Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБЗОР РАБОТ ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. М. Старжинский

(Москва)

В настоящем обзоре рассматриваются способы эффективного определения устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Устойчивость тривиального решения в смысле Ляпунова для линейных систем равносильна ограниченности решений с любыми начальными условиями при $t \to +\infty$ (а для линейных систем канонического вида одновременно и при $t \to -\infty$). Рассматриваемый вопрос связан с устойчивостью периодических движений, когда коэффициентами уравнений возмущенного движения являются периодические функции времени.

Ряд вопросов в обзоре не обсуждается. Сюда относятся: метод Хилла[2, 20, 30, 43] вместе с многочисленной литературой по уравнению Матье[24, 89], применение метода малого параметра[7, 22, 56, 77] и метода усреднения[25] к исследованию устойчивости, исследования, связанные с динамической устойчивостью упругих систем[85].

Коэффициенты рассматриваемых систем или уравнений предполагаются действительными кусочно-непрерывными периодическими функциями действительного переменного t с периодом $\omega > 0$. Многие результаты остаются справедливыми и для суммируемых функций; мы не оговариваем этого, поскольку в каждой из работ указаны условия, накладываемые на коэффициенты. Некоторые из приведенных результатов имеют силу не только в случае периодических коэффициентов, это обстоятельство каждый раз отмечается.

Здесь в основном будут рассматриваться признаки устойчивости (неустойчивости) тривиального решения системы уравнений данного вида, которые могут быть выражены конечным числом неравенств

$$F_i(J_1, \ldots, J_k) < 0, \qquad (i = 1, \ldots, j) \tag{$*$}$$

где $J_1, \ldots, J_k$ суть некоторые функционалы от коэффициентов рассматриваемых систем уравнений, содержащие, быть может, постоянные, выбираемые из указываемых для них интервалов. Предполагая, что коэффициенты системы уравнений принадлежат определенному классу функций, такой признак именуется Л-критерием устойчивости (неустойчивости), если выполнено следующее условие. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такие значения $J_1^\circ, \ldots, J_k^\circ$ рассматриваемых функционалов, удовлетворяющие неравенствам

$$F_i(J_1^\circ, \ldots, J_k^\circ) < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, j)$$

и для которых нарушается хотя бы одно из неравенств ($*$), что найдется система коэффициентов, принадлежащих рассматриваемому классу функций со значениями функционалов, равными $J_1^\circ, \ldots, J_k^\circ$, для которой тривиальное решение будет неустойчивым (устойчивым). Сказанное относится и к случаю, когда в некоторых из неравенств (*) стоит знак $\leqslant$ вместо $<$.

Поясним указанное определение примером. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\,x = 0 \tag{0.1}$$

где $p(t)$ — неотрицательная и не обращающаяся тождественно в нуль кусочно-непрерывная периодическая функция с периодом ω. Пусть $k = 1$ и

$$J_1 = \int_0^\omega p(t)\,dt$$

Тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво, если

$$\omega J_1 - 4 \leqslant 0 \tag{0.2}$$

Указанный признак является Л-критерием, ибо (см. [6, 13]) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдутся функции $p_0(t)$ из рассматриваемого класса, удовлетворяющие неравенству

$$\omega J_1^\circ - 4 < \varepsilon \qquad \left(J_1^\circ = \int_0^\omega p_0(t)\,dt\right)$$

для которых тривиальное решение будет неустойчивым.

Этот классический результат Ляпунова, опубликованный в его знаменитой диссертации [5] (теорема II, § 49), явился первым из всех известных Л-критериев. Более простое геометрическое доказательство было дано Жуковским в статье[6]. Кроме того, в этой статье Жуковский впервые связал вопрос об устойчивости с расстоянием между последовательными нулями решений и получил следующий признак устойчивости тривиального решения уравнения (0.1), также являющийся Л-критерием:

$$\frac{n^2\pi^2}{\omega^2} \leqslant p(t) \leqslant \frac{(n+1)^2\pi^2}{\omega^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{0.3}$$

Л-критерий Жуковского требует, чтобы

$$\sqrt{\sup p(t)} - \sqrt{\inf p(t)} \leqslant \frac{\pi}{\omega}$$

После этого Ляпунов в течение последующих десяти лет возвращался к исследованию устойчивости тривиального решения уравнения (0.1) и получил ряд основополагающих результатов. Эти результаты, к сожалению, в течение нескольких десятков лет не привлекали внимания. Более того, в работах Г. Гамеля [15], О. Гаупта [16], Г. Крамерса [26], Г. Швердтфегера [42], Л. Пайпса [95] результаты Ляпунова повторялись, причем в частных предположениях.

В многочисленной литературе советских авторов, посвященной затрагиваемому кругу вопросов, используются разнообразные методы для получения признаков устойчивости. Сюда относятся чисто аналитические методы с привлечением теории аналитических и, в частности, целых функций, методы качественной теории дифференциальных уравнений, геометрические и топологические методы и методы, связанные с общей теорией краевых задач; приобретает значение также матричное исчисление и, в частности, теория некоторых новых специальных классов матриц.

В первой части обзора рассматриваются уравнения и системы второго порядка. В первых двух параграфах рассматривается уравнение (0.1), причем § 1 отводится обзору работ Ляпунова, а § 2—обзору последующих исследований. В § 3 рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + q(t)\,\dot{x} + p(t)\,x = 0 \tag{0.4}$$

описывающее, как известно, процессы в системе с одной степенью свободы при наличии диссипации энергии. В § 4 и 5 рассматривается система двух уравнений, причем § 4 отводится системе канонического вида.

Во второй части обзора рассматривается система n-го порядка, выделяя в § 7 систему канонического вида, а в § 8 ее частный случай — векторное уравнение

$$\ddot{y} + \mu \mathrm{P}(t)\, y = 0$$

Краткость изложения не позволила остановиться на существе методов получения Л-критериев устойчивости, в частности: строение областей устойчивости и неустойчивости в функциональном пространстве коэффициентов в работах В. А. Якубовича [65, 87, 97], И. М. Гельфанда и В. Б. Лидского [99], сущность вариационных задач в работах Г. Борга [38] и В. А. Якубовича [97], свойства собственных значений краевых задач в работах М. Г. Крейна [74, 98]. Однако общие результаты Ляпунова, являющиеся отправным пунктом значительной части современных исследований, нашли здесь освещение.

В обзоре мы стремились по возможности сравнить различные признаки и дать рекомендации для их применения. Такого рода сравнение было впервые выполнено в работах М. Г. Крейна [74, 98] и диссертации В. А. Якубовича [97], что вместе с наличием обзора В. И. Смирнова [49] существенно облегчило составление настоящего обзора. Нами упомянуты не все работы, включенные в список литературы, составленный в хронологическом порядке.

В тексте применяется обозначение $f_{\text{ср}}$ для средней величины периодической функции f:

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(t)\, dt$$

и обозначения $a_{\text{наим}}$ и $a_{\text{наиб}}$ для наименьшего и наибольшего значения функции или совокупности величин (для кусочно-непрерывных функций точнее было бы писать inf и sup).

Содержание обзора докладывалось на семинаре по общей механике Института механики АН СССР (руководитель Н. Г. Четаев) и на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений ЛГУ (руководитель Н. П. Еругин). Считаю, что если обзор достигнет своей цели, то этим я во многом обязан ценным советам и замечаниям при обсуждениях, в которых принимали участие многие товарищи.

