ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРА

Л. Н. Белюстина (Горький)

Дадим условия существования центра в точке ($x=0,\ y=0$) для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+A_{11}x^2+A_{12}xy+A_{22}y^2}{y+B_{11}x^2+B_{12}xy+B_{22}y^2} \tag{1}$$

записанные в коэффициентах того же уравнения.

Дифференциальные уравнения (1) поворотом координатных осей на угол

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{A_{11}+A_{22}}{B_{11}+B_{22}}$$

приводятся к виду

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{-x_1+a_{11}x_1{}^2+a_{12}x_1y_1-a_{11}y_1{}^2}{y_1+b_{11}x_1{}^2+b_{12}x_1y_1+b_{22}y_1{}^2} \tag{2}$$

где

$$a_{11}=\frac{1}{\sigma^{3/2}}\left[A_{11}B^3+A_{12}AB^2+A_{22}A^2B-B_{11}AB^2-B_{12}BA^2-B_{22}A^3\right] \tag{3}$$

$$a_{12}=\frac{1}{\sigma^{3/2}}\left[-2A_{11}AB^2+A_{12}(B^3-BA^2)+2A_{22}AB^2+2B_{11}A^2B+B_{12}(A^3-AB^2)-2B_{22}A^2B\right.$$

$$b_{11}=\frac{1}{\sigma^{3/2}}\left[A_{11}AB^2+A_{12}A^2B+A_{22}A^3+B_{11}B^3+B_{12}AB^2+B_{22}A^2B\right]$$

$$b_{12}=\frac{1}{\sigma^{3/2}}\left[-2A_{11}A^2B-A_{12}(A^3-AB^2)+2A_{22}A^2B-2B_{11}AB^2+B_{12}(B^3-BA^2)+2B_{22}AB^2\right]$$

$$b_{22}=\frac{1}{\sigma^{3/2}}\left[A_{11}A^3-A_{12}A^2B+A_{22}AB^2+B_{11}A^2B-B_{12}AB^2+B_{22}B^3\right]$$

$$A\equiv A_{11}+A_{22},\qquad B\equiv B_{11}+B_{22},\qquad \sigma\equiv A^2+B^2$$

Для уравнения (2), согласно работам Каптейна [1], Дюляка [2] и Н. Н. Баутина [3], все случаи центра в точке $x=0,\ y=0$ могут быть представлены (этот вопрос затрагивался также Н. А. Сахарниковым [4]) равенствами нулю выражений:

$$\beta_1(b_{11}+b_{22})=0$$

$$a_{11}\alpha_1(b_{11}+b_{22})\left[5(b_{11}+b_{22})+\alpha_1\right]=0 \qquad \left(\begin{aligned}&\equiv\alpha_1-(a_{12}+2b_{11})\\&\equiv\beta_1-(b_{12}-2a_{11})\end{aligned}\right) \tag{4}$$

$$a_{11}\alpha_1(b_{11}+b_{22})^2\left[b_{11}b_{22}+2b_{22}{}^2+a_{11}{}^2\right]=0$$

Использование условий (4) при исследовании конкретного уравнения (1) затрудняется необходимостью предварительно преобразовать его к виду (2).

Подставляя выражения (3) в равенства (4), можно получить условия существования в точке $x=0$; $y=0$ центра для уравнения (1) в следующей форме:

$$\alpha A-\beta B=0$$

$$\left[A_{11}\alpha B-(3B_{11}+\alpha)\alpha A+(3A_{22}+\beta)\beta A\right](5B+\alpha)-B_{22}\beta A(5A+\beta)=0$$

$$A_{11}\alpha B^2+(3B_{11}+\alpha)\alpha AB+(3A_{22}+\beta)\beta AB-B_{22}\beta A^2\right]\left(A_{11}{}^2+B_{22}{}^2+A_{11}A+B_{22}B\right)=0$$

где $\alpha\equiv-(A_{12}+2B_{11})$, $\beta\equiv-(B_{12}+2A_{22})$, $A\equiv A_{11}+A_{22}$, $B\equiv B_{11}+B_{22}$.

Отметим, что второе из этих условий (при учете первого из них) может быть записано в случае $B\neq 0$ в следующем виде:

$$\left[A_{11}\alpha B^2-(3B_{11}+\alpha)\alpha AB+(3A_{22}+\beta)\beta AB-B_{22}\beta A^2\right]\frac{5B+\alpha}{B}=0$$

Поступила 23 XI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Kapteyn W., Verslagen Kon. Acad., Amsterdam XIX 1446 (1910); XX (1911); XXI, 27 (1912).
2. Dulac H., Bull. des Sci. Math., Sér. 2.32, 230 (1908).
3. Баутин Н. Н. ДАН СССР, т. XXIV, № 7, 1939.
4. Сахарников Н. А. ПММ, т. XII, 1948.