Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

# ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**В. А. Якубович**

(Ленинград)

**1.** Систему линейных дифференциальных уравнений будем записывать в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{1.1}$$

Здесь $x$ — вектор, $A(t) = A(t+\omega)$ — матрица порядка $n$, все элементы которой — периодические функции периода $\omega$, $A(t+\omega) = A(t)$. Компоненты вектора $x$ и элементы матрицы $A(t)$ принимают, вообще говоря, комплексные значения.

Скалярное произведение векторов $x$ и $y$ будем обозначать символом

$$(x, y) = x_1 y_1^* + \cdots + x_n y_n^*$$

Звездочка у буквы здесь и в дальнейшем означает для чисел комлексно-сопряженное число, для матриц — транспонированную и комплексно-сопряженную матрицу.

Цель настоящей статьи — получение ряда грубых, но эффективных оценок характеристических показателей системы (1.1).

Пусть $G(t)$ — произвольная самосопряженная ($G^*(t) = G(t)$) периодическая, дифференцируемая и положительно определенная матрица. Последнее означает, что квадратичная форма $\xi = (G(t)\,a, a) > 0$ для любого вектора $a$ и любого $t$.

*Замечание.* Если $G(t) = \| g_{ij}(t) \|$, то выше перечисленные условия будут означать, что $g_{ij}(t+\omega) = g_{ij}(t)$ — дифференцируемые функции $g_{ij}(t)^* = g_{ji}(t)$ и если обозначить через $\Delta_i(t)$ последовательные главные миноры матрицы $G(t)$, то $\Delta_i(t) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Если $F(t)$ — дифференцируемая периодическая матрица, то функция $G(t) = F(t)^* F(t)$ удовлетворяет всем перечисленным условиям. Соотношение $G = (U\sqrt{G})^*(U\sqrt{G})$, где $U$ — любая унитарная матрица, показывает, что произвольная матрица $G(t)$, удовлетворяющая перечисленным условиям, представима бесчисленным множеством способов в виде $G = F^*F$.

Если $\lambda$ — один из характеристических показателей системы (1.1), то система (1.1) имеет решение $x = e^{\lambda t} u(t)$, где $u(t)$ — периодический вектор, $u(t+\omega) = u(t)$. Для этого решения $x$

$$\xi = (Gx, x) = e^{(\lambda+\lambda^*)\,t}(Gu, u) = e^{2t\,\mathrm{Re}\,\lambda}(Gu, u)$$

$$\ln \xi = 2t\,\mathrm{Re}\,\lambda + \ln(Gu, u) \tag{1.2}$$

Очевидно, найдутся числа $M > m > 0$ такие, что $M \geqslant (Gu, u) \geqslant m > 0$ для всех $t$. Поэтому из (1.2) следует[1]

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\xi}{t} \tag{1.3}$$

Из этого соотношения легко получить оценки для $\operatorname{Re}\lambda$. Действительно, для выбранного решения $x$ в силу (1.1)

$$\dot{\xi} = (\dot{G}x, x) + (GAx, x) + (Gx, Ax) = (Qx, x)$$

где

$$Q = \dot{G} + GA + A^*G \tag{1.4}$$

Обозначим $q_1(t)$ и $q_2(t)$ наименьший и наибольший корень уравнения

$$\operatorname{Det}(Q - qG) = 0 \tag{1.5}$$

($q_1(t)$ и $q_2(t)$ — действительные периодические функции). Тогда, как известно,

$$q_1(t) \leqslant \frac{\dot{\xi}}{\xi} \leqslant q_2(t) \tag{1.6}$$

и, следовательно,

$$\int_0^t q_1(t)\,dt \leqslant \ln\xi - \ln\xi_0 \leqslant \int_0^t q_2(t)\,dt$$

Из этих неравенств и соотношения (1.3) следует

$$\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q_1(t)\,dt \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q_2(t)\,dt \tag{1.7}$$

Таким образом, если $G(t)$ — произвольная матрица, удовлетворяющая сформулированным выше условиям, а функции $q_1(t)$, $q_2(t)$ определяются по матрице $G(t)$ так, как указано выше, то для характеристических показателей $\lambda$ системы (1.1) справедлива оценка (1.7)[2].

Очевидно, что оценка (1.7) остается в силе, если брать функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$, порождаемые разными матрицами $G(t)$.

Следующая теорема показывает, что подходящим выбором матрицы $G(t)$ оценка (1.7) может быть сделана сколь угодно точной.

*Теорема 1. 1.* Пусть $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — характеристические показатели системы (1.1) соответственно с минимальной и максимальной действительной частью. Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется матрица $G(t)$, удовлетворяющая сфомулированным выше условиям, такая, что

$$\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q_1\,dt \leqslant \operatorname{Re}\lambda_1 < \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q_1\,dt + \varepsilon, \qquad \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q_2\,dt - \varepsilon < \operatorname{Re}\lambda_2 \leqslant \frac{1}{2\omega}\int_0^\infty q_2\,dt$$

[1] Числа $(-\operatorname{Re}\lambda)$ являются, очевидно, характеристичными числами Ляпунова системы уравнений (1.1).

[2] Знаки равенства в (1.6) достигаются на векторах $x_1$, $x_2$, для которых $Qx_i \equiv q_i Gx_i$. При этом $x_1$ и $x_2$ должны быть решениями уравнения (1.1). Если это не выполнено (что обычно имеет место), то в (1.7) знаки $\leqslant$ можно заменить на $<$.

Если матрица $A(t)$ вещественна, то матрицу $G(t)$ можно выбрать также вещественной.

