Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОБРАЩЕНИИ ТЕОРЕМ А. М. ЛЯПУНОВА И Н. Г. ЧЕТАЕВА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Н. Красовский
(Свердловск)

§ 1. Рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где правые части X_i — непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности точки $O(0, \ldots, 0)$, обращающиеся в этой точке в нуль.

Теоремы второго метода Ляпунова [1] дают достаточные условия устойчивости (или неустойчивости) очевидного решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1.1). Как известно, метод заключается в построении функции $v(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей в окрестности точки O некоторым определенным условиям.

В работах И. Л. Массера [2] и Е. А. Барбашина [3] показано, что теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости для уравнений (1.1) может быть обращена. Цель настоящей статьи — выяснить условия, при которых можно построить функцию $v(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую условиям теорем Ляпунова [1] и Четаева [4] о неустойчивости.

В § 2 указываются необходимые и достаточные условия существования функции v, имеющей в окрестности точки O знакоопределенную производную dv/dt в силу уравнений (1.1). Доказанной в § 2 теоремой 2.1 охватывается, в частности, и случай асимптотической устойчивости точки O.

В § 3 указываются условия обращения первой теоремы А. М. Ляпунова о неустойчивости и исследуется вопрос о грубости свойства неустойчивости.

Наиболее общие достаточные условия неустойчивости очевидного решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1.1) даются второй теоремой А. М. Ляпунова о неустойчивости [1] (теорема III, стр. 92) и теоремой Н. Г. Четаева о неустойчивости [4] (стр. 34). В § 4 показано, что для стационарной системы уравнений (1.1) обе теоремы допускают обращение. Так как теорема III А. М. Ляпунова налагает на функцию $v(x_1, \ldots, x_n)$ более жесткие требования, чем теорема [4], то достаточно доказать возможность обращения теоремы III. Следует заметить, что факт возможности обращения во всех случаях неустойчивости для уравнений (1.1) теоремы III А. М. Ляпунова не уменьшает, очевидно, ценности теоремы Н. Г. Четаева, так как в конкретных случаях исследования неустойчивости построение функции, удовлетворяющей условиям теоремы [4], может быть выполнено, как правило, значительно проще.

При исследовании вопросов обращения теорем о неустойчивости в дальнейшем рассматриваются функции $v(x_1, \ldots, x_n)$, не зависящие от времени t и обращающиеся в точке O в нуль. В статье существенно используются результаты цитированных работ [2, 3].

§ 2. Рассмотрим вопрос о существовании функции Ляпунова v, имеющей в окрестности точки O знакоопределенную производную dv/dt в силу уравнений (1.1). Очевидно, такая функция может быть построена не во всех случаях.

Теорема 2.1. Для того чтобы в окрестности точки $O(0, \ldots, 0)$ существовала функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ класса C^1, производная которой

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i \tag{2.1}$$

в силу уравнений (1.1) является знакоопределенной функцией, необходимо и достаточно, чтобы существовала окрестность U начала координат O, не содержащая целиком траекторий системы (1.1), отличных от O.

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм. При формулировке этих лемм предполагается, что существует окрестность U, не содержащая целиком траекторий системы (1.1), отличных от O.

Обозначим через $J(R)$ и $E(R)$ соответственно внутренюю и внешнюю части пространства $\{x_i\}$, на которые его делит сфера $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$, и через $F(R)$ — поверхность этой сферы. Пусть $J^+(R)$ [1] содержится внутри окрестности U. Символом $f(p, t)$ обозначим точки траектории системы (1.1), проходящей при $t = 0$ через точку p. Дугой траектории в $J^+(R)$ (или просто дугой) будем называть максимальную связную дугу траектории, расположенную в $J^+(R)$. Символом $f_1(p, t)$ обозначим дуги, лежащие в $J^+(R)$ при всех $t > 0$ и примыкающие к точке O при $t \to \infty$, символом $f_2(p, t)$ — дуги, расположенные в $J^+(R)$ при всех $t < 0$ и такие, что $\lim [f(p, t)] = 0$ при $t \to -\infty$, символом $f_3(p, t)$ — дуги, определенные в $J^+(R)$ при $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$, где T_1, T_2 — конечные числа. Через M_i $(i = 1, 2, 3)$ обозначим множество точек m из $J^+(R)$, лежащих на дугах типа $f_i(m, t)$.

Лемма 2.1. Точки m из $J^+(R)$ (за исключением точки O) можно разбить на три класса: M_1, M_2, M_3.

Доказательство. Пусть $m \neq O$ и $f(m, t)$ содержится в $J^+(R)$ при всех $t > 0$. Пусть L обозначает ω-предельное множество траектории $f(m, t)$. Множество L содержится в $J^+(R)$ и состоит из целых траекторий [5]. Так как внутри окрестности U, содержащей $J^+(R)$, нет целых траекторий, отличных от O, то $L = O$. Следовательно, $\lim f(m, t) = O$ при $t \to \infty$. Отрицательная полутраектория $f(m, t)$ не может лежать в $J^+(R)$, иначе вся траектория $f(m, t)$ $(-\infty < t < \infty)$ лежала бы внутри U, что невозможно. Итак, в рассмотренном случае точка m принадлежит классу M_1. Так же доказывается, что m принадлежит классу M_2, если $f(m, t)$ содержится в $J^+(R)$ при всех $t < 0$. Кроме рассмотренных случаев, имеется лишь возможность, когда траектория $f(m, t)$ выходит концами из $J^+(R)$, т. е. когда m относится к классу M_3. Лемма доказана.

В дальнейшем сферу $J^+(R)$ будем считать фиксированной. Для доказательства теоремы 2.1 достаточно рассмотреть случай, когда в произвольно малой окрестности точки O имеются точки класса M_3. Действительно,

---
[1] Символом M^+ здесь и в дальнейшем обозначается замыкание множества M.

пусть поверхность $F(\varepsilon)$ сферы радиуса $\varepsilon < R$ не содержит точек класса M_3. Точки класса M_1 на $F(\varepsilon)$ образуют замкнутое множество. В самом деле, предположим противное. Пусть p — точка на $F(\varepsilon)$, предельная для M_1 и не принадлежащая M_1. Траектория $f(p, t)$ должна покинуть область $J^+(R)$ при возрастании времени. Вследствие интегральной непрерывности траектория $f(p, t)$ будет увлекать в область $E(R)$ точки, лежащие в окрестности p, что невозможно для точек класса M_1. Противоречие доказывает замкнутость множества точек класса M_1 на $F(\varepsilon)$. Аналогичным образом устанавливается замкнутость точек класса M_2 на $F(\varepsilon)$. Если на $F(\varepsilon)$ нет точек класса M_3, то в силу замкнутости M_1 и M_2 поверхность $F(\varepsilon)$ должна состоять целиком из точек класса M_1 или целиком из точек класса M_2, т. е. точка O была бы в этих случаях либо положительно асимптотически устойчивой, либо отрицательно асимптотически устойчивой. В случае асимптотической устойчивости[1] точки O существование функции v, имеющей знакоопределенную производную (2.1), доказано в работах [2, 3]. В дальнейшем предполагается, что в произвольной близости O имеются точки класса M_3.

Лемма 2.2. Можно указать положительное число $R_1 < {}^1\!/_2 R$ такое, что на каждой дуге $f_1(m, t)$ или $f_3(m, t)$, где m содержится в $J(R_1)$, имеется один и только один отрезок $l_m^{(1)}$, лежащий в области $J({}^1\!/_2 R) - J^+(R_1)$ при $t_1^{(1)} < t < t_2^{(1)}$ $(t_2^{(1)} < 0)$, концы которого $f_i(m, t_1^{(1)})$, $f_i(m, t_2^{(1)})$ $(i = 1, 3)$ лежат на поверхностях $F({}^1\!/_2 R)$ и $F(R_1)$ соответственно, а также на каждой дуге $f_2(m, t)$ или $f_3(m, t)$ при m из $J(R_1)$ имеется один и только один отрезок $l_m^{(2)}$, лежащий в области $J({}^1\!/_2 R) - J^+(R_1)$ при $t_1^{(2)} < t < t_2^{(2)}$ $(t_1^{(2)} > 0)$, и концы этого отрезка $f_i(m, t_2^{(2)})$, $f_i(m, t_1^{(2)})$ $(i = 2, 3)$ лежат на поверхностях $F({}^1\!/_2 R)$ и $F(R_1)$ соответственно.