§ 1. 1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \lambda\, p(t)\, x = 0 \qquad (p(t+\omega) = p(t)) \tag{1.1}$$

(λ — действительный параметр) и образуем два решения $f(t; \lambda)$ и $\varphi(t; \lambda)$ этого уравнения, определяемые начальными условиями

$$f(0; \lambda) = 1, \quad \dot{f}(0; \lambda) = 0; \qquad \varphi(0; \lambda) = 0, \quad \dot{\varphi}(0; \lambda) = 1$$

Как известно из теории Флоке [1], если положить

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}\,[f(\omega; \lambda) + \dot{\varphi}(\omega; \lambda)]$$

то при условии $A^2(\lambda) < 1$ тривиальное решение уравнения (1.1) устойчиво, а при условии $A^2(\lambda) > 1$ — неустойчиво. Среди различных методов вычисления $A(\lambda)$ метод, применяемый в [5], как отмечает Ляпунов в мемуаре [13], заслуживает особого внимания. Этот метод дает для функции $A(\lambda)$ представление

$$A(\lambda) = 1 - A_1\lambda + A_2\lambda^2 - \ldots \qquad \left(A_n = \frac{1}{2}\,[f_n(\omega) + \dot{\varphi}_n(\omega)]\right) \tag{1.2}$$

где $f_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ — функции, вычисляемые последовательно по формулам

$$f_n(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} p(t_2) f_{n-1}(t_2)\, dt_2, \qquad \varphi_n(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} p(t_2) \varphi_{n-1}(t_2)\, dt_2$$

в предположении, что $f_0(t) = 1$, $\varphi_0(t) = t$.

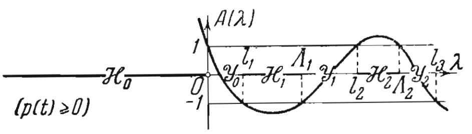
Ляпунов доказал [13], что, полагая $|p(t)| \leqslant L$ $(0 \leqslant t < \omega)$, имеем

$$|A_n| \leqslant \frac{\omega^{2n} L^n}{(2n)!} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

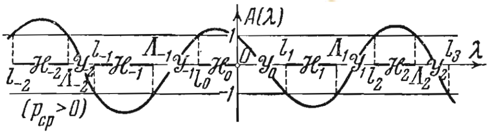
и, следовательно, будем иметь

$$|A(\lambda)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} (L|\lambda|)^n = \operatorname{ch}(\omega \sqrt{L|\lambda|}) < \exp(\omega \sqrt{L} |\lambda|^{\frac{1}{2}})$$

Таким образом, $A(\lambda)$ является целой функцией с порядком роста $|\lambda|^{\frac{1}{2}}$.



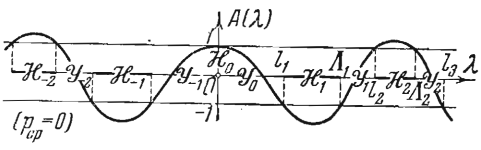
Фиг. 1



Фиг. 2

2. Заметки Ляпунова [10, 11] посвящены изучению расположения корней уравнения $A^2(\lambda) = 1$. На фиг. 1, 2, 3 схематически представлен график функции $A(\lambda)$ для $p(t) \geqslant 0$ и для знакопеременной функции p при $p_{\text{ср}} > 0$ и $p_{\text{ср}} = 0$. Заметим, что при $p_{\text{ср}} = 0$ $A(0) = 1$ соответствует максимуму $A(\lambda)$. Вообще говоря, при $\lambda \neq 0$ график функции $A(\lambda)$ может касаться прямых $A(\lambda) = \pm 1$; это обстоятельство на графиках не отмечается.

В заметке [10] p предполагается неотрицательной функцией. Ограничимся изложением содержания заметки [11], в которой p может быть и знакопеременной функцией в предположении для определенности, что $p_{\text{ср}} \geqslant 0$ [если $p_{\text{ср}} < 0$, то в уравнении (1.1) заменяем λ на $-\lambda$ и $p(t)$ на $-p(t)$]. В случае знакопеременной функции p



Фиг. 3

$$A^2(\lambda) = 1$$

для всех членов неубывающей последовательности (и уходящей в обе стороны на бесконечность)

$$\ldots, l_{-2}, \Lambda_{-2}, l_{-1}, \Lambda_{-1}, l_0, \Lambda_0 = 0, l_1, \Lambda_1, l_2, \Lambda_2, \ldots$$

причем для членов l_i, Λ_i с четным индексом имеем $A(\lambda) = 1$, а с нечетным индексом имеем $A(\lambda) = -1$. Иными словами, числа l_{2j}, Λ_{2j} $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ являются собственными значениями краевой задачи

$$\ddot{x} + \lambda p(t) x = 0; \qquad x(0) = x(\omega), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega)$$

а числа l_{2j-1}, Λ_{2j-1} $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — собственными значениями краевой задачи

$$\ddot{x} + \lambda p(t) x = 0; \qquad x(0) = -x(\omega), \quad \dot{x}(0) = -\dot{x}(\omega)$$

В случае знакопостоянной функции p собственных значений противоположного знака нет. Если среди членов последовательности существуют числа, удовлетворяющие равенствам $l_i = \Lambda_i$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то это двойные корни

уравнения $A^2(\lambda)=1$, остальные всегда будут простыми корнями. Но во всех случаях будем иметь
$$\Lambda_i < l_{i+1} \qquad (i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Вся действительная λ-ось разбивается на открытые интервалы $\mathscr{Y}_i$ (зоны устойчивости)
$$(\Lambda_i, l_{i+1}) \qquad (i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
(которые занумеруем по индексу левого конца интервала), в которых $A^2(\lambda)<1$ и дополнительное множество $\mathscr{H}$, состоящее, вообще говоря, из точек и замкнутых интервалов (а в случае $p(t)\geqslant 0$ содержащее отрицательную полуось λ).

Замкнутые интервалы $\mathscr{H}_i$ (зоны неустойчивости)
$$[l_i, \Lambda_i] \qquad (i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
также занумеруем по индексу левого конца интервала. Если λ принадлежит некоторой зоне устойчивости, то тривиальное решение уравнения (1.1) устойчиво. Если λ вместе с некоторой окрестностью принадлежит множеству $\mathscr{H}$, то $A^2(\lambda)>1$ и тривиальное решение уравнения (1.1) неустойчиво.

Остается охарактеризовать значения λ, соответствующие концам замкнутых интервалов $\mathscr{H}_i$, т. е. предположить, что λ будет равно одному из корней уравнения $A^2(\lambda)=1$. Если этот корень двойной, отличный от нуля, то все решения уравнения (1.1) являются периодическими или соответственно полупериодическими, т. е. удовлетворяют равенству $x(t+\omega)=\pm x(t)$, где следует брать тот из двух знаков, который принадлежит A. Если, напротив, этот корень простой, то одно из независимых решений будет удовлетворять предыдущему равенству, а второе будет неограниченным. Таким образом, если λ принадлежит замкнутому интервалу $\mathscr{H}_i$, то тривиальное решение уравнения (1.1) неустойчиво, если же замкнутый интервал $\mathscr{H}_i$ стянулся в точку (отличную от точки $\lambda=0$), то при соответствующем λ тривиальное решение уравнения (1.1) устойчиво. Напомним, что при $p(t)\geqslant 0$ отрицательная полуось λ является нулевой зоной неустойчивости $\mathscr{H}_0$ (теорема I, § 49 [5]).