*Доказательство.* Проделаем в системе (1.1) замену

$$x = P(t)y, \qquad \operatorname{Det} P(t) \neq 0, \qquad P(t+\omega) = P(t) \tag{1.8}$$

Получим систему с матрицей

$$A_1(t) = P^{-1}AP - P^{-1}\dot{P}$$

Указанное преобразование, очевидно, не меняет характеристических показателей. Поэтому, применяя к преобразованной системе оценку (1.7), мы получим оценку характеристических показателей для первоначальной системы. Однако изменением матрицы $G(t)$ в оценке (1.7) можно прийти к тому же результату. Действительно, непосредственными выкладками легко проверить, что уравнение (1.5) для системы с матрицей $A(t)$ совпадает с уравнением (1.5) для системы с матрицей $A_1(t)$, если в последнем случае вместо $G(t)$ взять

$$G_1(t) = P^* GP \tag{1.9}$$

При этом равенство $G = G^*$ равносильно $G_1 = G_1{}^*$, а произведение $(G_1a, a) = (Gb, b)$, где $b = Pa$. Поэтому сформулированные выше условия для матриц $G_1(t)$ и $G(t)$ выполняются или не выполняются одновременно.

Так как по теореме Ляпунова любую систему (1.1) заменой (1.8) можно привести к системе с постоянными коэффициентами (см. также [1]), то достаточно доказать теорему для системы с постоянными коэффициентами.

Пусть $A_1(t) \equiv K$ и

$$\frac{dy}{dt} = Ky \tag{1.10}$$

соответствующая система. Предположим вначале, что $K$ приводится к виду

$$K = S^{-1} \left\| \begin{array}{c|ccc|c} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & \cdot \\ \vdots & & K_1 & & \vdots \\ \cdot & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_2 \end{array} \right\| S \tag{1.11}$$

Матрицу $G_1$ возьмем в виде

$$G_1 = S^*S \tag{1.12}$$

Очевидно, что эта матрица удовлетворяет всем нужным условиям.

Покажем, что в этом случае неравенства в (1.7) для $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ переходят в равенства, т. е. что

$$\operatorname{Re} \lambda_i = \frac{1}{2\omega} \int_0^\omega q_i(t)\,dt \qquad (i = 1, 2) \tag{1.13}$$

Для этого достаточно показать, что неравенства (1.6) переходят в равенства. Равенство $\dot{\xi}/\xi = q_1$ достигается на векторе $y(t)$, который является решением уравнения (1.10) и для которого $[Q_1(t) - q_1(t)G_1(t)]\,y(t) \equiv 0$.

В рассматриваемом случае это условие имеет вид:

$$(G_1K + K^*G_1)\, y(t) = q_1(t)\, G_1 y(t) \tag{1.14}$$

Пусть $y_0$ — собственный вектор матрицы $K$, отвечающий собственному значению $\lambda_1$, так что $Ky_0 = \lambda_1 y_0$. Тогда $y(t) = e^{\lambda_1 t} y_0$ — решение уравнения (1.10). Из (1.11) и (1.12) следует, что $G_1 y_0$ — собственный вектор матрицы $K^*$, т. е. $K^*G_1y_0 = \lambda_1^* G_1 y_0$. Отсюда следует, что (1.14) выполняется для вектора $y(t) = e^{\lambda_1 t} y_0$ и $q_1(t) = 2\mathrm{Re}\,\lambda_1$. Таким образом, (1.13) выполняется для $i = 1$. Для $i = 2$ доказательство дословно такое же.

Пусть теперь (1.11) несправедливо. Сколь угодно мало изменяя матрицу $K$, можно добиться, чтобы (1.11) выполнялось (можно даже добиться, чтобы $K$ приводилась к диагональному виду). При этом $\lambda_1$ и $\lambda_2$ изменятся сколь угодно мало. Для измененной системы будет справедливо (1.13). Отсюда и из неравенств (1.7) следует утверждение теоремы для комплексной матрицы $A(t)$.

Нам осталось доказать, что в случае, если матрица $A(t)$ действительна, матрицу $G(t)$ можно также выбрать действительной. Как известно, в этом случае систему (1.1) заменой $x = P(t)\,y$, $\mathrm{Det}\, P(t) \neq 0$ с вещественной матрицей $\boldsymbol{P}(t)$ можно привести к системе (1.10) с вещественной матрицей $K$. Матрица $P(t)$ будет при этом, вообще говоря, периодической периода $2\omega$ (см., например, [2] стр. 209—213). Поэтому нам достаточно доказать, что матрицу $G_1$ для системы (1.10) можно взять вещественной. Если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ вещественны, то матрицу $S$ в (1.11) можно выбрать вещественной и доказательство проходит без изменения. Предположим, что $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ комплексно, ($\beta \neq 0$), $\lambda_2$ вещественно. Тогда вместо (1.11) будем иметь

$$K = S^{-1} \left\| \begin{array}{cc|ccc|c} \alpha & \beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & 0 \\ \cdot & \cdot & & K_1 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_2 \end{array} \right\| S$$

где $S$ — вещественная матрица. Полагая снова $G_1 = S^*S$, получим, что справедливо (1.14) для $y(t) = e^{\lambda_1 t} y_0$ (при $Ky_0 = \lambda_1 y_0$) и $q_1(t) \equiv 2\mathrm{Re}\,\lambda_1$. В остальном доказательство проходит без изменения.

Точно так же проводится доказательство в случае, если $\lambda_1$ вещественно, а $\lambda_2$ комплексно или если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ комплексны.

