравнения околзвукowego движения газа. Вестник ЛГУ, № 6, 1952.
2. С. В. Фалькович. Плоское движение газа при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, т. XI, вып. 4, 1947.
3. Т. Карман. Закон подобия для трансзвукового потока. Газовая динамика, 1950.
4. Ф. И. Франкль. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. Известия АН СССР, серия математическая, т. IX, № 2, 1945.
5. Ф. Трикоми. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. ГИТТЛ, 1947.
6. Л. В. Овсянников. О задаче Трикоми в одном классе обобщенных решений уравнения Эйлера-Дарбу. ДАН СССР, т. XCI, 3, 1953.
7. К. И. Бабенко. К теории уравнений смешанного типа. Докторская диссертация. М., 1951.