Доказательство. Покажем, что существует число $R_1^{(1)}$, удовлетворяющее первому условию леммы. Каждая дуга $f_i(m, t)$ $(i = 1, 3)$, где m лежит в $J(R_1)$, в случае $R_1 < {}^1\!/_2 R$ пересекает область $J^+({}^1\!/_2 R) - J(R_1)$ при $t < 0$. Поэтому достаточно показать, что существует число $R_1^{(1)}$, для которого область $J({}^1\!/_2 R) - J^+(R_1)$ пересекается каждой такой дугой при $t < 0$ только один раз. Пусть такого числа $R_1^{(1)}$ указать нельзя. Тогда можно построить последовательность троек точек $\{p_n, q_n, r_n\}$ таких, что каждая тройка лежит на одной дуге, точки q_n расположены на дуге между p_n и r_n, лежат на поверхности $F({}^1\!/_2 R)$ и $p_n \to 0$, $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть q — предельная точка для q_n, тогда траектория $f(q, t)$ должна лежать внутри $J^+(R)$ при $-\infty < t < \infty$. Действительно, если бы точка этой траектории $f(q, \tau)$ при $\tau > 0$ лежала в области $E(R)$, то вледствие интегральной непрерывности в области $E(R)$ должны были бы лежать точки $f(q_k, \tau)$ с достаточно большим номером k (здесь q_k — подпоследовательность, сходящаяся к точке q). Однако это невозможно, так как при $k \to \infty$ временная длина дуг $f(q_k, t)$ от точки q_k до точки r_k стремится к бесконечности вследствие $r_k \to 0$. Полученное противоречие показывает, что положительная полу-

---

[1] Очевидно, случай отрицательной асимптотической устойчивости сводится к случаю положительной устойчивости заменой $t = -\tau$.

траектория $f(q, t)$ должна лежать в $J^+(R)$. Аналогичным образом доказывается, что $f(q, t)$ при $t < 0$ должна лежать в $J^+(R)$. Однако по условиям задачи не существует траекторий, лежащих целиком внутри $J^+(R)$. Противоречие доказывает существование числа $R_1^{(1)}$. Аналогичным образом устанавливается существование числа $R_1^{(2)}$, удовлетворяющего второму условию леммы. В качестве числа R_1 достаточно выбрать $R_1 = \min(R_1^{(1)}, R_1^{(2)})$. Лемма доказана.

Рассмотрим область G, заполненную некоторыми дугами из $J(R)$. Замкнутое в G многообразие S назовем сечением G класса C^1 [3] (стр. 237), если всякая дуга из G пересекает S в одной и только одной точке и S является поверхностью уровня функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ класса C^1, удовлетворяющей на S условию

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} X_i > 0 \tag{2.2}$$

Лемма 2.3. Пусть H — система дуг $f_i(m, t)$ $(i = 1, 2, 3,)$, для которых m содержится в области $J(^1/_2 R_1)$. Существует область G_1, обладающая сечением S_1, лежащим в области $J(R) - J^+(^1/_2 R_1)$, таким, что все дуги $f_1(m, t)$ и $f_3(m, t)$ из H пересекают S_1 один и только один раз при $t < 0$, и область G_2, обладающая сечением S_2, лежащим в $J(R) - J^+(^1/_2 R_1)$, и таким, что все дуги $f_2(m, t)$, $f_3(m, t)$ из H пересекают S_2 один и только один раз при $t > 0$.

Доказательство. Докажем существование сечения S_1. На каждой дуге $f_i(m, t)$ $(i = 1, 3)$ из H есть отрезок $l_m^{(1)}$, удовлетворяющий условиям леммы 2.2, и тем более один и только один отрезок $L_m^{(1)}$, содержащийся в области $J(^3/_4 R) - J^+(^3/_4 R_1)$ при $\tau_1^{(1)} < t < \tau_2^{(1)}$ $(\tau_2^{(1)} < 0)$, концы которого $f_i(m, \tau_1^{(1)})$, $f_i(m, \tau_2^{(1)})$ лежат на поверхностях $F(^3/_4 R)$ и $F(^3/_4 R_1)$ соответственно. Пусть N_1 и N_2 — гиперплоскости, проходящие через точки $f_i(m, \tau_1^{(1)})$ и $f_i(m, \tau_2^{(1)})$ соответственно и ортогональные к направлениям траекторий в этих точках; концы отрезка $L_m^{(1)}$ можно окружить сферами столь малого радиуса, чтобы внутри этих сфер траектории пересекали N_1 и N_2 в том же направлении, что и $f_i(m, t)$.

Назовем трубчатой окрестностью [3] отрезка $L_m^{(1)}$ открытую область $G_m^{(1)}$, заполненную отрезками траекторий, концы которых лежат на N_1 и N_2 внутри указанных выше сфер. Радиусом трубчатой окрестности назовем $\max \rho[L_m^{(1)}, p]$ для p из области $G_m^{(1)}$. (Здесь, как и в дальнейшем, $\rho[P, Q]$ означает расстояние между множествами P и Q.) Вследствие замкнутости множества точек класса M_2, лежащих в области $J^+(R) - J(^1/_2 R_1)$, для $L_m^{(1)}$ можно построить трубчатую окрестность $G_m^{(1)}$ столь малого радиуса, чтобы $G_m^{(1)}$ лежала внутри области $J(R) - J^+(^1/_2 R_1)$, не пересекалась с M_2 и концы дуг, из которых построена трубка $G_m^{(1)}$, лежали в областях $J(R) - J^+(^1/_2 R)$ и $J(R_1) - J^+(^1/_2 R_1)$ при $t < 0$ и $t > 0$ соответственно.

Рассмотрим область $G_1 = \sum G_m^{(1)}$ для всех $f_i(m, t)$ из H при m из области $J(^1/_2 R_1)$ $(i = 1, 3)$. G_1 содержится в $J(R) - J^+(^1/_2 R_1)$, и временная длина любой дуги из G_1 ограничена снизу числом $l > 0$. так как дуги из G_1 пересекают область $J^+(^1/_2 R) - J(R_1)$, а скорость движения точки вдоль траектории ds/dt в этой области ограничена сверху. Система дуг, заполняющих G_1, неустойчива [3] (стр. 245), так как любая точка $f(m, t)$ покидает G_1 при возрастании и убывании t.

Покажем, что в области G_1 нет несобственного седла [3] (стр. 245). Предположим противное. Тогда можно указать последовательность троек точек $\{p_n, q_n, r_n\}$ таких, что каждая тройка лежит на одной дуге из G_1, точка q_n лежит на дуге между p_n и r_n, $p_n \to p$ из G_1, $r_n \to r$ из G_1 при $n \to \infty$, а последовательность точек q_n не сходится ни к какой точке из G_1. Ограниченная последовательность q_n имеет по крайней мере одну предельную точку b, лежащую внутри $J(R)$. Вследствие интегральной непрерывности точка b должна лежать на той же траектории, что и точки p и r (точки p и r лежат лишь на разных дугах из G_1 этой траектории). Действительно, предположим противное. Пусть точка b относится к классу M_3. Тогда дугу $f_3(b,t)$ можно окружить трубчатой окрестностью G_b столь малого радиуса, чтобы трубка не содержала p и r и концы ее лежали вне сферы $J^+(R)$. Так как точки p_n, q_n и r_n лежат на одной и той же дуге из $J^+(R)$, то $\{p_k, q_k, r_k\}$ (где q_k — последовательность, сходящаяся к b) должны лежать внутри G_b при всех достаточно больших значениях k, т. е. внутри G_b должны лежать и точки p и r. Пусть теперь b относится к классу M_1. В этом случае дугу $f_1(b, t)$ можно окружить трубчатой окрестностью G_b, которая не содержала бы точек p и r, и такой, что отрицательный конец интегральной трубки лежит в $E(R)$, а положительный конец внутри $J(^1/_2 R_1)$. Точки p_k, q_k, r_k при больших k здесь также должны лежать внутри G_b, что снова противоречит тому факту, что точки p и r лежат вне G_b. Итак, действительно точки p, b и r лежат на одной и той же траектории $f(b, t)$ [1]. Но в таком случае на траектории $f_i(b, t)$ $(i = 1$ или $3)$ существовали бы две дуги, лежащие в области G_1, что невозможно, так как область G_1 построена из дуг, каждая из которых содержит отрезок $l^{(1)}$ (см. лемму 2.2), а таких отрезков на любой траектории может быть не больше одного. Полученное противоречие показывает, что в области G_1 нет несобственного седла. Следовательно, область G_1 удовлетворяет всем условиям леммы 2.4 из работы Е. А. Барбашина [3], т. е. в области G_1 существует сечение S_1 класса C^1. Аналогичным образом устанавливается существование сечения S_2. Лемма доказана.

Рассмотрим замкнутые множества $M^{(1)} = M_1 \cap S_1$ и $M^{(2)} = M_2 \cap S_2$. Покроем $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ системами окрестностей Σ_1 и Σ_2 такими, что Σ_1^+ содержится в G_1 и Σ_2^+ содержится в G_2, причем пересечение Σ_1^+ и Σ_2^+ пусто. Обозначим через u_i функцию, для которой S_i $(i = 1, 2)$ является поверхностью уровня. В областях G_1 и G_2 функции

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} X_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} X_i$$

[1] В случае предположения b из M_2 рассуждения аналогичны рассмотрению случая q из M_1.