Утверждение теоремы может быть записано в виде

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \sup \frac{1}{2\omega} \int_0^{\omega} q_1(t)\, dt, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda_2 = \inf \frac{1}{2\omega} \int_0^{\omega} q_2(t)\, dt$$

Верхняя и нижняя грани берутся по всевозможным матрицам $G(t)$, удовлетворяющим указанным условиям. Если $A(t)$ — действительная матрица, то и $G(t)$ можно брать действительной.

Для системы (1.1) второго порядка с действительными коэффициентами матрица $G(t)$ имеет вид:

$$G(t) = \begin{Vmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{Vmatrix}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — дифференцируемые периодические (периода $\omega$) функции, удовлетворяющие условиям

$$a(t) > 0, \qquad c(t) > 0, \qquad a(t)\,c(t) - b(t)^2 > 0$$

а в остальном произвольные. Обозначим

$$e^{2\delta} = \operatorname{Det} G = ac - b^2, \qquad \Delta = \operatorname{Det} Q \tag{1.15}$$

Уравнение (1.5) можно записать в виде [1]

$$\operatorname{Det}(QG^{-1} - qE) = 0$$

или в виде

$$q^2 - \operatorname{Sp}(QG^{-1})\,q + \operatorname{Det}(QG^{-1}) = 0$$

Находим

$$\operatorname{Sp}(QG^{-1}) = \operatorname{Sp}(\dot{G}G^{-1} + GAG^{-1} + A^*) = \operatorname{Sp}(\dot{G}G^{-1}) + 2\operatorname{Sp}A$$

По известной формуле

$$\operatorname{Sp}(\dot{G}G^{-1}) = 2\dot{\delta}$$

Таким образом, уравнение для $q$ принимает вид:

$$q^2 - 2(\dot{\delta} + \operatorname{Sp} A)\,q + e^{-2\delta}\Delta = 0$$

Из только что доказанной теоремы следует

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \frac{1}{2\omega}\int_0^{\omega} \operatorname{Sp} A\,dt \pm \inf \int_0^{\omega} \sqrt{(\dot{\delta} + \operatorname{Sp}A)^2 - e^{-2\delta}}\,\Delta\,dt \tag{1.16}$$

Нижняя грань берется по всем функциям $a$, $b$, $c$ указанного вида. Функции $\delta(t)$ и $\Delta(t)$ определяются по формулам (1.15) и (1.4). Взяв произвольные функции $a$, $b$, $c$ указанного вида из формулы (1.16), получим оценку чисел $\operatorname{Re}\lambda_1$ и $\operatorname{Re}\lambda_2$.

*Пример 1.* Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = \mu(-1 + 2\sin t)\,x_1 + \mu x_2, \qquad \dot{x}_2 = \mu x_1 - x_2 \qquad (\mu > 0) \tag{1.17}$$

которая приведена И. Г. Малкиным в книге [2] как пример в параграфе, посвященном методу малого параметра (§ 84, стр. 353). Применяя метод малого параметра, И. Г. Малкин показывает, что решения системы (1.17) асимптотически устойчивы, если выполнены неравенства

$$|\mu^2\psi_{sj}| < \frac{1}{2}\mu \tag{1.18}$$

При этом даны явные выражения для функций $\psi_{sj}$. Далее И. Г. Малкин говорит, что грубая оценка этих выражений показывает, что неравенства (1.18) выполнены при $\mu < 1/9$. Отметим, что из выражения, например, для $\psi_{12}(t)$ следует, что неравенство $|\mu^2\psi_{12}(0)| < 1/2\,\mu$ перестает выполняться при $\mu = 0.178$. Поэтому более точный анализ неравенств (1.18) не даст заметного улучшения оценки $\mu < 1/9 = 0.111\ldots$

---

[1] Здесь и в дальнейшем $E$ обозначает единичную матрицу.

Покажем, что решения системы (1.16) асимптотически устойчивы при $\mu < {}^2/_3 = 0{,}666\ldots$ . За матрицу $G$ берем единичную матрицу $G = E$. Тогда

$$Q = A + A^* = 2\begin{pmatrix} \omega\varphi & \mu \\ \mu & -1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = -1 + 2\sin t$$

$$\delta = 0, \qquad \Delta = -4(\mu\varphi + \mu^2)$$

Формула (1.16) дает

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \leqslant \frac{1}{2}\left[-1 - \mu + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{(1 + \mu\varphi)^2 + 4\mu^2}\,dt\right]$$

Для всякой функции $\psi \geqslant 0$

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \sqrt{\psi}\,dt \leqslant \left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \psi\,dt\right)^{1/2}$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \leqslant \frac{1}{2}\left(-1 - \mu + \sqrt{1 - 2\mu + 7\mu^2}\right)$$

Правая часть неравенства отрицательна при $\mu < {}^2/_3$. Следовательно, при $\mu < {}^2/_3$ решения системы (1.17) асимптотически устойчивы [1].

Отметим, что то же неравенство для $\mu$ получится, если использовать оценки, приведенные в работе [3].