Выводы Ляпунова о расположении зон устойчивости и неустойчивости вытекают из следующего свойства функции $A(\lambda)$: в каждой точке максимума имеем $A(\lambda)\geqslant 1$ (и в каждой точке минимума $A(\lambda)\leqslant -1$). Кроме того, Ляпунов [10, 11] выяснил связь между корнями уравнения $A^2(\lambda)=1$ и собственными значениями краевой задачи
$$\ddot{x}+\lambda p(t)\, x=0; \qquad x(a)=x(a+\omega)=0$$

Ляпунов не опубликовал доказательства полученных результатов. Через 20 лет Г. Гамель[15] и О. Гаупт[16], повидимому, не зная о результатах Ляпунова, повторили его исследования, но не в полном виде. Это обстоятельство было отмечено в заметке К. Р. Коваленко и М. Г. Крейна[66], где вместо уравнения (1.1) было рассмотрено несколько более общее уравнение[1]
$$\ddot{x}-q(t)\, x+\lambda p(t)\, x=0 \tag{1.3}$$

Доказательство результатов Ляпунова для этого обобщения было дано в диссертации К. Р. Коваленко[63]. В этой диссертации выясняется важность исследований Ляпунова, относящихся к случаю знакопеременной функции p, в вопросах динамической устойчивости стержней. Теория зон устойчивости Ляпунова играет важную роль в теории параметрического резонанса, некоторых вопросах квантовой механики (движение электрона в периодическом поле) и других.

---

[1] В заметке[66] показано, как уравнение (1.3) при $p(t)\equiv 1$ может быть преобразовано в уравнение (1.1) с положительным и дважды дифференцируемым коэффициентом. В силу этого преобразования результаты Г. Гамеля[15], О. Гаупта[16], Г. Крамерса[26] и Г. Швердтфегера[42], относящиеся к уравнению $\ddot{x}+[\lambda-q(t)]\, x=0$, являются простыми следствиями того, что было опубликовано Ляпуновым в заметке[10] в 1899 г.

3. Задачу статьи[8] Ляпунов формулирует следующим образом. Так как невозможно указать какой-либо метод, который позволял бы всегда при помощи конечного числа действий узнавать, имеем ли мы дело с одним из двух случаев ($A^2 < 1$ или $A^2 > 1$), то желательно по крайней мере знать возможно большее число признаков, достаточных для каждого из этих случаев. Два таких признака указаны Ляпуновым (теоремы I и II, § 49[5]). Другой признак неравенства $A^2 < 1$ был указан потом Жуковским[6]. Указанные признаки относятся лишь к случаям, когда функция p является знакопостоянной. Поэтому исследование в статье[8] основывается на таких преобразованиях уравнения (0.1) со знакопеременным коэффициентом $p(t)$, для которых коэффициент в преобразованном уравнении был бы знакопостоянным.

Именно, пусть $x = wy$, где w — положительная периодическая функция t с периодом ω, обладающая непрерывной второй производной $\ddot{w}$, и

$$\tau = \int_0^t \frac{dt_1}{w^2(t_1)}$$

новое независимое переменное. Тогда уравнение (0.1) преобразуется к виду

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + q(\tau)\, y = 0 \qquad (q(\tau) = w^3 [\ddot{w} + pw]_{t=t(\tau)})$$

Здесь q — периодическая функция τ с периодом

$$T = \int_0^\omega \frac{dt}{w^2(t)}$$

и величина A для преобразованного уравнения не изменится.

Первое преобразование приведено в пп. 3—14[8]. Определение w сводится к нахождению периодических решений уравнений вида $\ddot{w} + hw = h - p(t)$, где h — некоторая постоянная. Результаты исследования подробно разбираются на примере

$$\ddot{x} + \lambda(1 - \varepsilon \sin^n t)\, x = 0 \tag{1.4}$$

и для p, являющейся нечетной функцией с нулями через полупериод.

Второе преобразование излагается в пп. 15—24[8]. Функция w берется в виде

$$w = \exp\left(-\int v(t)\, dt\right)$$

где v — периодическая функция периода ω с непрерывной производной $\dot{v}$, удовлетворяющая условию $v_{\text{ср}} = 0$. При этом имеем

$$q = (p - \dot{v} + v^2) \exp\left(-4\int v\, dt\right)$$

Ляпунов показывает, что, положив в случае $p_{\text{ср}} \geqslant 0$

$$v = \int (p - p_{\text{ср}})\, dt$$

будем иметь

$$q = (p_{\text{ср}} + v^2) \exp\left(-4\int v\, dt\right) \geqslant 0$$

Заметим, что в случае $p_{\text{ср}} < 0$ при условии $v^2 \leqslant -p_{\text{ср}}$ будем иметь $q \leqslant 0$.

После анализа отдельных примеров вида (1.4) даются общие заключения относительно устойчивости тривиального решения уравнения

$$\ddot{x} + \lambda p(t)\, x = 0 \qquad (\lambda > 0) \tag{1.5}$$

Именно, если обозначить

$$M = \frac{1}{\omega} \left| \int_0^{\omega} [p(t_1 + t) - p_{\text{ср}}]\, t_1 dt_1 \right|_{\text{наиб}}$$

то тогда:

а) если $p_{\text{ср}} < 0$, то при $\lambda \leqslant -p_{\text{ср}}/M^2$ будем иметь $A(\lambda) > 1$ и тривиальное решение уравнения (1.5) неустойчиво (λ принадлежит нулевой зоне неустойчивости);

б) если $p_{\text{ср}} \geqslant 0$, то при $\lambda \leqslant \zeta/M\omega$, где ζ — положительный корень уравнения:

$$\left(\frac{\omega p_{\text{ср}}}{M} + \zeta\right) \frac{(e^{\zeta} - 1)^2}{\zeta} = \pi^2$$

будем иметь $A^2(\lambda) < 1$ и тривиальное решение уравнения (1.5) устойчиво (λ принадлежит нулевой зоне устойчивости).

В частности, если в уравнении (0.1) функция p такова, что $p_{\text{ср}} = 0$ и

$$\left| \int_0^{\omega} p(t_1 + t)\, t_1 dt_1 \right| \leqslant \ln(1 + \pi)$$

то будем иметь $A^2 < 1$ и тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво.

Отметим, что к моменту написания статьи[8] Ляпунов располагал лишь тремя указанными выше признаками устойчивости и неустойчивости тривиального решения уравнения (0.1). Поэтому может оказаться полезным применение к преобразованным уравнениям последующих признаков как Ляпунова, так и других авторов.

4. В заметке[9] рассматривается уравнение (0.1) с нечетным коэффициентом $p(t)$. Ряд (1.2) при $\lambda = 1$ в этом случае сведется к следующему:

$$A = 1 + A_2 + A_4 + \ldots$$

где

$$A_{2n} = (-2)^n \int_0^{1/2\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2n-1}} (P_1 - P_2)^2 (P_3 - P_4)^2 \ldots (P_{2n-1} - P_{2n})^2 dt_{2n}$$

Здесь $P(t)$ есть то из значений первообразной функции для $p(t)$, для которого $P_{\text{ср}} = 0$ и $P_i \equiv P(t_i)$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$|A_{2m+2n}| < \frac{m!\,n!}{(m+n)!} |A_{2m}|\,|A_{2n}|$$

и как его следствие

$$|A_{2n}| < \frac{|A_2|}{n} |A_{2n-2}|$$

Отсюда следует, что если

$$\omega \int_0^{\omega} P^2(t)\, dt \leqslant 4$$

то будем иметь $A^2 < 1$ и тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво.

5. В обширном мемуаре[13] исследуется ряд (1.2) при $\lambda = 1$ в предположении $p(t) \geqslant 0$. В главной части мемуара Ляпунов устанавливает два неравенства для

отношения двух соседних членов этого ряда при $n \geqslant 2$:

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} < \frac{A_1}{n^2} \tag{1.6}$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} < \frac{n-1}{n} \frac{A_n}{A_{n-1}} \tag{1.7}$$

Неравенство (1.6) более сильное, чем неравенство, установленное ранее[5]:

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} < \frac{A_1}{n}$$

Если неравенство (1.6) показывает, что граница сверху для отношения A_n/A_{n-1} постоянно убывает, то неравенство (1.7) обнаруживает, что само отношение A_n/A_{n-1} постоянно убывает с ростом n, т. е. если для какого-нибудь значения n имеем $A_n \leqslant A_{n-1}$, то будем, конечно, иметь $A_n > A_{n+1} > A_{n+2} > \ldots$.