положительны, поэтому в замкнутых областях Σ_1^+ и Σ_2^+ эти величины достигают положительного минимума, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} X_i > l > 0 \qquad \text{в области } \Sigma_j \ (j = 1, 2) \tag{2.3}$$

Лемма 2.4. Существует окрестность $J(R_2)$ точки O такая, что всякая дуга $f_3(m, t)$ при m из $J(R_2)$ имеет точки внутри Σ_1 при $t < 0$, точки внутри Σ_2 при $t > 0$, причем $R_2 < {}^1/_2 R_1$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда можно указать последовательность точек $m_n \to O$ таких, что дуги $f_3(m_n, t)$ не пересекают Σ_1 или Σ_2 при $t < 0$ и $t > 0$ соответственно. Пусть для определенности дуги $f_3(m_n, t)$ не пересекают Σ_1 и $p_n = f_3(m_n, t_n)$ — точки этих дуг, лежащие на $F(R)$ при $t_n < 0$. Последовательность p_n имеет предельную точку p. Положительная полутраектория $f(p, t)$ должна лежать в $J^+(R)$, т. е. точка p относится к классу M_1, следовательно, должна существовать точка $f(p, t_p)$, лежащая на $M^{(1)}$ при $t_p > 0$. Вследствие интегральной непрерывности точки $f_3(m_n, t_n + t_p)$ должны лежать внутри Σ_1 для некоторых, достаточно больших значений n. Противоречие доказывает справедливость леммы для отрицательных ветвей дуг $f_3(m, t)$. Аналогично доказывается справедливость леммы для положительных ветвей этих дуг. Лемма доказана.

Рассмотрим дугу $f_3(m, t)$, где m лежит внутри $J(R_2)$. Эта дуга пересекает S_1 и S_2 в точках $f_3(m, t_m^{(1)})$ и $f_3(m, t_m^{(2)})$. Пусть $t(m) = \frac{1}{2}(t_m^{(1)} + t_m^{(2)})$. Точка $f_3(m, t(m))$ разбивает дугу $f_3(m, t)$ на два отрезка. Часть дуги $f_3(m, t)$ при $t < t(m)$ будем обозначать $f_3^{(1)}(p, t)$, где p — любая точка $f_3(m, t_p)$, лежащая в $J(R_2)$ при $t_p < t(m)$, часть дуги $f_3(m, t)$ при $t > t(m)$ обозначим $f_3^{(2)}(q, t)$, где q — любая точка рассматриваемой половины дуги.

Лемма 2.5. Для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $T(\varepsilon)$, что $\rho[f_1(m, t), 0] < \varepsilon$ и $\rho[f_3^{(1)}(m, t), 0] < \varepsilon$ при всех $t \geqslant T(\varepsilon)$, а также $\rho[f_2(m, t), 0] < \varepsilon$ и $\rho[f_3^{(2)}(m, t) 0] < \varepsilon$ при $t \leqslant -T(\varepsilon)$ для всех точек m из $J(R_2)$.

Примечание. По отношению к дугам $f_3^{(1)}(m, t)$ и $f_3^{(2)}(m, t)$ утверждение при $t > T(\varepsilon)$ (или $t < -T(\varepsilon)$ соответственно) означает — при всех $t > T(\varepsilon)$ (или $t < -T(\varepsilon)$), при которых эти дуги определены.

Доказательство. Покажем сначала, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta_1(\varepsilon)$ такое, что из $\rho[m, 0] < \delta_1(\varepsilon)$ следует $\rho[f_1(m, t), 0] < \varepsilon$ для всех m из $M_1 \cap J(R_2)$ или $\rho[f_3^{(1)}(m, t), 0] < \varepsilon$ для m из $M_3 \cap J(R_2)$ при всех $t > 0$ [1].

Предположим противное. Тогда можно построить последовательность точек $p_n \to 0$ таких, что $\rho[f_1(p_n, t_n), 0] = \varepsilon$ (или $\rho[f_3^{(1)}(p_n, t_n), 0] = \varepsilon$) при $t_n > 0$. Рассмотрим дугу $f(p, t)$, где p — предельная точка для $f(p_n, t_n)$. Очевидно, 0 является α-предельной точкой для $f(p, t)$, т. е. точка p принадлежит классу M_2. Следовательно, можно указать такое положительное число $t^* > 0$, что точка $f(p, t^*)$ лежит вне $J^+(R)$. Вследствие интегральной непрерывности точки $f(p_n, t_n + t^*)$ должны также лежать вне $J^+(R)$

---

[1] См. примечание к лемме 2.5.

для некоторых достаточно больших значений n. Вследствие $p_n \to 0$ должно быть $t_n \to \infty$. Однако временная длина дуги $f_1(p_n, t)$ и $f_3(p_n, t)$ в $J^+(R)$ при $t > t_n$ по определению $f_1(m, t)$ и $f_3^{(1)}(m, t)$ не меньше, чем t_n. Полученное противоречие доказывает существование числа $\delta_1(\varepsilon)$.

Покажем, что существует число $T_1(\varepsilon)$, удовлетворяющее первому условию леммы. Очевидно, достаточно доказать существование числа $T_1(\varepsilon)$ для точек m, лежащих на $F(R)$. Действительно если m лежит внутри $J(R)$, то дуга $f_1(m, t)$ или $f_3^{(1)}(m, t)$ пересекает поверхность $F(R)$ при $t < 0$. Для доказательства существования $T_1(\varepsilon)$, вследствие предыдущего, достаточно показать, что временная длина отрезков $f_1(m, t)$ и $f_3^{(1)}(m, t)$, лежащих в области $E(\delta_1(\varepsilon))$ при $t > 0$, для всех m из $F(R)$ ограничена сверху. Предположим противное. Тогда можно на $F(R)$ указать последовательность точек p_n такую, что временные длины дуг $f_1(p_n, t)$ (или $f_3^{(1)}(p_n, t)$), лежащих при $t > 0$ вне $J^+(\delta_1(\varepsilon))$, неограниченно возрастают при возрастании n. Пусть p — предельная точка для p_n. Очевидно, положительная полутраектория $f(p, t)$ должна лежать в области $J^+(R) - J(\delta_1(\varepsilon))$. Но в таком случае ω-предельное множество L траектории $f(p, t)$ должно лежать в этой области. Так как L состоит из целых траекторий [5] и область $J^+(R) - J(\delta_1(\varepsilon))$ не может по условиям задачи содержать целых траекторий, то получаем противоречие. Противоречие доказывает существование числа $T_1(\varepsilon)$.

Аналогичным образом доказывается существование числа $T_2(\varepsilon)$, удовлетворяющего второму условию леммы. Тогда $T(\varepsilon) = \max(T_1, T_2)$ удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Докажем достаточность условий теоремы. Опираясь на лемму 2.5, согласно [2] можно построить непрерывную, монотонно убывающую, непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(\tau)$ $(0 \leqslant \tau < \infty)$, удовлетворяющую условиям

$$\lim \varphi(\tau) = 0, \qquad \lim \varphi'(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau \to \infty \tag{2.4}$$

$$\rho^2[f_1(m, t), 0] < \varphi(t), \qquad \rho^2[f_3^{(1)}(m, t), 0] < \varphi(t) \quad \text{при } t > 0 \tag{2.5}$$

$$\rho^2[f_2(m, t), 0] < \varphi(-t), \qquad \rho^2[f_3^{(2)}(m, t), 0] < \varphi(-t) \quad \text{при } t < 0 \tag{2.6}$$

для всех m из $J^+(R)$.