**2.** Применим оценку (1.16) к уравнению

$$y'' + p(t)y = 0 \tag{2.1}$$

где $p(t)$ — действительная периодическая функция периода $\omega$. Характеристические показатели $\lambda_1$, $\lambda_2$ в этом случае, как известно, действительны или чисто мнимы и $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Пусть $\lambda = \operatorname{Re}\lambda_2 \geqslant 0$. Обе оценки (1.7) дают оценку сверху для $\lambda$. Пусть $x = \binom{y}{y'}$. Тогда

$$A(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{Vmatrix}$$

Возьмем матрицу $G(t)$ вида

$$G(t) = \begin{Vmatrix} c(t) & 0 \\ 0 & 1/c(t) \end{Vmatrix}, \qquad c(t + \omega) = c(t) > 0$$

Оценка (1.16) даст

$$\lambda \leqslant \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega \sqrt{\frac{c'^2}{c^2} + \left(c - \frac{p}{c}\right)^2}\,dt \tag{2.2}$$

В частности, если $c > 0$ — любая постоянная, то

$$\lambda \leqslant \frac{1}{2\omega c}\int_0^\omega |p(t) - c^2|\,dt \tag{2.3}$$

Отсюда легко получить следующую оценку:

$$\lambda \leqslant m \qquad \text{при} \qquad m^2 = -\frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(t)\,dt > 0, \qquad p(t) \leqslant m^2 \tag{2.4}$$

[1] Из изложенного следует также, что асимптотическая устойчивость имеет место и $\mu < {}^2/_3 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Для доказательства достаточно положить в (2.3) $c = m$. Оценка (2.4) применима лишь для отрицательных или знакопеременных функций $p(t)$.

Если $p(t) > 0$ — дифференцируемая функция, то можно принять в (2.2) $c(t) = \sqrt{p(t)}$. Пусть $t_1^+, \ldots, t_n^+$ — точки максимумов и $t_1^-, \ldots, t_n^-$ — точки минимумов функции $p(t)$ на полуоткрытом интервале $[t_0, t_0 + \omega]$. Предполагается, что $p(t)$ имеет конечное число максимумов и минимумов на периоде.

Из формулы (2.2) получим

$$\lambda \leqslant \frac{1}{2\omega} \ln \left[ \frac{p(t_1^+)\, p(t_2^+) \ldots p(t_n^+)}{p(t_1^-)\, p(t_2^-) \ldots p(t_n^-)} \right] \tag{2.5}$$

Неравенства (2.3), (2,4), (2.5) являются оценками характеристического показателя $\lambda$ уравнения (2.1).

*Пример 2.* Для уравнения (2.1) в случае

$$p(t) = \xi + \eta \cos 2t + \zeta \cos 4t \tag{2.6}$$

где $\xi, \eta, \zeta$ — постоянные, $\eta \geqslant 0$, $\zeta \geqslant 0$, требуется получить достаточные условия, гарантирующие выполнение оценки [1]

$$y(t) = O(e^{\lambda_0 t}), \quad \lambda_0 > 0 \tag{2.7}$$

Полагая в (2.3) $c^2 = \xi + \eta + \zeta$ (если $\xi + \eta + \zeta > 0$), получим первое достаточное условие:

$$(\eta + \zeta)^2 \leqslant 4\lambda_0^2 (\xi + \eta + \zeta) \tag{2.8}$$

Оценка (2.4) дает

$$0 < -\xi \leqslant \lambda_0^2, \qquad \eta + \zeta \leqslant -2\xi \tag{2.9}$$

При применении неравенства (2.5) надо различать случай $4\zeta \leqslant \eta$, когда $p(t)$ имеет один максимум и один минимум на периоде, и случай $4\zeta > \eta$, когда функция $p(t)$ имеет два максимума и два минимума на периоде. Оценка (2.5) дает

$$4\zeta \leqslant \eta, \quad \xi - \eta + \zeta > 0, \quad (\xi + \eta + \zeta) \leqslant e^{2\pi\lambda_0} (\xi - \eta + \zeta) \tag{2.10}$$

и

$$4\zeta > \eta, \quad \xi - \frac{\eta^2}{8\zeta} - \zeta > 0, \quad (\xi + \eta + \zeta)(\xi - \eta + \zeta) \leqslant e^{2\pi\lambda_0} \left( \xi - \frac{\eta^2}{8\zeta} - \zeta \right)^2 \tag{2.11}$$

Каждое из неравенств (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) является искомым достаточным условием.

---

[1] Для приложений важна следующая задача. В уравнении

$$x'' + P(t)\, x' + Q(t) x = 0$$

коэффициенты $P(t)$ и $Q(t)$ зависят от некоторых параметров (определяющих конструкцию системы). Требуется выбрать эти параметры таким образом, чтобы была справедлива оценка $x = O(e^{-kt})$ где $k > 0$ — заданное число. Замена

$$x = y \exp\left( -\frac{1}{2} \int\limits_0^t P(t)\, dt \right)$$

приводит данное уравнение к уравнению (2.1) с функцией

$$p(t) = Q(t) - \frac{1}{4} P(t)^2 - \frac{1}{2} P'(t)$$

Задача свелась, таким образом, к задаче получения достаточных условий для уравнения (2.1), гарантирующих выполнение оценки

$$y = O(e^{\lambda_0 t}), \qquad \lambda_0 \geqslant 0$$

при этом $\lambda_0 < 0$, очевидно, быть не может).

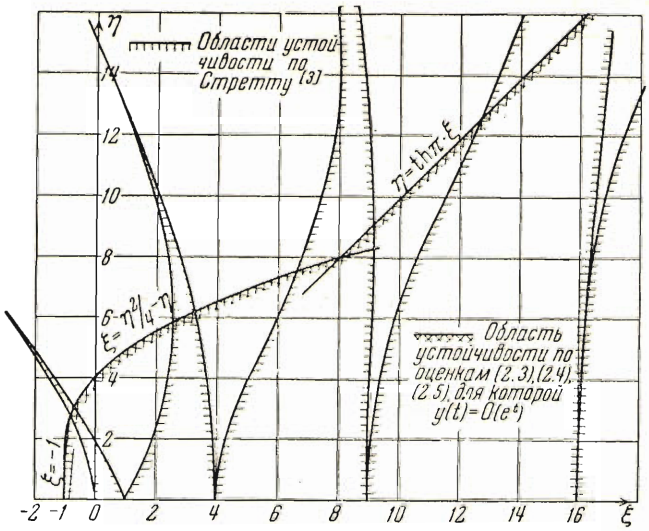
При $\zeta = 0$ получим уравнение Матье. Соответствующие условия имеют вид:

$$\xi \geqslant \frac{\eta^2}{4\lambda_0^2} - \eta \tag{2.12}$$

$$2\xi + \eta \leqslant 0, \quad \xi \geqslant -\lambda_0^2 \tag{2.13}$$

и

$$\eta \leqslant (\operatorname{th} \pi\lambda_0)\, \xi \tag{2.14}$$




Фиг. 1

На фиг. 1 указана результирующая область на плоскости $\xi$, $\eta$ для $\lambda_0 = 1$. На этом же чертеже указаны области устойчивости и неустойчивости, взятые из книги [4].

Очевидно, ни одна из трех областей (2.12), (2.13), (2.14) не включает полностью другую; таким образом, «работает» каждая из оценок (2.3), (2.4), (2.5). Очевидно также, что полученные условия весьма грубые и точным (но, вообще говоря, очень трудоемким) расчетом могут быть значительно улучшены.

*Пример 3.* Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \left(1 + q\cos\frac{2}{\mu}\,t\right)x = 0 \tag{2.15}$$

М. А. Айзерман в работе [5] ввел следующее определение. Динамическая система, описываемая уравнением (2.15), называется неограниченно устойчивой, если все решения уравнения (2.15) и их производные стремятся к нулю при $t \to \infty$ для любого $\mu$.

Отметим, что в уравнении (2.15) параметр $a \geqslant 0$ (при $a < 0$ имеются неограниченные при $t \to \infty$ решения) и без ограничения общности $q \geqslant 0$.

Работа [5] М. А. Айзермана посвящена получению (вторым методом Ляпунова) достаточного условия неограниченной устойчивости. Именно М. А. Айзерман построил кривую $q = q_{\max}(a)$ такую, что если для заданного уравнения (2.15) точка $(a, q)$ располагается ниже этой кривой ($q < q_{\max}(a)$), то имеет место неограниченная устойчивость (фиг. 2).

Применим к этой задаче наши оценки (2.3) и (2.4). Замена

$$x = e^{-{}^1\!/_2\, at}y$$

приводит уравнение (2.15) к уравнению (2.1) с функцией

$$p(t) = 1 - \frac{a^2}{4} + q\cos\frac{2t}{\mu}$$

Условие неограниченной устойчивости имеет, очевидно, вид $\lambda < {}^1\!/_2\, a$. Оценка (2.3) для

$$c^2 = 1 - {}^1\!/_4\, a^2 + q > 0$$

дает область

$${}^1\!/_2\, a^2 - a < q < {}^1\!/_2\, a^2 + a$$

и оценка (2.4) — область

$$a > 2, \qquad q < {}^1\!/_2\, a^2 - 2$$

Объединение этих областей дает область

$$q < {}^1\!/_2\, a^2 + a \tag{2.16}$$

Неравенство (2.16) и является, таким образом, достаточным условием неограниченной устойчивости.

Отметим, что это условие (точнее, $q \leqslant {}^1/_2\, a^2 + a$) можно вывести и из работы автора [3]. Без предположения $q \geqslant 0$ достаточное условие неограниченной устойчивости имеет вид:

$$| q | \leqslant {}^1/_2\, a^2 + a$$

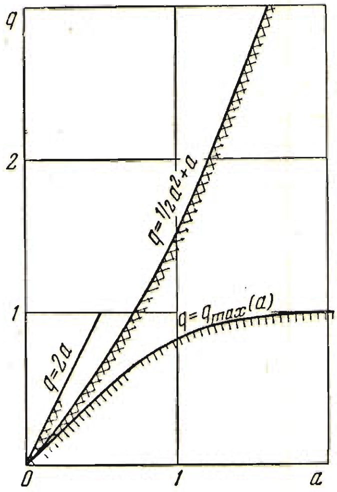
Заметим, что оценка (2.5) дает область

$$| q | \leqslant \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{th} \frac{\pi a}{2}$$

что при малых $a$ является незначительным улучшением неравенства $| q | \leqslant {}^1/_2\, a^2 + a$.

На фиг. 2 приведены кривая А. М. Айзермана $q = q_{\max}(a)$ и кривая $q = {}^1/_2\, a^2 + a$.

На этом же чертеже показана истинная область неограниченной устойчивости $q < 2a$ по Г. С. Горелику [6] (верно при $q$ и $a \ll 1$).



Фиг. 2

**3.** Рассмотрим систему двух уравнений (1.1) с действительными коэффициентами. Матрица $A(t)$ — вещественная матрица второго порядка.

Замена

$$x = z \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{Sp} A(t)\, dt\right) \tag{3.1}$$

приведет систему (1.1) к системе, матрица коэффициентов которой имеет след, тождественно равный нулю. Эту последнюю систему можно записать в виде

$$\frac{dz}{dt} = JH(t)\, z \tag{3.2}$$

Здесь $H(t)$ симметрическая матрица

$$H(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \beta(t) & \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(JH(t) = A(t) - \frac{SpA}{2} E\right)$$

Система (3.2), переписанная в скалярной форме, является системой канонического вида

$$\dot{p} = -\frac{\partial G}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial G}{\partial p} \qquad \left(G = \frac{1}{2} p^2 + \beta pq + \frac{1}{2} \gamma q^2\right)$$

В силу соотношения (3.1) оценка характеристических показателей системы (1.1) равносильна оценке характеристических показателей системы (3.2). Этой последней задачей мы и будем заниматься.