Как сообщил М. Г. Крейн, неравенство (1.7) является непосредственным следствием следующего общего предложения.

Если целая функция

$$F(\lambda) = a_0 - a_1\lambda + a_2\lambda^2 - \ldots$$

допускает представление

$$F(\lambda) = a_0 \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \qquad (0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots) \tag{$\times$}$$

то будем иметь

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} < \frac{j}{j+1} \frac{a_j}{a_{j-1}} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

Указанное общее предложение моментально следует из теоремы Ньютона о том, что если корни многочлена

$$a_0 - a_1\lambda + a_2\lambda^2 - \ldots + (-1)^n a_n \lambda^n$$

все положительны, то выполняются неравенства

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} < \frac{j(n-j)}{(j+1)(n-j+1)} \frac{a_j}{a_{j-1}} \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

Чтобы получить отсюда неравенство (1.7), следует применить это предложение к целой функции

$$\frac{1 - A(\lambda)}{\lambda} = A_1 - A_2\lambda + A_3\lambda^2 - \ldots$$

все нули которой положительны, как установил Ляпунов[10]. Кроме того, как это доказал Ляпунов, функция $A(\lambda)$ является целой функцией с порядком роста $|\lambda|^{1/2}$, а для целых функций с порядком роста меньше единицы справедливо разложение ($\times$).

Основное предложение формулируется Ляпуновым следующим образом. Каждый раз, когда для какого-нибудь значения n из последовательности 1, 2, 3... и для любого α, удовлетворяющего неравенствам $-5 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

находят $1 - \alpha - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + A_{2n} \leqslant 0$, то будут иметь $A < \alpha$,

находят $1 - \alpha - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots - A_{2n-1} \geqslant 0$, то будут иметь $A > \alpha$.

При исследовании уравнения (0.1) нас интересует знак величины A^2-1, и поэтому Ляпунов полагает в предыдущих неравенствах $\alpha=1$ и $\alpha=-1$. Тогда это предложение приводит к методу, позволяющему решить, находится ли A в интервале $(-1,1)$ или вне его. Если $A_1\leqslant 2$, то будет достоверно, что $A^2<1$.

Если $A_1>2$, то вычисляют A_2 и будут различать следующие три случая, которые могут представиться:

$$1)\ A_2\leqslant A_1-2,\quad 2)\ A_1-2<A_2\leqslant A_1,\quad 3)\ A_2>A_1$$

В первом случае $A<-1$, и вопрос решен. Во втором случае будем иметь только $A<1$ и надо решить, будет ли $A>-1$ или $A<-1$. Для этого вычисляют A_3, и если находят, что $A_3\leqslant A_2-A_1+2$, то заключают, что $A>-1$. В противоположном случае вычисляют A_4 и будут продолжать последовательно до тех пор, пока не достигнут неравенств вида

$$A_n\leqslant A_{n-1}-A_{n-2}+\ldots\pm A_1\mp 2$$

которое не преминет представиться, если A не равно -1. Тогда, если n — четное число, будем иметь $A<-1$, а если n — нечетное число, будем иметь $A>-1$.

В третьем случае надо будет вычислять A_3 и различать три следующих возможных случая:

$$1)\quad A_3\leqslant A_2-A_1,\qquad 2)\quad A_2-A_1<A_3\leqslant A_2-A_1+2,\qquad 3)\quad A_3>A_2-A_1+2$$

В первом случае $A>1$, и вопрос решен. Если находятся во втором случае, то можно только вывести, что $A>-1$, и надо решить, будет ли $A<1$ или $A>1$. Для этого будут продолжать последовательно до тех пор, пока не достигнут неравенств вида

$$A_n\leqslant A_{n-1}-A_{n-2}+\ldots\pm A_2\mp A_1$$

что не преминет случиться, если A не равно 1. Тогда, если n — четное число, будут иметь $A<1$, а если n — нечетное число, будут иметь $A>1$. Что касается третьего случая, то его подразделяют на три случая, различных по значению A_4.

Очевидно, что можно очутиться в третьем случае не всегда и что кончат тем, что попадут к одному из первых случаев, когда вопрос решается немедленно, либо к одному из вторых случаев, который будут исследовать так, как было показано. Метод не приведет к цели, только если $A=\pm 1$; случай, в котором вычисления могут продолжаться бесконечно и не дают окончательного заключения. Но, как заключает Ляпунов, это то, что есть в природе вещей, так как метод в конце концов есть только ряд последовательных приближений. Краткое изложение существа метода дано в заметке[12], предшествовавшей мемуару [13]. Заметка[9] позволяет распространить метод Ляпунова для случая, когда функция p является нечетной.

В некоторых случаях вычисления упрощаются, если использовать верхние пределы для A_3. Именно, в силу каждого из неравенств

$$A_2^2-2A_1A_2+2A_1(A_1-2)\leqslant 0$$

$$A_2\geqslant\frac{1}{90}A_1^3+A_1-2$$

$$\left(1-\frac{\pi^2-9}{6\pi^2}A_1\right)A_2\geqslant\frac{15-\pi^2}{60\pi^2}A_1^3+A_1-2$$

будем иметь, что $A^2<1$. Ляпунов отмечает, что было бы важно иметь для A_3 точный верхний предел, соответствующий данным значениям A_1 и A_2, но отыскание этого предела, очевидно, является весьма трудной задачей.

Приведем самые простые из формул для вычисления A_1, A_2, A_3, выведенные Ляпуновым[13]. Представим функцию p в виде $p(t) = p_{\text{ср}} + \ddot{\Phi}(t)$, где периодическая функция Φ удовлетворяет условию $\Phi_{\text{ср}} = 0$. Тогда

$$A_1 = \frac{1}{2}\omega^2 p_{\text{ср}}, \qquad A_2 = \frac{1}{24}\omega^4 p_{\text{ср}}^2 - \frac{\omega}{2}\int_0^\omega \dot{\Phi}^2 dt$$

$$A_3 = \frac{1}{720}\omega^6 p_{\text{ср}}^3 - \frac{1}{12}\omega^3 p_{\text{ср}}\int_0^\omega \dot{\Phi}^2 dt + 2\omega p_{\text{ср}}\int_0^\omega \Phi^2 dt - \omega\int_0^\omega \Phi\dot{\Phi}^2 dt$$

Мемуар [13] заканчивается детальным исследованием двух примеров:

$$\ddot{x} + C(1 + \lambda\cos t + \mu\cos 2t)\, x = 0, \qquad \ddot{x} + \lambda\cos^{2n} t\, x = 0$$

Заметку Н. П. Еругина [48] следует рассматривать как дополнение к мемуару Ляпунова [13] в том смысле, что в ней показано, как коротко можно теоретически исчерпать все случаи ограниченности и неограниченности решений уравнения (0.1) при $p(t) \geqslant 0$. В заметке[48] требуется выполнение неравенств для $0 < t < \omega$, а в мемуаре [13] только для $t = \omega$. Именно это обстоятельство и порождает необходимость сложных выводов Ляпунова.