Пусть точка m лежит внутри сферы $J(\varepsilon)$, где $\varepsilon < R_2$. Временная длина θ дуги $f_i(m, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ от точки m до точки $f_i(m, t_m^{(1)})$, лежащей на S_1 внутри области $J(R) - J^+({}^1/_2 R_1)$, или до точки $f_i(m, t_m^{(2)})$ на S_2 удовлетворяет неравенству [6]

$$\theta \geqslant \int_{\varepsilon}^{{}^1/_2 R_1} \frac{dr}{z(r)} \tag{2.7}$$

Здесь

$$z^2(r) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \qquad \text{при } r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

Функции X_i дифференцируемы в точке $O(0, \ldots, 0)$, т. е. в окрестности этой точки выполняются неравенства

$$|X_i| < Mr \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где M — постоянная. Следовательно, интеграл (2.7) расходится при $\varepsilon \to 0$, т. е. можно построить непрерывную, монотонно возрастающую функцию $\theta(\varepsilon)$, удовлетворяющую условиям

$$\theta > \theta(\varepsilon), \quad \lim \theta(\varepsilon) = \infty \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{2.8}$$

Так как для всякой точки p класса M_1 или M_3, лежащей внутри $J(\varepsilon)$, можно указать точку $f_i(p, t_p^{(1)})$ $(i = 1$ или $3)$, лежащую на S_1 при $t_p^{(1)} < 0$, а также для любой точки q класса M_2 или M_3 из $J(\varepsilon)$ — точку $f_i(q, t_q^{(2)})$ $(i = 2$ или $3)$ на S_2 при $t_q^{(2)}$, то, вследствие (2.5), (2.6) и (2.8), для всех m из сферы $J(\varepsilon)$ должны выполняться неравенства

$$\rho^2[f_1(m, t), 0] < \varphi(\theta(\varepsilon) + t), \quad \rho^2[f_3^{(1)}(m, t), 0] < \varphi(\theta(\varepsilon) + t) \quad \text{при } t > 0 \tag{2.9}$$

$$\rho^2[f_2(m, t), 0] < \varphi(\theta(\varepsilon) - t), \quad \rho^2[f_3^{(2)}(m, t), 0] < \varphi(\theta(\varepsilon) - t) \quad \text{при } t < 0 \tag{2.10}$$

Вследствие равномерной интегральной непрерывности в $J(R_2)$ для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\rho[p, q] < \eta(\varepsilon)$ следует $\rho[f(p, t), f(q, t)] < {}^1/_2\,\delta(\varepsilon)$ при $|t| \leqslant T[{}^1/_2\,\delta(\varepsilon)]$ для всех p и q из $J(R_2)$. Таким образом, по определению числа $T[{}^1/_2\,\delta(\varepsilon)]$ (см. лемму 2.5.) имеем:[1]

для всех p из M_1 внутри $J(R_2)$

$$\rho^2[f(q, t,)\, 0] < \varepsilon^2 \quad \text{при } \rho[p, q] < \eta(\varepsilon) \qquad q \text{ из } M_3^{(1)} \tag{2.11}$$

для всех p из M_2 внутри $J(R_2)$

$$\rho^2[f(q, -t, 0] < \varepsilon^2 \quad \text{при } \rho[p, q] < \eta(\varepsilon) \quad (t \geqslant T({}^1/_2\,\delta)) \qquad q \text{ из } M_3^{(2)} \tag{2.12}$$

Обозначим через $N(t)$ непрерывную, положительную, монотонно возрастающую функцию, удовлетворяющую неравенствам

$$N\left(\tfrac{1}{3}\,\theta(\varepsilon)\right) > \frac{1}{\eta(\varepsilon)}, \qquad N(\theta(\varepsilon)) > e^{4nLT({}^1/_2\delta(\varepsilon))} \tag{2.13}$$

Через L здесь и в дальнейшем обозначается постоянная Липшица для функций X_i $(i = 1, \ldots, n)$ в области $J^+(R)$. Очевидно, функцию $N(t)$ всегда можно построить.

Рассмотрим решение $x_i(x_{1p}, \ldots, x_{np}, t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы (1.1), соответствующее некоторой траектории $f(p, t)$.

Частные производные решения по начальным данным непрерывны[5] (стр. 22) и удовлетворяют в области $J^+(R)$ неравенствам[7]

$$\left| \frac{\partial x_i(x_{1p}, \ldots, x_{np}, t)}{\partial x_{jp}} \right| < Be^{nLt} \qquad (B = \text{const}) \tag{2.14}$$

Пусть $t(\varphi)$ — функция, обратная для функции $\varphi = \varphi(t)$ (стр. 519). Рассмотрим функцию

$$G(\varphi) = \int_0^{\varphi} e^{-(N[t(\varphi)] + nL)\, t(\varphi)}\, d\varphi \tag{2.15}$$

---

[1] См. примечание к лемме 2.5.

Вследствие свойств функций $N(t)$ и $t(\varphi)$ функция

$$\frac{dG}{d\varphi} = e^{-(N[t(\varphi)]+nL)\,t(\varphi)} \tag{2.16}$$

является положительной, монотонно возрастающей функцией φ, причем производная $[dG/d\varphi]_{\varphi=0} = 0$.

Действительно, вследствие второго из неравенств (2.13) будем иметь $N(t)\,t > t$. Кроме того, функция $G(\varphi)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty \frac{dG}{d\varphi} e^{nLt}\,dt = \int_0^\infty e^{-N(t)\,t}\,dt < \infty \tag{2.17}$$

Вычислим интеграл:

$$J = \int_0^\infty N(t)\,G(\varphi(t))\,dt = \int_0^\infty N(t)\,dt \int_0^{\varphi(t)} e^{-[N(t_1(\varphi))+nL]\,t_1(\varphi)}\,d\varphi$$

После замены переменной во внутреннем интеграле, учитывая, что вследствие (2.4) $|\varphi'(t)| < K$ при всех $t \geqslant 0$, где K — постоянная, получим

$$|J| \leqslant \left| \int_0^\infty N(t)\,dt \int_\infty^t Ke^{-N(t_1)\,t_1}\,dt_1 \right| \tag{2.18}$$

и так как вследствие монотонного возрастания $N(t)$ для внутреннего интеграла (2.18) справедливо неравенство

$$\left| K \int_\infty^t e^{-N(t_1)\,t_1}\,dt_1 \right| < K \frac{e^{-N(t)\,t}}{N(t)} \tag{2.19}$$

то

$$|J| < \int_0^\infty Ke^{-N(t)\,t}\,dt < \infty \tag{2.20}$$

Таким образом, построенная функция $G(\varphi)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty G(\varphi(t))\,N(t)\,dt < \infty \tag{2.21}$$

и, кроме того, вследствие (2.15) и (2.19), имеем

$$\lim G[\varphi(t)]\,N(t) = 0 \qquad \text{при } t \to \infty \tag{2.22}$$

Вследствие свойств функций $G(\varphi)$ и $N(t)$ интегралы

$$\int_0^\infty G(\psi(\tau))\,N_1(\tau)\,d\tau < \infty, \qquad \int_0^\infty G'(\psi(\tau))\,M_1(\tau)\,d\tau < \infty \tag{2.23}$$

сходятся равномерно для всех функций $\psi(\tau)$, $M_1(\tau)$ и $N_1(\tau)$, удовлетворяющих условию

$$\psi(\tau) \leqslant \varphi(\tau), \qquad M_1(\tau) \leqslant e^{nLt}, \qquad N_1(\tau) \leqslant N(t) \qquad \text{при } \tau \geqslant 0 \tag{2.24}$$

Обозначим

$$\psi(p, t) = \rho^2[f(p, t), 0], \qquad v(x_1, \ldots, x_n) = v(p)$$

Функция $v(p)$, определенная в области $J(R_2)$ следующим образом[1]:

$$v(p)=\int\limits_{\infty}^{0} G[\psi(p,\tau)]\,d\tau \qquad \text{при } p \text{ из } M_1 \tag{2.25}$$

$$v(p)=\int\limits_{-\infty}^{0} G[\psi(p,\tau)]\,d\tau \qquad \text{при } p \text{ из } M_2 \tag{2.26}$$

$$v(p)=\int\limits_{t(p)}^{0} G[\psi(p,\tau)]\,d\tau \qquad \text{при } p \text{ из } M_3 \tag{2.27}$$

$$v(0)=0 \tag{2.28}$$

где $t(p)$ — момент времени, соответствующий половине временной длины дуги $f_3(p,t)$ при $t_p^{(1)}\leqslant t\leqslant t_p^{(2)}$ (см. стр. 518), удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Докажем это.

Функция $v(p)$ определена во всех точках окрестности $J(R_2)$, так как, вследствие (2.5), (2.6) и первого равенства (2.23), интегралы (2.25) и (2.26) сходятся равномерно в $J(R_2)$. Вдоль траекторий системы (1.1) имеем

$$\frac{dv}{dt}=G[\psi(p,0)]>0 \qquad \text{при } p\neq 0 \tag{2.29}$$

Действительно, пусть, например, p из M_3. Тогда вдоль дуги $f(p,t)$, обозначая $v(p,t)=v[f(p,t)]$, имеем

$$v(p,t)=\int\limits_{t[f(p,t)]}^{0} G[\psi(f(p,t),\tau)]\,d\tau=\int\limits_{t[f(p,t)]+t}^{t} G[\psi(f(p,t),\tau-t)]\,d\tau$$

$$\left.\frac{d(v(p,t))}{dt}\right|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_{t[f(p,t)]+t}^{t} G[\psi(f(p,t),\tau-t)]\,dt\right\}_{t=0}=$$

$$=G[\psi(f(p,t),-t)]=G[\psi(p,0)]$$

так как $t[f(p,t)]+t\equiv t(p)$ по определению $t(p)$ и

$$\frac{\partial\psi[f(p,t),\tau-t]}{\partial t}=0$$

вследствие [5] (стр. 27), так как $f[f(p,t),\tau-t]=f(p,\tau)$ при всех t и τ.