Характеристические показатели $\lambda_1$ и $\lambda_2$ системы (3.2) либо действительны, либо чисто мнимы и $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Пусть $\operatorname{Re} \lambda_2 \geqslant 0$. При $\lambda = 0$ все решения системы (3.2) ограничены для $-\infty < t < +\infty$ (или в исключительном случае, растут как $t$), при $\lambda > 0$ имеются неограниченные решения[1].

---

[1] Тривиальное решение соответственно устойчиво ($\lambda < 0$) или неустойчиво ($\lambda > 0$).

Обозначим $\varphi_z$ угол поворота вектора-решения $z$ за время $\omega$. Возьмем начальный вектор $z(0)$ вида
$$z(0) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Пусть $\varphi_z = \varphi(\alpha)$ — соответствующий угол поворота и

$$\varphi_1 = \min \varphi(\alpha), \qquad \varphi_2 = \max \varphi(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$$

где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — минимальный и максимальный углы поворота по всем решениям системы (3.2).

Для решения вопроса об устойчивости достаточно знать [7] расположение на числовой оси чисел $\varphi_1$ и $\varphi_2$ относительно чисел $n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$. Именно при

$$n\pi < \varphi_1 \leqslant \varphi_2 < (n+1)\pi \tag{3.3}$$

все решения ограничены, при

$$(n-1)\pi < \varphi_1 < n\pi < \varphi_2 < (n+1)\pi \tag{3.4}$$

имеются неограниченные решения $(\lambda > 0)$, при

$$n\pi < \varphi_1 < \varphi_2 = (n+1)\pi \quad (\text{или} \quad n\pi = \varphi_1 < \varphi_2 < (n+1)\pi)$$

имеется одно решение периода $\omega$ или $2\omega$, прочие растут как $t$, при $\varphi_1 = \varphi_2 = n\pi$ все решения периодические периода $\omega$ ($n$—четное) или $2\omega$ ($n$—нечетное). Этим исчерпываются все возможные случаи.

В. И. Бурдина [8] для неустойчивого случая [выполняются неравенства (3.4)] получила явные выражения для $\varphi_1$ и $\varphi_2$. Именно пусть $Z(t)$ — матрица фундаментальной системы уравнений (3.2), $Z(0) = E$. Пусть $\beta$ — угол между собственными векторами матрицы $Z(\omega)$.

Обозначим

$$\chi_{1,2}(\lambda, \beta) = \arccos \frac{1 \mp \operatorname{ch} \lambda\omega \cos\beta}{\operatorname{ch} \lambda\omega \mp \cos\beta} \qquad (0 \leqslant \chi_{1,2} \leqslant \pi) \tag{3.5}$$

Тогда [8]

$$\varphi_1 = n\pi - \chi_1(\lambda, \beta), \qquad \varphi_2 = n\pi + \chi_2(\lambda, \beta) \tag{3.6}$$

*Лемма*. Из неравенств

$$\chi_1(\lambda, \beta) \leqslant \sigma_1, \qquad \chi_2(\lambda, \beta) \leqslant \sigma_2 \qquad (0 \leqslant \sigma_{1,2} \leqslant \pi)$$

в предположении $\cos\sigma_1 + \cos\sigma_2 > 0$ следует неравенство

$$\operatorname{ch} \lambda\omega \leqslant \frac{1 + \cos(\sigma_1 - \sigma_2)}{\cos\sigma_1 + \cos\sigma_2}$$

(Если $\cos\sigma_1 + \cos\sigma_2 \leqslant 0$, то оценку для $\lambda$ вывести нельзя).

Точно так же из неравенств

$$\chi_1(\lambda, \beta) \geqslant \sigma_1, \qquad \chi_2(\lambda, \beta) \geqslant \sigma_2 \qquad (0 \leqslant \sigma_{1,2} \leqslant \pi)$$

следует неравенство

$$\operatorname{ch} \lambda\omega \geqslant \frac{1 + \cos(\sigma_1 - \sigma_2)}{\cos\sigma_1 + \cos\sigma_2}$$

(а также неравенство $-\cos\sigma_1 \leqslant \cos\beta \leqslant \cos\sigma_2$). При этом неравенство $\cos\sigma_1 + \cos\sigma_2 > 0$ будет выполняться автоматически.

Доказательство леммы элементарно и здесь не приводится.

Для чисел $\varphi_{1,2}$ легко получить оценку [9]

$$\int_0^\omega h_1(t)\,dt \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \int_0^\omega h_2(t)\,dt \tag{3.7}$$

Здесь $h_1(t)$ и $h_2(t)$ — наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы $H(t)$:

$$h_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2} \tag{3.8}$$

Неравенства (3.7) дают оценку для чисел $\chi_{1,2}(\lambda, \beta)$. Применяя лемму, получим следующую оценку для $\lambda$.