§ 2. 1. Одним из первых ученых, обратившихся к исследованию ограниченности решений уравнения (0.1) после Ляпунова и Жуковского, является Н. В. Адамов. В заметках [21,27,28] и статье [29] Н. В. Адамов установил несколько общих теорем относительно колебания решений уравнения (0.1). Затем, переходя к общим условиям устойчивости и неустойчивости, рассматриваются величины d_n и D_n — наименьшее и наибольшее из возможных расстояний между некоторым нулем решения и n-м следующим нулем ($n = 1, 2, \ldots$; $d_0 = D_0 = 0$). Тогда, если для некоторого $n=0, 1, 2, \ldots$ имеем $D_n < \omega < d_{n+1}$, то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво; если $d_n \leqslant \omega \leqslant D_n$ (и при этом знак равенства не имеет места в обоих неравенствах), то тривиальное решение уравнения (0.1) неустойчиво, и, наконец, если $d_n = D_n = \omega$, то все решения уравнения (0.1) будут периодическими (или полупериодическими).

Первое из условий устойчивости $d_1 > \omega$ удовлетворяется, если для любых значений t и ξ выполнены неравенства

$$(t - \xi)\,\varphi_m(\xi, t) > \alpha_m, \qquad (t - \omega - \xi)\,\varphi_m(\xi, t - \omega) > \alpha_m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

где $\varphi_m(\xi, t)$ определяются по формулам

$$\varphi_1(\xi, t) = \int_\xi^t p(t_1)\,dt_1, \ldots, \varphi_m(\xi, t) = \varphi_1(\xi, t) + \int_\xi^t [\varphi_{m-1}(\xi, t_1)]^2\,dt_1$$

и α_m — постоянные, находимые из равенств

$$\alpha_m = \frac{1}{a}\psi_m\left(t_0 + \frac{1}{a}\right), \qquad \psi_1(t) = a, \ldots, \psi_m(t) = a + \int_{t_0}^t [\psi_{m-1}(t_1)]^2\,dt_1$$

Условие устойчивости, соответствующее $m = 1$, совпадает с критерием Ляпунова (0.2), каждое последующее условие сильнее предыдущего.

В статье [46] при исследовании несколько иного вопроса Н. В. Адамовым получен результат, содержащийся в статье Ляпунова [8]: необходимым условием для наличия у уравнения (0.1) неколеблющихся решений является $p_{\text{ср}} < 0$. В этой же работе выводятся несколько достаточных условий для наличия неколеблющихся решений, а также достаточное условие «колебательности» (теорема XIV). Далее доказано (теоремы XV и XVI), что множество $\mathscr{P}$ функций p, для которых уравнение (0.1) имеет неколеблющиеся решения, является выпуклым замкнутым телом и границей его является совокупность всех функций вида

$$p(t) = -[\dot{y}(t) + y^2(t)]$$

где $y(t)$ — любая периодическая функция, имеющая непрерывную производную, удовлетворяющая условию $y_{\text{ср}} = 0$.

Эти результаты развиты в дипломных работах студентов ЛГУ, выполненных в 1951—1953 гг. под руководством Н. В. Адамова. Н. В. Цено получила доказательство выпуклости множества $\mathscr{P}$ более простым путем. Ею же доказано, что функции p, удовлетворяющие условию

$$\int_0^\omega (pv^2 - \dot{v}^2)\,dt = 0$$

где $v(t)$ — определенная, неколеблющаяся периодическая функция с периодом ω, образуют в линейном функциональном пространстве плоское [1] линейное многообразие $\mathscr{S}_v$, имеющее только одну общую точку с множеством $\mathscr{P}$.

Неравенство

$$\int_0^\omega (pv^2 - \dot{v}^2)\,dt < 0 \tag{2.1}$$

показывает, что функция p и выпуклое тело $\mathscr{P}$ лежат по одну сторону от плоского линейного многообразия $\mathscr{S}_v$; таким образом, это неравенство — необходимое условие для неколебательности решений уравнения (0.1). Точно так же неравенство

$$\int_0^\omega (pv^2 - \dot{v}^2)\,dt > 0$$

является достаточным условием колебательности решений уравнения (0.1), так как при этом функция p и выпуклое тело $\mathscr{P}$ лежат по разные стороны от плоского линейного многообразия $\mathscr{S}_v$.

Эти результаты были использованы М. Филипповой для нахождения способов эффективного определения принадлежности или непринадлежности к множеству $\mathscr{P}$ функции p, имеющей вид тригонометрического полинома. Выбирая функцию v также в виде тригонометрических полиномов, условие (2.1) можно свести к требованию определенной отрицательности квадратичной формы с коэффициентами, зависящими от коэффициентов полинома $p(t)$. Последовательность таких условий имеет весьма простой вид, если $p(t)$ — полином вида $a + b\sin t$, именно $U_n > 0$, где дается формула, выражающая U_n через U_{n-1} и U_{n-2}.

А. Ф. Зубова исследовала этим же методом случай, когда $p(t)$ — тригонометрический полином общего вида. И в этом случае найдена последователь-

---

[1] Множество функций $\mathscr{S}$ называется плоским линейным многообразием, если выполнены следующие два условия:

а) вместе с функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ ему принадлежат и функции $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$ $(-\infty < \alpha_1, \alpha_2 < \infty)$, иначе говоря, вместе с точками f_1 и f_2 ему принадлежит и вся прямая, проходящая через эти точки;

б) прямая, проходящая через точку f, принадлежащую множеству, и через точку g, не принадлежащую множеству, имеет с множеством $\mathscr{S}$ только одну общую точку f.

ность необходимых условий принадлежности функции p к множеству $\mathcal{P}$ снова в форме неравенств $U_n > 0$. При этом уже в случае

$$p(t) = a + b\cos t + c\sin t + d\cos 2t$$

для вычисления U_n требуется знание предшествующих значений $U_0, \ldots, U_{n-1}$.

2. Используя результаты Н. В. Адамова [29] и рассматривая фазу линейного уравнения второго порядка (см. [15]), М. И. Ельшин [36] предложил метод определения устойчивости тривиального решения уравнения (0.1), заключающийся в следующем. Пусть u и v — два решения уравнения (0.1) с начальными условиями

$$u(0) = u_0 \neq 0, \qquad \dot{u}(0) = \dot{u}_0; \qquad v(0) = 0, \qquad \dot{v}(0) = 1 / u_0.$$

Фазой $\varphi(t)$ называется аргумент вектора $\{u, v\}$. Общее решение уравнения (0.1) может быть записано в виде

$$x = \frac{R_0}{\sqrt{\Omega(t)}}\cos\left[\int_0^t \Omega(t_1)\,dt_1 + \gamma_0\right]$$

где через $\Omega(t)$ обозначена переменная частота

$$\Omega(t) = \frac{1}{u^2 + v^2},$$

а R_0 и γ_0 — произвольные постоянные.