Справедливость (2.29) для (2.25) и (2.26) проверяется так же, как это сделано в работе [2]. Покажем, что $v(p)$ — функция класса C^1 в $J(R_2)$.

Пусть p является внутренней точкой M_1. Вычисляя формально $\partial v/\partial x_i$, получим в точке $p(x_{1p},\ldots,x_{np})$

$$\frac{\partial v}{\partial x_{ip}}=2\int\limits_{\infty}^{0} G'[\psi(p,\tau)]\left\{\sum_{j=1}^{n} x_j(p,\tau)\frac{\partial x_j(p,\tau)}{\partial x_{ip}}\right\}d\tau \tag{2.30}$$

Здесь $x_i(p,\tau)$ — координаты точек $f(p,\tau)$.

[1] Заметим, что на точках класса M_1 конструкция функции v совпадает с конструкцией И. Л. Массера [2], построившего функцию Ляпунова для случая асимптотической устойчивости.

Вследствие оценок (2.5), (2.14) и (2.17) интеграл (2.30) сходится равномерно для всех p из $J(R_2)$. Поэтому в точках p рассмотренного типа производные $\partial v / \partial x_{ip}$ $(i = 1, \ldots, n)$ существуют, вычисляются по формуле (2.30) и непрерывны[8] (т. II, стр. 731). Заметим, что, вследствие (2.8), (2.9), (2,14) и (2.17), эти производные стремятся к нулю при приближении точки p к началу координат 0. Аналогичным образом устанавливаются существование и непрерывность производных

$$\frac{\partial v}{\partial x_{ip}} = 2 \int_{-\infty}^{0} G' [\psi(p, \tau)] \left\{ \sum_{j=0}^{n} x_j(p, \tau) \frac{\partial x_j(p, \tau)}{\partial x_{ip}} \right\} d\tau \tag{2.31}$$

во внутренних точках p множества M_2.

Рассмотрим точку q класса M_3, лежащую внутри $J(R_2)$. M_3 является открытым множеством. Действительно, если траектория, проходящая через точку q, покидает обоими концами сферу $J^+(R)$, то, вследствие интегральной непрерывности, дуги, проходящие через точки, близкие к точке q, должны также обоими концами покидать сферу $J^+(R)$. Таким образом, q является внутренней точкой M_3. В точке q имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x_{iq}} = 2 \int_{t(q)}^{0} G' [\psi(q, \tau)] \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j(q, \tau) \frac{\partial x_j(q, \tau)}{\partial x_{iq}} \right\} d\tau - G[\psi(q, t(q))] \frac{\partial t(q)}{\partial x_{iq}} \tag{2.32}$$

Вычислим производную «среднего» времени $t(q)$ по координатам точки q. По определению $t(q)$ имеем

$$\frac{\partial t(q)}{\partial x_{iq}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial t_q^{(1)}}{\partial x_{iq}} + \frac{\partial t_q^{(2)}}{\partial x_{iq}} \right)$$

Обозначая координаты точек, лежащих на сечении S_k, через $x_j^{(k)}$, получим на S_k $(k = 1, 2)$ при изменении координаты x_{iq}

$$dx_j^{(k)} = \frac{\partial x_j^{(k)}}{\partial x_{iq}} dx_{iq} + \frac{\partial x_j^{(k)}}{\partial t_g^{(k)}} dt_q^{(k)} \tag{2.33}$$

Так как на поверхности S_k, вследствие системы (1.1),

$$\frac{\partial x_j^{(k)}}{\partial t_q^{(k)}} = X_j(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \qquad (j = 1, \ldots, n; \ldots; \; k = 1, 2)$$

то, умножая (2.33) на $\partial u_k / \partial x_j^{(k)}$ и суммируя по j, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_j^{(k)}} dx_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j^{(k)}}{\partial x_{iq}} \frac{\partial u_k}{\partial x_j^{(k)}} dx_{iq} + dt_q^{(k)} \left\{ \sum_{j=1}^{n} X_j(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \frac{\partial u_k}{\partial x_j^{(k)}} \right\} \tag{2.34}$$

В левой части (2.34) имеем нуль, так как по определению функции u_k сечение S_k является поверхностью уровня этой функции. Решая полученное уравнение, найдем

$$\frac{\partial t_q^{(k)}}{\partial x_{iq}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_j^{(k)}} \frac{\partial x_j^{(k)}}{\partial x_{iq}} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_j^{(k)}} X_j(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \right)^{-1} \tag{2.35}$$

Последний множитель в правой части (2.35) удовлетворяет оценке (2.3), поэтому в точках q из M_3, лежащих в $J(R_2)$, производные $\partial v / \partial x_{iq}$ существуют и непрерывны.

Пусть q принадлежит классу M_3. Покажем, что при приближении точки q к некоторой точке p из M_1 производные $\partial v / \partial x_{iq}$ стремятся к значению, вычисляемому по формуле (2.30). Действительно, вследствие (2.3), (2.14) и (2.35), величины $\partial t_q^{(k)} / \partial x_{iq}$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{\partial t_q^{(k)}}{\partial x_{iq}}\right| < Ke^{nLt_q^{(k)}} \qquad (k=1,\,2) \tag{2.36}$$

где K — постоянная. Рассмотрим «среднюю» точку $Q = f(q, t(q))$. Временная длина θ дуги от точки Q до точки $f(q, t_q^{(1)})$, лежащей на S_1, удовлетворяет неравенству $\theta > \theta(\varepsilon)$, где $\varepsilon^2 = x_{1Q}^2 + \ldots + x_{nQ}^2$, по определению числа $\theta(\varepsilon)$. Неравенству $\theta > \theta(\varepsilon)$ удовлетворяет также временная длина дуги от точки Q до точки $f(p, t_q^{(2)})$, лежащей на S_2. По определению $T(\varepsilon)$ числа $t_q^{(k)}$ удовлетворяют неравенству

$$|t_q^{(k)}| < 2T(\varepsilon) \qquad (k=1,\,2) \tag{2.37}$$

Следовательно, для второго слагаемого в (2.32) имеем оценку

$$\left|G[\psi(q, t(q))]\frac{\partial t(q)}{\partial x_{iq}}\right| \leqslant G[\varphi(\theta(\varepsilon))]\,Me^{2nLT(\varepsilon)} \leqslant MG[\varphi(\theta(\varepsilon))]\,N[\theta(\varepsilon)] \tag{2.38}$$

где M — постоянная. При $q \to p$ «средняя» точка Q стремится к 0, т. е. $\varepsilon \to 0$ и $\theta(\varepsilon) \to \infty$. Следовательно, второе слагаемое в (2.32) при этом стремится к нулю по свойству (2.22) функции G. Утверждение о том, что (2.32) стремится тогда к (2.30), следует из равномерной сходимости интеграла (2.30), так как $t(q) \to +\infty$ при $q \to p$. Аналогично показывается, что производные $\partial v / \partial x_{iq}$ для q из M_3 внутри $J(R_2)$ стремятся к (2.31) при $q \to p$, где p — точка класса M_2. Заметим, что из предыдущих оценок следует также $\partial v / \partial x_{iq} \to 0$ при $q \to 0$ для всех q из M_3.

Рассмотрим точку p из M_1, лежащую внутри $I(R_2)$ и не являющуюся внутренней для множества M_1. Множество точек класса M_2, заключенных в области $J^+(\varepsilon_1) - J(\varepsilon_2)$, при любых $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ является, как указывалось выше, множеством замкнутым. Поэтому существует окрестность W точки p, содержащая лишь точки классов M_1 и M_3. Покажем, что производные $\partial v / \partial x_i$ в точке p такого типа существуют и вычисляются по формуле (2.30). Пусть точка q принадлежит классу M_3. [Если q принадлежит классу M_1, то при $q \to p$ левая часть (2.39) стремится к правой части (2.30).] По определению функции v (2.25) и (2.27) имеем

$$\frac{v(q) - v(p)}{x_{iq} - x_{ip}} = \int\limits_{(q)}^{0} \frac{G[\psi(q, \tau)] - G[\psi(p, \tau)]}{x_{iq} - x_{ip}}\,d\tau + \int\limits_{t(q)}^{\infty} \frac{G[\psi(p, \tau)]}{x_{iq} - x_{ip}}\,d\tau \tag{2.39}$$

Если $\rho[p, q]$ — достаточно малая величина, то, вследствие интегральной непрерывности, и $f(p, t) \to 0$ при $t \to \infty$ должно быть $\rho[f(q, t(q)), 0] = \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, так как $t(q) \to \infty$ при $q \to p$. При этом $t(q) > {}^1/_3 |t_q^{(k)}|$ $(k=1,\,2)$ потому, что при $q \to p$ величины $t(q)$ и $t_q^{(2)}$ неограниченно возрастают, а величина $t_q^{(1)}$ остается ограниченной и стремится к временной длине дуги $f_1(p, t)$ от точки p до точки $f_1(p, t_p^{(1)})$, лежащей на сечении S_1, и, кроме того, по определению $t(q)$ должно быть $t(q) = {}^1/_2(t_q^{(1)} + t_q^{(2)})$.