*Теорема 3.1.* Обозначим

$$h_{1,2}^\circ = \int_0^\omega h_{1,2}(t)\,dt \tag{3.9}$$

Предположим, что для некоторого $n = 0, \pm 1, + 2, \ldots$

$$(n-1)\pi < h_1^\circ \leqslant n\pi \leqslant h_2^\circ < (n+1)\pi \tag{3.10}$$

и

$$\cos(n\pi - h_1^\circ) + \cos(h_2^\circ - n\pi) > 0 \tag{3.11}$$

Тогда

$$\operatorname{ch}\lambda\omega \leqslant \operatorname{ch}\lambda_0\omega = \frac{1 + \cos(h_1^\circ + h_2^\circ)}{\cos(n\pi - h_1^\circ) + \cos(h_2^\circ - n\pi)} \tag{3.12}$$

Эту оценку [1] можно применять для решения вопроса об ограниченности решений системы (1.1) (двух уравнений). Именно, обозначим через

$$\mu_0 = \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega \operatorname{Sp} A(t)\,dt$$

Если $\mu_0 > 0$, то у системы (1.1) имеются неограниченные решения при $t \to \infty$ (так как в этом случае определитель матрицы фундаментальной системы решений уравнения (1.1), равный

$$\exp\int_0^t \operatorname{Sp} A(t)\,dt$$

будет неограниченной функцией при $t \to \infty$). Пусть $\mu_0 < 0$. Из всего сказанного выше следует: если для некоторого $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ выполнены либо неравенства $n\pi \leqslant h_1^\circ \leqslant h_2^\circ \leqslant (n+1)\pi$, либо неравенства

---

[1] В работе В. И. Бурдиной [10] указана возможность получения подобных оценок. Мы сочли целесообразным привести здесь эту оценку в явном виде. Отметим что при $n\pi < h_1^\circ \leqslant h_2^\circ < (n+1)\pi$ для некоторого $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, все решения ограничены (см. [9]), Это следует из (3.7) и (3.3).

(3.10), (3.11) и $\mathrm{ch}(\lambda_0\omega) \leqslant \mathrm{ch}(\mu_0\omega)$, где $\mathrm{ch}(\lambda_0\omega)$ определяется по формуле (3.12)[1], то решения системы (1.1) ограничены при $t \to \infty$.

Действительно, если выполнены неравенства $n\pi \leqslant h_1^\circ \leqslant h_2^\circ \leqslant (n+1)\pi$, то решения системы (3.2) либо ограничены, либо растут как $t$. Из (3.1) следует тогда, что решения системы (1.1) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если выполнены неравенства (3.10), (3.11) и $\mathrm{ch}(\lambda_0\omega) \leqslant \mathrm{ch}(\mu_0\omega)$, то $z(t) = O(e^{\lambda_0 t})$ и из (3.1) $x(t) = O(e^{(\lambda_0+\mu_0)t}) = O(1)$, так как $\lambda_0 + \mu_0 \leqslant 0$.

Если $\mathrm{ch}(\lambda_0\omega)^2 < \mathrm{ch}(\mu_0\omega)$, то $\lambda_0 + \mu_0 < 0$ и $x(t) \to 0$ при $t' \to \infty$.

Прежде чем применять оценку (3.12), иногда полезно произвести замену $z = P(t) z_1$, где $P(t)$ — некоторая дифференцируемая периодическая матрица периода $\omega$ с определителем, тождественно равным единице.

При этом система канонического вида (3.2) перейдет в систему также канонического вида. Очевидно, что характеристический показатель $\lambda$ при этом не меняется. Применяя одну из оценок $\lambda$ для преобразованной системы, мы получим оценку для первоначальной системы. Из работы В. И. Бурдиной [10] следует, что всегда существует матрица $P(t)$ (даже треугольная) такая, что для преобразованной системы $\mathrm{ch}\,\lambda\omega = \mathrm{ch}\,\lambda_0\omega$, где $\mathrm{ch}\,\lambda_0\omega$ определяется по формуле (3.12).

Оценку (3.12) можно применять и для уравнения (2.1). Полагая для этого $y = q$, $y' = cp$ ($c$—произвольное число), запишем уравнение (2.1) в виде системы (3.2) с матрицей

$$H(t) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & p(t)/c \end{pmatrix}$$

Функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ определяются следующим образом. Пусть

$$p_c^-(t) = \begin{cases} p(t), & \text{если } p(t) < c^2 \\ c^2, & \text{если } p(t) \geqslant c^2 \end{cases} \qquad p_c^+(t) = \begin{cases} p(t), & \text{если } p(t) > c^2 \\ c^2, & \text{если } p(t) \leqslant c^2 \end{cases} \tag{3,13}$$

Тогда

$$h_1(t) = \frac{1}{c} p_c^-(t), \quad h_1^\circ = \frac{1}{c}\int_0^\omega p_c^-(t)\,dt, \quad h_2(t) = \frac{1}{c} p_c^+(t), \quad h_2^\circ = \frac{1}{c}\int_0^\omega p_c^+(t)\,dt \tag{3.14}$$

Таким образом, оценку (3.12) [вместе с неравенствами (3.10) и (3.11)] можно применять для уравнения (2.1), определяя числа $h_{1,2}^\circ$ по формулам (3.14) и (3.13). За $c^2$ можно брать любое число, например, беря

$$c^2 = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(t)\,dt, \quad \text{если} \quad \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(t)\,dt > 0$$

---

[1] Можно показать, что это условие равносильно критерию ограниченности решений системы (1.1) В. И. Бурдиной [8], который несколько неудобен для приложений ввиду произвола в выборе фигурирующего в критерии параметра $\beta$. Равносильность здесь понимается в следующем смысле. Если выполнен критерий В. И. Бурдиной для некоторого $\beta$, то выполняется сформулированное нами условие, и, обратно, если выполняется наше условие, то найдется $\beta$, для которого выполнен критерий В. И. Бурдиной.