Отрезок $[0, 2\omega]$ разбивается на $2m$ равных частей точками

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{2m-1} < t_{2m} = 2\omega$$

Пусть $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$ — две кусочно-постоянные функции:

$$\overline{p}_1(t) = \inf_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} p(t), \qquad \overline{p}_2(t) = \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} p(t) \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2m-1)$$

Обозначим через $\overline{\Omega}_j(t)$ функции, определяемые на отрезках $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ формулами ($j = 1, 2;\ i = 0, 1, \ldots, 2m-1$)

$$\overline{\Omega}_j(t) = \begin{cases} \sqrt{\overline{p}_j(t)} & \text{при } \overline{p}_j(t) > 0 \\ \dfrac{1}{1 + (t - t_i)^2} & \text{при } \overline{p}_j(t) = 0 \\ \dfrac{\sqrt{-\overline{p}_j(t)}}{\operatorname{ch}\left[2\sqrt{-\overline{p}_j(t)}(t - t_i)\right]} & \text{при } \overline{p}_j(t) < 0 \end{cases}$$

В статье [36] показано, что теорема о фазах [32] распространяется на случай кусочно-постоянной аппроксимации. Таким образом, фаза может быть оценена с любой степенью точности как по недостатку, так и по избытку. Последовательность фаз вычисляется по формулам

$$\overline{\varphi}_j^{(i)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{\Omega}_j(t)\,dt \qquad (j = 1, 2;\ i = 0, 1, \ldots, 2m-1)$$

Если для некоторого $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$n\pi < \overline{\varphi}_1^{(m+k)} - \overline{\varphi}_1^{(k+1)} < \overline{\varphi}_2^{(m+k+1)} - \overline{\varphi}_2^{(k)} < (n+1)\pi \tag{2.2}$$

при всех $k = 0, 1, \ldots, m-1$, то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво. Если же неравенства (2.2) выполняются лишь для некоторых k и по крайней мере для одного из них имеем

$$\overline{\varphi}_1^{(m+k_1)} - \overline{\varphi}_1^{(k_1+1)} < \overline{\varphi}_2^{(m+k_1+1)} - \overline{\varphi}_2^{(k_1)} < n\pi$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) неустойчиво.

Если неравенства (2.2) выполнены для некоторых k, а для остальных k^* имеем

$$\overline{\varphi}_1^{(m+k^*)} - \overline{\varphi}_1^{(k^*+1)} < n\pi < \overline{\varphi}_2^{(m+k^*+1)} - \overline{\varphi}_2^{(k^*)}$$

то имеем сомнительный случай и степень точности приближения надо увеличить.

Метод М. И. Ельшина предполагает, что решения уравнения (0.1) колеблющиеся, ибо в случае неколеблющихся решений тривиальное решение уравнения (0.1) неустойчиво. В заметке [44] даны необходимые и достаточные условия колебательности решений уравнения (0.1), выраженные через функцию p.

3. В 1944 г. шведский математик Г. Борг в результате решения вариационных задач получил [38] некоторые условия устойчивости тривиального решения уравнения (0.1), которые можно формулировать в виде Л-критериев. Г. Борг вводит параметры α и β:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{\pi^2} p_{\text{ср}}, \qquad |\beta| = \frac{\omega^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{\omega}\int_0^\omega |p(t) - p_{\text{ср}}|^r dt\right]^{\frac{1}{r}}$$

I. В случае $r = 1$ области устойчивости в плоскости параметров $\alpha\beta$ ограничены кривыми

$$\beta = \pm\frac{4}{\pi}(n+1)\sqrt{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\pi\sqrt{\alpha}}{2(n+1)}, \qquad n^2 \leqslant \alpha \leqslant (n+1)^2 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

$$\beta = \pm 2(\alpha - n\sqrt{\alpha}), \qquad \alpha > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots); \qquad \alpha = 0 \qquad (n = 0)$$

и при этом области содержат внутри себя отрезок оси α [1].

Иначе говоря, если для некоторого $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$\frac{n^2\pi^2}{\omega^2} \leqslant p_{\text{ср}} \leqslant \frac{(n+1)^2\pi^2}{\omega^2}$$

и

$$\int_0^\omega |p(t) - p_{\text{ср}}|\, dt < \left[2\sqrt{p_{\text{ср}}}(\omega\sqrt{p_{\text{ср}}} - n\pi),\ 4(n+1)\sqrt{p_{\text{ср}}}\operatorname{ctg}\frac{\omega\sqrt{p_{\text{ср}}}}{2(n+1)}\right]_{\text{наим}} \qquad (2.3)$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости [2].

II. В случае $r = 2$ области устойчивости ограничены кривыми

$$\beta = \pm\frac{8(n+1)^2}{\pi^2\sqrt{3}} K\sqrt{(k^2 - 1)K^2 + 2(2 - k^2)KE - 3E^2}$$

$$\alpha = \frac{4(n+1)^2}{\pi^2}[(k^2 - 1)K^2 + 2KE] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \qquad \alpha > 0$$

и содержат внутри себя отрезок оси α.

Здесь $K = K(k)$ и $E = E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Как частный случай получается следующее условие устойчивости:

$$p(t) \geqslant 0, \qquad \int_0^\omega p^2(t)\, dt < \frac{63.03}{\omega^3}.$$

---

[1] Иначе говоря, образуется сетка кривых указанного вида, и областями устойчивости будут те ячейки этой сетки, которые содержат отрезок оси α.

[2] «$p(t)$ в уравнении (0.1) принадлежит n-й зоне устойчивости» означает, что $\lambda = 1$ в уравнении (1.1) принадлежит n-й зоне устойчивости $\mathscr{Y}n$ (см. § 1).

III. В случае $r=\infty$ области устойчивости ограничены кривыми

$$\sqrt{\alpha+\beta}\,\operatorname{tg}\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{4(n+1)}=\sqrt{\alpha-\beta}\,\operatorname{ctg}\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{4(n+1)}\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

и содержат внутри себя отрезок оси α. Если корень мнимый, то переходят к соответствующим гиперболическим функциям. При $r=\infty$

$$\beta=\frac{\omega^2}{\pi^2}\,|p(t)-p_{\text{ср}}|_{\text{наиб}}$$

В заметке [57] Г. Борг распространяет Л-критерий Ляпунова (0.2) на знакопеременную функцию $p(t)$. Сформулируем Л-критерий Г. Борга. Если $p_{\text{ср}}\geqslant 0$ и

$$\omega\int_0^{\omega}|p(t)|\,dt\leqslant 4 \tag{2.4}$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво. Отметим, что замечание Г. Борга о том, что этот результат завершает критерий Ляпунова, представляется непонятным. Ниже мы укажем, что результат более сильный, чем (2.4), получен М. Г. Крейном [74].

4. Как показала Р. С. Гусарова, содержание заметки С. Валлаха [47] сводится к ошибочному доказательству предложения, являющегося не чем иным, как критерием Жуковского (0.3).

В 1949—1950 гг. Р. С. Гусарова получила условия устойчивости тривиального решения уравнения (0.1): теоремы 3 и 4 [61] и теорема [62]. В этих работах критерий Ляпунова (0.2) впервые был распространен на последующие зоны устойчивости. Однако эти условия не являются Л-критериями в принятом здесь смысле, как показали В. А. Якубович и М. Г. Крейн, получив критерии более сильные, чем условия Р. С. Гусаровой.

5. Перейдем к обзору результатов В. А. Якубовича [65,97]. Основываясь на анализе геометрического содержания результатов Флоке [1] и качественного поведения решений, В. А. Якубович доказывает теорему о строении функционального пространства коэффициентов канонической системы второго порядка (см. § 4 настоящего обзора), выделяя в нем подпространство функций-коэффициентов уравнения (0.1). Эта теорема в применении к уравнению (0.1) позволяет упорядочить отыскание критериев устойчивости. В. А. Якубовичем доказаны следующие Л-критерии.

Критерий 1. Пусть $r_1(t)>0$, $r_2(t)>0$ — дважды дифференцируемые периодические функции, нормированные условиями

$$\int_0^{\omega}\frac{dt}{r_1^2(t)}=\int_0^{\omega}\frac{dt}{r_2^2(t)}=1$$

Если для некоторого $n=0,1,2,\ldots$ выполнены неравенства

$$\frac{n^2\pi^2}{r_1^4(t)}-\frac{\ddot r_1(t)}{r_1(t)}\underset{\not\equiv}{\leqslant}p(t)\underset{\not\equiv}{\leqslant}\frac{(n+1)\cdot\pi^2}{r_2^4(t)}-\frac{\ddot r_2(t)}{r_2(t)}$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости [1].