Имеем $|x_{iq} - x_{ip}| \geqslant \eta(\varepsilon)$. Тогда по определению (2.8) числа $\theta(\varepsilon)$ имеем $\theta(\varepsilon) < t_q^{(2)} < 3t(q)$, и так как $N(t)$ является возрастающей функцией, то по определению (2.13) для второго слагаемого в (2.39) получим

$$\left|\int\limits_{\infty}^{t(q)} \frac{G[\psi(p, \tau)]}{x_{iq} - x_{ip}} = d\tau\right| < \int\limits_{{}^1/_3\theta(\varepsilon)}^{\infty} \frac{G[\varphi(\tau)]}{\eta(\varepsilon)} d\tau < \int\limits_{{}^1/_3\theta(\varepsilon)}^{\infty} G[\varphi(\tau) N(\tau)] d\tau$$

Вследствие (2.8) и (2.21) второе слагаемое в (2.39) стремится к нулю при $q \to p$, так как при этом $\varepsilon \to 0$.

Применяя к первому слагаемому (2.39) теорему о среднем, получим

$$\int\limits_{t(q)}^{0} \frac{G[\psi(q, \tau)] - G[\psi(p, \tau)]}{x_{iq} - x_{ip}} d\tau =$$

$$= 2 \int\limits_{t(q)}^{0} G'[\psi[q^*(\tau), \tau)] \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j(q^*(\tau), \tau) \frac{\partial x_j(q^*(\tau), \tau)}{\partial x_{iq}} \right\} d\tau$$

где $q^*(\tau)$ — некоторая внутренняя точка отрезка pq. Из равномерной сходимости интеграла (2.25) и оценок (2.5) и (2.4) следует, что производные $\partial v / \partial x_{ip}$ существуют и вычисляются по формуле (2.30).

Аналогичным образом можно показать, что и в точках p класса M_2, лежащих в $J(R_2)$ и не являющихся внутренними для множества M_2, производные $\partial v / \partial x_{ip}$ существуют и вычисляются по формуле (2.31).

Таким образом, показано, что функция $v(p)$ непрерывно дифференцируема в точках p, лежащих внутри $J(R_2)$ и отличных от 0. Кроме того, производные $\partial v / \partial x_{ip}$ стремятся к нулю при $p \to 0$. Вследствие равномерной сходимости интегралов (2.25) и (2.26) функция $v(p)$ непрерывна во всех точках окрестности $J(R_2)$. Используя непрерывность функции $v(p)$ в точке O и (2.28), заключаем, что $\partial v / \partial x_i = 0$ в точке O, так как

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_0 = \lim_{p \to 0} \left[\frac{v(p) - v(0)}{x_{ip}}\right] = \lim_{p^* \to 0} \left(\frac{\partial v}{\partial x_{ip^*}}\right) = 0$$

где p^* — некоторая внутренняя точка отрезка Op.

Достаточность условий теоремы доказана; докажем их необходимость.

Пусть в окрестности U точки O существует функция $v(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая условиям теоремы. Обозначим через $v(p, t)$ значение v вдоль траектории $f(p, t)$. Предположим, что существует траектория $f(p, t)$, лежащая целиком внутри некоторой сферы $J^+(R)$, расположенной внутри U. ω — предельное множество $f(p, t)$ — содержит траекторию $f(q, t)$, устойчивую по Пуассону [5]. Траектория $f(q, t)$ лежит целиком внутри $J^+(R)$. Пусть $f(q, t)$ отлична от 0. Тогда $\lim |v(q, t) - v(q, 0)| = 0$ при $t \to \infty$, что противоречит монотонности $v(q, t)$ по времени.

Аналогичным образом устанавливается, что α — предельное множество $f(p, t)$ — не содержит траекторий, отличных от 0 и устойчивых по Пуассону. Итак, следует рассмотреть лишь возможность, когда 0 является одновременно ω- и α-предельной точкой для $f(p, t)$. В этом случае $\lim v(p, t) = 0$ при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$, что противоречит монотонности $v(p, t)$. Противоречие доказывает необходимость условий теоремы.

Замечание. Мы доказали, что при наличии в произвольно малой окрестности точки O целых траекторий системы (1.1), отличных от O, не может существовать функция $v(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая знакоопределенную производную в силу уравнений (1.1). Нетрудно показать, несколько усложняя доказательство, что при этих условиях нельзя построить и функцию $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, зависящую от времени и имеющую знакоопределенную производную dv/dt, если только на функцию $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ наложить обычное для соответствующих теорем А. М. Ляпунова требование, чтобы функция v допускала бесконечно малый высший предел в точке O.

§ 3. Рассмотрим вопрос об обращении первой теоремы Ляпунова о неустойчивости[1] (стр. 87).

Теорема 3.1. Пусть решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1.1) неустойчиво. Тогда для того, чтобы в окрестности точки $O(0, \ldots, 0)$ существовала функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ класса C^1, принимающая в произвольной близости точки O положительные значения, и такая, что производная dv/dt в силу уравнений (1.1) является функцией определенно положительной в этой окрестности, необходимо и достаточно, чтобы существовала окрестность точки O, не содержащая целиком траекторий системы (1.1), отличных от O.

Доказательство. Вследствие теоремы 2.1 требуется доказать лишь достаточность условий теоремы. Если существует окрестность O, не содержащая целиком траекторий, отличных от O, то согласно теореме 2.1 существует функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ класса C^1, имеющая в некоторой окрестности точки O определенно положительную производную dv/dt в силу уравнений (1.1). Функция v не может быть знакоотрицательной, так как если $v(p) = 0$ при $p \neq 0$, то, вследствие $[dv/dt]_p > 0$, в окрестности точки p должны быть точки q, где $v(q) > 0$. Если предположить, что функция v является определенно отрицательной, то решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1.1) было бы асимптотически устойчивым[1] (стр. 85), что противоречит условию теоремы. Итак, функция v должна удовлетворять всем условиям теоремы II Ляпунова о неустойчивости. Теорема доказана.

Теорема 3.1 позволяет выяснить вопрос о грубости[3] свойства неустойчивости. В общем случае неустойчивость равновесия для уравнений (1.1) не является грубым свойством. Рассмотрим пример:

$$\frac{dx}{dt} = xu(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = yu(x, y) \tag{3.1}$$

причем $u(x, y)$ — функция класса C^1, удовлетворяющая в окрестности точки $O(0, 0)$ условиям

$$u(x, y) < 0 \quad \text{вне } H^+, \qquad u(x, y) > 0 \quad \text{на } H \tag{3.2}$$

где область H определена следующим образом: рассмотрим лучи, соответствующие монотонной последовательности $\pi > \varphi_1 > \ldots > \varphi_n > \ldots$, $\lim \varphi_n = 0$ при $n \to \infty$ (φ — полярный угол), точка p принадлежит области H, если она лежит внутри одного из секторов $\varphi_k < \varphi < \varphi_{k+1}$ и координаты ее удовлетворяют неравенству (где ρ — расстояние от точки O)

$$\rho > \frac{[\varphi_k - \varphi_{k+1}]^2}{k\,[\varphi - \varphi_k]\,[\varphi_{k+1} - \varphi]} \tag{3.3}$$

Нетрудно обычными методами распространения функций[8] (т. I) показать, что такую функцию всегда можно построить (см. лемму 4.2).

Решение $x = y = 0$ уравнений (3.1) неустойчиво. Если предположить, что неустойчивость решения $x = y = 0$ является грубым свойством, то можно указать определенно положительную функцию $\eta(x, y)$, обращающуюся в нуль лишь в точке $O(0, 0)$ и такую, что решение $x = y = 0$ уравнений

$$\frac{dx}{dt} = xu(x, y) + R_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = yu(x, y) + R_2(x, y) \tag{3.4}$$

также неустойчиво при $|R_i| < \eta$ $(i = 1,2)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $m(\varepsilon) = \min \eta(x, y)$ на сфере $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$. Можно указать сектор $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_k$, в котором $u < m(\varepsilon)$. Обозначим через $\delta(\varepsilon) = \min \rho\,[p, 0]$ для точек p из области H, лежащих вне сектора $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_k$. Определим функции

$$R_1(x, y) = -xm\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \qquad R_2(x, y) = -ym\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \tag{3.5}$$

(Очевидно, $m(\varepsilon)$ всегда можно считать такой функцией, что R_1, R_2 дифференцируемы в O.)