Оценки (3.12) и (1.16) являются оценками сверху для $\lambda$. Мы получим сейчас для $\lambda$ оценку как сверху, так и снизу. Рассмотрим вектор

$$z_* = Z(t)^* c, \qquad c = \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix} \text{— постоянный вектор}$$

Пусть $\varphi_{z_*} = \varphi_*(\alpha)$ — угол поворота вектора $z_*(t)$ за время $\omega$. Можно показать, что

$$\max \varphi(\alpha) = \max[-\varphi_*(\alpha)], \min \varphi(\alpha) = \min[-\varphi_*(\alpha)]$$

(максимум и минимум берутся по $\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.) Для углов поворота $\varphi_{z_*}$ можно получить следующее выражение

$$-\varphi_{z_*} = \int_0^\omega \frac{(HJc, Jc)}{(z_*, z_*)}\, dt$$

Отсюда, в предположении, что $H(t)$ — неотрицательная матрица (т. е., что $(H(t)c, c) \geqslant 0$), легко получить оценку:

$$\varphi_-(\alpha) \leqslant -\varphi_*(\alpha) \leqslant \varphi_+(\alpha)$$

$$\varphi_\pm(\alpha) = A_\pm \cos^2\alpha + 2B_\pm \cos\alpha \sin\alpha + C_\pm \sin^2\alpha$$

Причем числа $A_\pm$, $B_\pm$, $C_\pm$ подсчитываются по формулам

$$A_\pm = \int_0^\omega r_\pm(t)\,\alpha(t)\, dt, \; B_\pm = \int_0^\omega r_\pm(t)\,\beta(t)\, dt, \; C_\pm = \int_0^\omega r_\pm(t)\,\gamma(t)\, dt$$

$$r_\pm(t) = \exp\left[\pm \int_0^t \sqrt{(\alpha-\gamma)^2 + 4\beta^2\, dt}\right] \tag{3.15}$$

Введем обозначения

$$\max \varphi_+(\alpha) = M_+, \qquad \max \varphi_-(\alpha) = M_-$$

$$\min \varphi_+(\alpha) = m_+, \qquad \min \varphi_-(\alpha) = m_-$$

Очевидно, что

$$M_\pm = \tfrac{1}{2}(A_\pm + C_\pm) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(A_\pm - C_\pm)^2 + B_\pm{}^2}$$

$$M_\pm = \tfrac{1}{2}(A_\pm + C_\pm) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(A_\pm - C_\pm)^2 + B_\pm{}^2} \tag{3.16}$$

Для чисел $\varphi_1$, $\varphi_2$ получаем оценку

$$m_- \leqslant \varphi_1 \leqslant m_+, \qquad M_- \leqslant \varphi_2 \leqslant M_+$$

Применение леммы и неравенств (3.3), (3.6) дает следующую оценку для характеристического показателя $\lambda$.

*Теорема 3.2.* Пусть квадратичная форма $(H(t)c, c) \geqslant 0$ для[1] $0 \leqslant t \leqslant \omega$.

---

[1] Если это условие не выполнено, то можно проделать замену

$$z = e^{J\theta} z_1, \qquad e^{J\theta} = \begin{Vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{Vmatrix}, \qquad \theta = \frac{k\pi}{\omega} t,$$

где $k$ — целое число. Новая матрица будет равна

$$H_1(t) = \frac{k\pi}{\omega} E + e^{J\theta} H e^{-I\theta},$$

очевидно, что при достаточно большом $k$

$$(H_1(t)c, c) \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \omega$$

Подсчитываем по формулам (3.15) и (3.16) числа $m_{\pm}$.

(1) Если для некоторого $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$n\pi < m_{-} \leqslant M_{+} < (n+1)\pi$$

то все решения системы (3.2) ограничены при $-\infty < t < +\infty$.

(2) Если

$$(n-1)\pi < m_{-} \leqslant n\pi \leqslant M_{+} < (n+1)\pi$$

$$\cos(M_{+} - n\pi) + \cos(n\pi - m_{-}) > 0$$

то

$$\operatorname{ch}(\lambda\omega) \leqslant \frac{1 + \cos(M_{+} + m_{-})}{\cos(M_{+} - n\pi) + \cos(n\pi - m_{-})}$$

(3) Если

$$(n-1)\pi < m_{+} \leqslant n\pi \leqslant M_{-} < (n+1)\pi,$$

то у системы (3.2) имеются неограниченные решения ($\lambda > 0$) и

$$\operatorname{ch}(\lambda\omega) \leqslant \frac{1 + \cos(M_{-} + m_{+})}{\cos(M_{-} - n\pi) + \cos(n\pi - m_{+})}$$

Здесь условие $\cos(M_{-} - n\pi) + \cos(n\pi - m_{+}) > 0$ должно выполняться автоматически.

Если квадратичная форма $(H(t)c, c) \leqslant 0$ для $0 \leqslant t \leqslant \omega$, то легко сформулировать аналогичное утверждение.

Поступила 23 IV 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Приводимые системы. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. XIII, 1946.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ОГИЗ, 1952.
3. Якубович В. А. Оценки характеристических показателей и критерии устойчивости для линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. ДАН, т. XXXVII, № 3, 1952.
4. Стретт М. Д. О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. ОГИЗ, 1935.
5. Айзерман М. А. Достаточное условие устойчивости одного класса динамических систем с переменными параметрами. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951.
6. Горелик Г. С. Резонансные явления в линейных системах с периодическими меняющимися параметрами. Журнал технической физики, т. IV, вып. 10, 1934 и т. V, вып. 2—3, 1935.
7. Якубович В. А. Об ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$, $p(t+\omega) = p(t)$. ДАН, т. 1, XXIV, № 5, 1950.
8. Бурдина В. И. Критерии ограниченности решений системы дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами. ДАН, т. XC, № 3, 1953.
9. Якубович В. А. Критерии устойчивости для системы двух уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. ДАН, т. XXVIII, № 2, 1951.
10. Бурдина В. И. Об ограниченности решений системы дифференциальных уравнений, ДАН, т. XCIII, № 4, 1953.