---

[1] «$p(t)$ в уравнении (0.1) принадлежит n-й зоне устойчивости» означает, что при $p_{\text{ср}}\geqslant 0$ точка $\lambda=1$ в уравнении (1.1) принадлежит n-й зоне устойчивости $\mathcal{Y}_n$ (см. фиг. 1, 2, 3). Если $p_{\text{ср}}<0$, то в уравнении (1.1) заменяем λ на $-\lambda$ и $p(t)$ на $-p(t)$. В формулировке критериев 1—6, приводимой В. А. Якубовичем,

Отметим, что при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеются функции p с отрицательным и сколь угодно большим по модулю средним значением $p_{\text{ср}}$, удовлетворяющие критерию 1. Это обстоятельство представляется нам весьма важным. Положив в критерии 1 $r_1(t) = r_2(t) = 1 / \sqrt{\omega}$, получим критерий Жуковского (0.3).

Как следствие критерия I (см. § 4 настоящего обзора) В. А. Якубович получает следующий критерий.

Критерий 2. Пусть $n\pi / \omega < c < (n+1)\pi / \omega$ и

$$p_c^+(t) = c^2 + \frac{1}{2}[p(t) - c^2 + | p(t) - c^2 |]$$

$$p_c^-(t) = c^2 - \frac{1}{2}[c^2 - p(t) + | p(t) - c^2 |]$$

Если выполнены неравенства

$$n\pi < \frac{1}{c}\int_0^\omega p_c^-(t)\,dt \leqslant \frac{1}{c}\int_0^\omega p_c^+(t)\,dt < (n+1)\pi$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Для получения следующих критериев устойчивости В. А. Якубович применяет метод, основанный на установлении меры отклонения функции p от постоянной. С целью определения точных констант, фигурирующих в критериях 3, 4 и 5, решается ряд вариационных задач, основываясь на результатах Г. Борга [38], однако более общих, чем у Г. Борга.

Критерий 3. Пусть c_1 и c_2 — постоянные, удовлетворяющие неравенствам

$$n\pi / \omega < c_1,\ c_2 < (n+1)\pi / \omega \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Если выполнены неравенства

$$\int_0^\omega | p(t) - c_1^2 |\,dt < c_1(\omega c_1 - n\pi), \qquad \int_0^\omega | p(t) - c_2^2 |\,dt \leqslant 2c_2(n+1)\operatorname{ctg}\frac{\omega c_2}{2(n+1)} \tag{2.5}$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости.

Если в критерии 3 положить $c_1 = c_2 = \sqrt{p_{\text{ср}}}$, то правые части неравенств (2.5) будут в два раза меньше, чем правые части неравенств (2.3) Г. Борга. Поэтому в критерии 3 не следует брать $c_1 = c_2 = \sqrt{p_{\text{ср}}}$, а сначала испытывать функцию по критерию Г. Борга (2.3), и если желаемого ответа нет, то проверять, например, по критерию 3, но за c_1^2 и c_2^2 брать не среднее значение, а величину, близкую к минимуму или максимуму функции.

Критерий 4. Пусть

$$p(t) \underset{\not\equiv}{\geqslant} \frac{n^2\pi^2}{\omega^2}, \qquad \frac{n\pi}{\omega} \leqslant c < \frac{(n+1)\pi}{\omega}$$

«$p(t)$ принадлежит n-й области устойчивости». Определение областей устойчивости и неустойчивости в функциональном пространстве коэффициентов системы второго порядка канонического вида дано в [65, 97]. Уравнение (0.1) записывается как система канонического вида

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad \frac{d\dot{x}}{dt} = -p(t)\,x$$

Если выполнено неравенство

$$\int_0^\omega |p(t)-c^2|\,dt \leqslant 2c(n+1)\operatorname{ctg}\frac{\omega c}{2(n+1)}$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости ($n=0, 1, 2, \ldots$). При $n=0$ условие $p(t)\geqslant 0$ можно заменить условиями $p(t)\not\equiv 0$, $p_{\text{ср}}\geqslant 0$.

При $c=n\pi/\omega$ получается частный вид критерия 4, определяющий устойчивость при выполнении условий

$$p(t)\underset{\not\equiv}{\geqslant}\frac{n^2\pi^2}{\omega^2}, \qquad \omega\int_0^\omega p(t)\,dt \leqslant n^2\pi^2+2\pi n(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

что при $n=0$ переходит в критерий (0.2) Ляпунова. Для сравнения точных констант В. А. Якубовича

$$C_n = n^2\pi^2+2\pi n(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

и констант теоремы Р. С. Гусаровой [62]

$$C_n' = \frac{1}{2}n^2\pi^2+4(n^2+n+1) \qquad (n=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

приведены их численные значения:

$n=$	0	1	2	3	4	5	6	>6
$C_n=$	4	22.44	61.24	120.06	198.75	297.25	415.54	$\approx\pi^2 n(n+1)$
$C_n'=$	4	16.93	47.74	96.41	162.96	247.37	—	—

Как видно, все константы частного вида критерия 4 больше констант достаточного условия устойчивости, доставляемого теоремой Р. С. Гусаровой [62].

Критерий 5. **Пусть**

$$p(t)\underset{\not\equiv}{\leqslant}\frac{(n+1)^2\pi^2}{\omega^2}, \qquad \frac{n\pi}{\omega}<c\leqslant\frac{(n+1)\pi}{\omega}$$

Если для некоторого $n=0, 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство

$$\int_0^\omega |p(t)-c^2|\,dt \leqslant c(\omega c-n\pi)$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости.

В качестве c в критериях 4 и 5, так же как и в критерии 3, рекомендуется брать $p_{\text{наим}}$ и $p_{\text{наиб}}$. Полагая в критерии 5 $c=(n+1)\pi/\omega$, получим критерий 5а:

Если выполнены неравенства

$$p(t)\leqslant\frac{n^2\pi^2}{\omega^2}, \qquad \omega\int_0^\omega\left[\frac{n^2\pi^2}{\omega^2}-p(t)\right]dt\leqslant n\pi^2 \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит $(n-1)$-й зоне устойчивости. Критерий 5а при $n=1$ является улучшением теоремы 3 Р. С. Гусаровой [61].

Как указывает В. А. Якубович, в критериях 4 или 5 вместо условий

$$p(t)\geqslant n^2\pi^2/\omega^2 \qquad \text{или} \qquad p(t)\leqslant(n+1)^2\pi^2/\omega^2$$

можно требовать соответственно выполнение условий

$$p(t)\geqslant\frac{n^2\pi^2}{r^4(t)}-\frac{\ddot r(t)}{r(t)} \qquad \text{или} \qquad p(t)\leqslant\frac{(n+1)^2\pi^2}{r^4(t)}-\frac{\ddot r(t)}{r(t)}$$

где $r(t)$—произвольная положительная дважды дифференцируемая функция периода ω, нормированная условием

$$\int_0^\omega \frac{dt}{r^2(t)} = 1$$

Критерий 6. Пусть $p_{\text{ср}} \geqslant 0$ и $p_{\text{наим}} = -a^2 < 0$, тогда при выполнении условия

$$p_{\text{ср}} \leqslant \frac{2a}{\omega} \operatorname{cth} \frac{a\omega}{2} - a^2$$

тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит нулевой зоне устойчивости.

Отметим, что критерии 1, 2, 3, 5 и 6 В. А. Якубовича могут применяться для знакопеременных функций. Как следствие из критериев 4 и 5 В. А. Якубовича получаются критерии 1 и 2 Ф. Шефке [93], опубликованные позже. Достоинством работы Ф. Шефке является простота доказательства.