Тогда решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ уравнений (3.4), начальная точка которых лежит в области $x^2 + y^2 < \delta(\varepsilon)$, не может покинуть окружность $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ при $t > 0$. Действительно, траектории системы (3.4) направлены вдоль лучей $\varphi = \text{const}$, траектории, начальная точка которых лежит вне сектора $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_k$ внутри δ-окрестности O стремятся к точке O, так как там $d(x^2 + y^2)/dt < 0$ в силу уравнений (3.4). Траектории, начальные точки которых лежат в δ-окружности O, внутри сектора $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_k$ не могут пересечь поверхность $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, так как на этой поверхности внутри указанного сектора выполняется неравенство

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dt} = 2(x^2 + y^2)(u(x, y) - m(\varepsilon)) < 0$$

по выбору сектора $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_k$. Следовательно, при нашем выборе функций R_1 и R_2 решение $x = y = 0$ уравнений (3.4) будет устойчивым.

Итак, в отдельных случаях неустойчивость равновесия не является грубым свойством. Однако, если точка равновесия O системы (1.1) является изолированной в том смысле, что в окрестности ее не содержится целиком траекторий уравнений (1.1), то, вследствие существования функции Ляпунова, неустойчивость равновесия будет грубым свойством.

Теорема 3.2. Пусть особая точка $O(0, \ldots, 0)$ системы (1.1) является неустойчивой точкой и существует окрестность этой точки, не содержащая целиком траекторий системы (1.1), отличных от 0. Можно указать непрерывную функцию $\eta(x_1, \ldots, x_n)$, положительную всюду, кроме точки O, и такую, что при выполнении неравенства

$$\left(\sum_{i=1}^{n} R_i(x_1, \ldots, x_n, t)\right)^{1/2} < \eta(x_1, \ldots, x_n)$$

точка O будет неустойчивой и для уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) + R_i(x_1, \ldots, x_n, t)$$

Доказательство этой теоремы (используя факт существования функции Ляпунова (теорема 3.1)) проводится аналогично доказательству теоремы 5.2 из работы Е. А. Барбашина [3], где доказана грубость свойства асимптотической устойчивости точки O.

§ 4. Наиболее общие достаточные условия неустойчивости очевидного решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1.1) даются второй теоремой Ляпунова о неустойчивости [1] (теорема III, стр. 92) и теоремой Н. Г. Четаева о неустойчивости [4] (стр. 34).

Вопрос об обращении теоремы [4] рассматривался Н. Г. Четаевым. При этом был указан процесс построения некоторых функций, для которых область положительности производной $dv/dt > 0$ захватывала произвольно малую окрестность положения равновесия $x_1 = \ldots = x_n = 0$, и таких, что $v > 0$ в области $dv/dt > 0$, а также $v \to 0$ при приближении к границе этой области. В настоящей статье, развивая метод, использованный Н. Г. Четаевым для построения указанных выше функций, показывается, что в любом случае неустойчивости решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1.1) существует функция $v(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая теореме III Ляпунова и теореме Н. Г. Четаева и имеющая в некотором смысле максимально возможную область знакоположительности $dv/dt > 0$. Последнее нужно понимать следующим образом.

Рассмотрим сферу $J(\varepsilon)$ радиуса ε. Если точка $O(0, \ldots, 0)$ неустойчива, то при достаточно малом, фиксированном ε внутри $J(\varepsilon)$ в любой близости начала координат O будут существовать точки p такие, что траектория $f(p, t)$ покидает сферу $J^+(\varepsilon)$ при возрастании времени. В дальнейшем эту окрестность $J(\varepsilon)$ будем считать *фиксированной*. Множество G всех точек p из $J^+(\varepsilon)$, для которых $f(p, t)$ покидает $J^+(\varepsilon)$ при возрастании времени, назовем областью неустойчивости точки O.

Очевидно, если функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условиям теоремы III Ляпунова или теоремы Н. Г. Четаева о неустойчивости, что область $dv/dt > 0, v > 0$ не может выходить за пределы области G, так как согласно доказательству этих теорем всякая траектория, начинающаяся в области $dv/dt > 0, v > 0$, покидает сферу $J^+(\varepsilon)$, если $J^+(\varepsilon)$ лежит в той окрестности равновесия, где выполнены условия теоремы. В этом параграфе доказывается, что существует функция v, удовлетворяющая условиям указанных выше теорем о неустойчивости, и такая, что область $dv/dt > 0$ совпадает с областью неустойчивости G.

Теорема 4.1. Для того чтобы решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1.1) было неустойчивым, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки $O(0, \ldots, 0)$ существовала функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ класса G^1, удовлетворяющая условиям теоремы III Ляпунова, т. е. такая, что ее производная по времени в силу уравнений (1.1) имеет вид:

$$\frac{dv}{dt} = \lambda v + w \tag{4.1}$$

где функция w является знакоположительной или тождественно равна нулю, λ — положительная постоянная и функция v принимает положительные значения в произвольной близости начала координат $O(0, \ldots, 0)$. Область положительности производной $dv/dt > 0$ совпадет с областью неустойчивости G. Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 4.1. Область G является открытым множеством в $J^+(\varepsilon)$. Утверждение леммы следует непосредственно из определения области неустойчивости G и факта непрерывности решений по начальным данным.

Лемма 4.2. Рассмотрим окрестность U точки $O(0, \ldots, 0)$, содержащую сферу $J^+(\varepsilon)$. Пусть H — замкнутое множество, имеющее точки внутри U. Тогда существует функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ класса C^1 такая, что $u(p) = 0$ при p из H и $u(p) > 0$ в области U вне H.

Доказательство. Рассмотрим множество $U_{4\varepsilon_1}$ точек p из U, удовлетворяющих условию $\rho[H, p] \geqslant 4\varepsilon_1$. Очевидно, $U_{4\varepsilon_1}$ — замкнутое множество.

Пусть $p_{k, l, \ldots, m}$ — точки с координатами

$$x_1 = k\,\frac{\varepsilon_1}{n}, \qquad x_2 = l\,\frac{\varepsilon_1}{n}, \ldots, x_n = m\,\frac{\varepsilon_1}{n}$$

где числа $k, l, \ldots, m$ пробегают всевозможные целые значения.

Для любой точки p из U можно указать по крайней мере одну точку $p_{k, l, \ldots, m}$ такую, что $\rho[p, p_{k, l, \ldots, m}] < \varepsilon_1$.

Обозначим через $J_{k, l, \ldots, m}(\varepsilon_1)$ внутренность сферы радиуса ε_1 с центром в точке $p_{k, l, \ldots, m}$. Каждая точка p из U лежит внутри конечного числа областей $J_{k, l, \ldots, m}(2\varepsilon_1)$. Это число ограничено постоянной N, не зависящей от ε_1. Из системы областей $J_{k, l, \ldots, m}(\varepsilon_1)$ выберем сферы, содержащие точки из $U_{4\varepsilon_1}$, и перенумеруем их натуральными числами j от 1 до N_1. Обозначим внешность сферы $J_j(\varepsilon_1)$ через $E_j(\varepsilon_1)$.

Определим функции $\varphi_j^{\varepsilon_1}(p)$ следующим образом: $\varphi_j^{\varepsilon_1}(p) = 0$ в точках p из $J_i(\varepsilon_1)$ и $\varphi_j^{\varepsilon_1}(q) = 1$ в точках q, лежащих в области $E_j(2\varepsilon_1)$, причем функция $\varphi_j^{\varepsilon_1}$ положительна в области $E_j(\varepsilon_1)$, не превышает единицы и является функцией класса C^1. Функции $\varphi_j^{\varepsilon_1}$ можно построить [8] так, что

$$\left|\frac{\partial \varphi_j^{\varepsilon_1}}{\partial x_i}\right| < \frac{2}{\varepsilon_1} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, N_1) \tag{4.2}$$

всюду в области U. Рассмотрим функцию

$$\Phi_{\varepsilon_1}(p) = \frac{\varepsilon_1}{2}\left[8 - 7\prod_{j=1}^{N_1} \varphi_j^{\varepsilon_1}\right]$$

Функция $\Phi_{\varepsilon_1}(p)$ положительна при всех x_i, удовлетворяет неравенству

$$\Phi_{\varepsilon_1}(p) < 4\rho[H, p] \quad \text{при} \quad \rho[H, p] > \varepsilon_1 \tag{4.3}$$

и, кроме того, $\Phi_{\varepsilon_1}(q) = \frac{1}{2}\varepsilon_1$ в точках q, для которых $\rho[H, q] < \varepsilon_1$.

Производные функции Φ_{ε_1} удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{\partial\Phi_{\varepsilon_1}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}\right| < 7N_1 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.4}$$

Выполним построения, аналогичные предыдущим, для числа $\varepsilon_2 = \frac{1}{8}\varepsilon_1$. Обозначим

$$\Phi_{\varepsilon_2} = \Phi_{\varepsilon_1} - \frac{7}{2}\varepsilon_2 \prod_{j=1}^{N_2} \varphi_j^{\varepsilon_2}$$

Функция Φ_{ε_2} также удовлетворяет неравенствам (4.3) и (4.4). Продолжая этот процесс для последовательности

$$\varepsilon_2,\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{8}, \ldots, \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_1}{8^{n-1}}, \ldots$$

построим функцию $\Phi(p) = \lim \Phi_{\varepsilon_n}(p)$ при $n \to \infty$.

Функция $\Phi(p) = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ равна нулю на H, определенно положительна в области $U - H$ и имеет в этой области ограниченные частные производные. Кроме того, $\Phi(p) < 4\rho[H, p]$.

Функция $u(x_1, \ldots, x_n) = \Phi^2(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет всем условиям леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Рассмотрим сферу $J(R)$, где $R > \varepsilon$, и зададим монотонную последовательность положительных чисел $\delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots$, сходящуюся к нулю, причем $\delta_k < \delta/2$ при всех k, где δ — диаметр наибольшей сферы, вписанной в G. Обозначим через H множество точек $J^+(R) - G$ и через G_{δ_k} множество точек p из G, удовлетворяющих условию $\rho[H, p] \geqslant \delta_k$. Вследствие замкнутости H множество G_{δ_k} при любом k является замкнутым. Рассмотрим точку p из G_{δ_k}. Вследствие интегральной непрерывности можно построить столь малую трубчатую окрестность $g(p)$ траектории $f(p, t)$, лежащую целиком внутри $J(R)$, и такую, что одно сечение ее при $t = -\tau$ является гиперплоскостью, проходящей через точку $f(p, -\tau)$ (где τ — достаточно малое положительное число) ортогонально к направлению траекторий в этой точке, а другое сечение при $t = T(p)$ лежит вне $J^+(\varepsilon)$, причем в области $J^+(\varepsilon)$ интегральная трубка $g(p)$ проходит целиком внутри G. Сечение трубки при $t = -\tau$ можно выбрать столь малым, чтобы все траектории из $G(p)$ пересекали его под углом, бо́льшим $^1/_4\,\pi$. Если такие трубчатые окрестности $g(p)$ построить для всех точек p из множества G_{δ_k}, то система трубчатых окрестностей $g(p)$ покроет множество G_{δ_k}. Из системы окрестностей $g(p)$ можно выбрать систему конечного числа окрестностей $g(p)$, целиком покрывающую ограниченное замкнутое множество G_{δ_k}. Выполняя подобные построения для всех k, придем к выводу, что область G может быть покрыта счетной системой трубчатых окрестностей $g(p)$, причем внутри $J^+(\varepsilon)$ теоретико множественная сумма окрестностей $g(p)$ из этой системы совпадает с G. Перенумеруем трубчатые окрестности выделенной счетной системы натуральными числами $g_1, \ldots, g_n, \ldots$

Рассмотрим область g_k. Согласно лемме 4.2, можно построить функцию $u_k(x_1, \ldots, x_n)$ класса C^1, положительную в g_k и равную нулю вне g_k.

Пусть q — некоторая точка из g_k. Определим функцию $V_k(q)$ так:

$$V_k(q) = \int_{t_q}^{0} u_k(q, t)\, dt \tag{4.5}$$

где $u_k(q, t)$ — значение функции u_k вдоль $f(q, t)$, а t_q — тот момент времени, в который $f(q, t)$ пересекает отрицательное сечение трубки g_k. Вне области g_k положим $V_k \equiv 0$. Используя оценки, приведенные выше (2.32), (2.14), (2.35), (2.36), и учитывая тот факт, что временная длина всякой дуги из g_k ограничена некоторым числом T_k, нетрудно установить, что функция V_k является функцией класса C^1 внутри g_k, причем для производной dV_k/dt вдоль траектории имеем

$$\left.\frac{dV_k}{dt}\right|_q = u\ (q)$$

Аналогичным образом из оценок (2.14), (2.35), а также из того факта, что $u_k(x_1, \ldots, x_n) \to 0$ и $\partial u_k / \partial x_i \to 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ при приближении к границе g_k, следует, что функция V_k обладает непрерывными частными производными $\partial V_k / \partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ во всей области G внутри $J(\varepsilon)$, причем $\partial V_k / \partial x_i \to 0$, $V_k \to 0$ при приближении к границе области g_k внутри $J(\varepsilon)$. Таким образом, построена функция V_k класса C^1 такая, что

$$\frac{dV_k}{dt} > 0, \quad V_k > 0 \quad \text{в области } g_k, \quad \frac{dV_k}{dt} = 0, \quad V_k = 0 \text{ вне } g_k \text{ внутри } J^+(\varepsilon)$$

Умножая V_k на постоянный множитель, всегда можно добиться, чтобы

$$|V_k| < \frac{1}{2^k}, \quad \left|\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right| < \frac{1}{2^k} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.6}$$

Выполняя такие построения для $k = 1, \ldots, n, \ldots$, определим функцию V рядом

$$V = V_1 + \cdots + V_n + \cdots \tag{4.7}$$

Очевидно, построенная функция V вследствие (4.6) будет функцией класса C^1 в $J(\varepsilon)$, причем

$$\frac{dV}{dt} > 0, \quad V > 0 \quad \text{в области } G, \quad V \equiv 0, \quad \frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{внутри } J^+(\varepsilon) \text{ вне } G \tag{4.8}$$

Таким образом, построенная функция удовлетворяет всем условиям теоремы Н. Г. Четаева о неустойчивости[1]. Построим теперь функцию, удовлетворяющую условиям второй теоремы Ляпунова о неустойчивости. В замкнутой области $V(p) \geqslant z > 0$ непрерывная функция dV/dt имеет положительный минимум $n(z)$. Пусть $F(z)$ — непрерывная, положительная возрастающая функция при $z > 0$, удовлетворяющая неравенствам

$$F(z) < n(z), \qquad F(z) < z^2 \tag{4.9}$$

Обозначим

$$\psi(z) = \int_0^z F(z)\, dz \tag{4.10}$$

---

[1] Приведенный здесь метод может быть применен для доказательства возможности обращения теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Вследствие (4.9) выполняются неравенства

$$\psi(z) < z^2, \qquad \psi(z) < n(z), \qquad \left|\frac{d\psi}{dz}\right| < z \tag{4.11}$$

(Очевидно, умножая V на постоянный множитель, можно сделать $z < 1$ в $J(\varepsilon)$). Рассмотрим функцию

$$f(z) = \exp \int_c^z \frac{1-\psi'}{\psi} dz \tag{4.12}$$

где c — положительная постоянная; $c > z$ для всех z из области $J^+(\varepsilon)$.

Интеграл в показателе (4.12) расходится при $z \to 0$ вследствие (4.11), поэтому $f(z) \to 0$ при $z \to 0$. Имеем в области G

$$\frac{df}{dz} = f(z)\frac{1-\psi'(z)}{\psi(z)} \quad \text{или} \quad f(z) = \frac{df}{dz}\psi + \frac{d\psi}{dz} f \tag{4.13}$$

Интегрируя (4.13), получим

$$\int_0^z f(z)\,dz = f(z)\,\psi(z)$$

Покажем, что функция

$$v(p) = \int_0^{V(p)} f(z)\,dz$$

удовлетворяет условиям второй теоремы Ляпунова о неустойчивости. Функция v принадлежит классу C^1, $v(p) = 0$ при p из $J^+(\varepsilon) - G$ и $v(p) > 0$ при p из G внутри $J(\varepsilon)$. Вдоль траекторий системы (1.1) имеем вследствие определения функции $n(z)$

$$\frac{dv}{dt} = f(V)\frac{dV}{dt} > [f(z)\,n(z)]_{z=V(p)} > [f(z)\,\psi(z)]_{z=V(p)} = \int_0^{V_p} f(z)\,dz = v(p) \quad \text{при } p \text{ из } G$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{при } p \text{ из } J(\varepsilon) \text{ вне } G, \qquad \frac{dv}{dt} = v + w \qquad \left(w = \frac{dv}{dt} - v\right)$$

где w — знакоположительная функция. Теорема доказана.

Пользуюсь случаем выразить признательность Н. Г. Четаеву за его ценные замечания.

Поступила 9 IV 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.— Л., 1950.
2. Massera I. L. On Liapounoff's condition of stability. Annals of Mathematics, vol. 50, № 3, 1949.
3. Барбашин Е. А. Метод сечений в теории динамических систем. Мат. сб., т. XXIX вып. 2, 1951.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 2. Гостехиздат, М.— Л., 1949.
6. Еругин Н. П. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
7. Малкин И. Г. К вопросу об обращении теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II. Огиз—Гостехиздат, 1948.