6. В. А. Якубович [87, 97] поставил также следующую задачу. Пусть относительно функции p в уравнении (0.1) неизвестно ничего, кроме $p_{\text{наиб}}$ (или $p_{\text{наим}}$) и $p_{\text{ср}}$. Каковы должны быть эти числа, чтобы была справедлива оценка

$$\chi\{x\} \geqslant -\mu \qquad (\mu > 0)$$

где $\chi\{x\}$ — характеристичное число решений уравнения (0.1) в смысле Ляпунова. Решение этой задачи может быть применено при выборе параметров регулируемой системы. Ответом (дающим точные условия) служат следующие теоремы В. А. Якубовича.

Теорема 1. Пусть $p(t) \leqslant a^2$ и $n\pi/\omega < a \leqslant (n+1)\pi/\omega$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Если выполнено неравенство

$$\int_0^\omega [a^2 - p(t)]\, dt \leqslant \min_{k=0,1,\ldots,n} a\left(a\omega - k\pi + \frac{\mu^2\omega^2}{a\omega - k\pi}\right)$$

то имеем $\chi\{x\} \geqslant -\mu$ (μ—положительное число). При $p(t) \leqslant 0$ будем иметь

$$\chi\{x\} \geqslant -\sqrt{-p_{\text{ср}}}.$$

Теорема 2. Пусть $p(t) \geqslant B$, определим целое неотрицательное число n условиями: $n = 0$ при $B \leqslant 0$, при $B > 0$ должно быть выполнено неравенство

$$\frac{n\pi}{\omega} \leqslant \sqrt{B} < \frac{(n+1)\pi}{\omega}$$

и пусть μ—произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству $\mu^2 + B > 0$. Тогда если выполнено неравенство[1]

$$\int_0^\omega [p(t) - B]\, dt \leqslant \min_{k \geqslant n+1} \frac{2k\sqrt{B}\left(\operatorname{ch}\frac{\mu\omega}{k} + \cos\frac{\omega\sqrt{B}}{k}\right)}{\sin\frac{\omega\sqrt{B}}{k}}$$

то имеем $\chi\{x\} > -\mu$.

В частности, из теоремы 2 получается следующее дополнение к критерию (0.2) Ляпунова. Пусть $p(t) \geqslant 0$ и $p_{\text{ср}} > 4/\omega^2$. Тогда имеем

$$\chi\{x\} > -\frac{2}{\omega} \max\left(k \operatorname{Ar}\operatorname{ch} \frac{\omega}{2k}\sqrt{p_{\text{ср}}}\right)$$

где максимум берется по всем целым k, удовлетворяющим неравенству

$$1 \leqslant k < {}^1\!/_2\,\omega\sqrt{p_{\text{ср}}}.$$

---

[1] В заметке [87] в формулировке теоремы 2 имеется опечатка (пропущен множитель $2k\sqrt{B}$ в наших обозначениях). Заметим также, что при $B < 0$ следует перейти к гиперболическим функциям.

7. М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидский [73] установили следующий Л-критерий. Пусть

$$a^2 \leqslant p(t) \leqslant b^2, \quad \frac{n\pi}{\omega} \leqslant a \leqslant \frac{(n+1)\pi}{\omega} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

тогда если выполнено неравенство

$$\int_0^\omega [p(t) - a^2]\, dt < 2(n+1)(b^2 - a^2)\nu_0$$

где ν_0—наименьший положительный корень уравнения

$$a \operatorname{ctg}\left[\frac{a\omega}{2(n+1)} - a\nu\right] = b \operatorname{tg} b\nu$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво.

Частный вид критерия при $b^2 = \infty$ получается из критерия 4 В. А. Якубовича. Поскольку применение критерия М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидского требует решения трансцендентного уравнения, то при достаточно больших b предпочтительнее применять критерий 4 В. А. Якубовича.

8. В статье [74] М. Г. Крейна развиваются методы получения Л-критериев устойчивости тривиального решения уравнения (0.1), основанные на работах Ляпунова о λ-зонах устойчивости. В этой статье впервые выяснено значение определения границ λ-зон устойчивости через собственные значения периодической и полупериодической краевых задач. Для получения Л-критериев приходится устанавливать оценки собственных значений, что проделывается на основе минимаксимальных свойств. М. Г. Крейн рассматривает краевую задачу

$$\ddot{x} + \lambda p(t) x = 0, \qquad x(0) = x(\omega) = 0$$

и из оценки первого собственного значения получает следующий Л-критерий.

Критерий 1. Обозначим

$$p^+(t) = \frac{1}{2}[p(t) + |p(t)|]$$

Если $p(t) \leqslant H$, $p_{\text{ср}} \geqslant 0$ и

$$\varkappa\left(\frac{1}{H} p^+_{\text{ср}}\right) > \frac{1}{4H}(\omega p^+_{\text{ср}})^2$$

где $\varkappa(\tau)$ определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{\varkappa}\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa} = \frac{\tau}{1-\tau} \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant 1)$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит нулевой зоне устойчивости. При достаточно малых τ функция $\varkappa(\tau)$ изображается рядом

$$\varkappa = \tau + \frac{2}{3}\tau^2 + \frac{19}{45}\tau^3 + \frac{236}{945}\tau^4 + \ldots$$

Таблица значений функции $\varkappa(\tau)$, приведена в [88].

Как следствие критерия 1 М. Г. Крейн указал критерий 1а. Если $p_{\text{ср}} \geqslant 0$ и

$$\omega \int_0^\omega p^+(t)\, dt \leqslant 4$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво. Критерий 1а более сильный, чем критерий (2.4) Г. Борга, и, естественно, точнее, чем теорема 4 Р. С. Гусаровой [61], не являющаяся Л-критерием.

Условие А. М. Гольдин [75], представляющее одно из возможных расширений критерия (0.2) Ляпунова на класс неотрицательных периодических функций $p(t)$ с заданным $p_{\text{наиб}}$, само не является Л-критерием [88]. Именно, если

$$p_{\text{ср}} \geqslant 0, \qquad \omega \int_0^\omega p^+(t)\, dt \leqslant 4 + \frac{9.51}{\omega^2 p_{\text{наб}}}$$

тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво.

Критерий 2. Функция p предполагается неотрицательной ($0 \leqslant h \leqslant p(t) \leqslant H$) и вводятся обозначения

$$d = \frac{\omega}{H-h}(p_{\text{ср}} - h), \qquad D = \frac{\omega}{H-h}(H - p_{\text{ср}})$$

Тогда если выполнены неравенства

$$\frac{4n^2}{hD^2}\psi^2\left(\frac{H}{h}, \frac{d}{D}\right) < 1 < \frac{4(n+1)^2}{Hd^2}\psi^2\left(\frac{h}{H}, \frac{D}{d}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

где $\psi(s, \tau)$—наименьший положительный корень[1] уравнения

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{s}\operatorname{ctg}(\psi\tau\sqrt{s})$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости.

Результаты М. Г. Крейна пересекаются с результатами В. А. Якубовича, В. Б. Лидского и М. Г. Нейгауз.

9. В заметке[96] В. И. Бурдина установила следующий Л-критерий[2]. Пусть $i_1, \ldots, i_s$—точки максимумов, а $j_1, \ldots, j_s$ — точки минимумов функции $p(t) > 0$ $(0 \leqslant t < \omega)$. Если для некоторого $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$k\pi < \int_0^\omega \sqrt{p(t)}\,dt - \frac{1}{2}\ln\frac{p(i_1)\ldots p(i_s)}{p(j_1)\ldots p(j_s)}$$

$$\int_0^\omega \sqrt{p(t)}\,dt + \frac{1}{2}\ln\frac{p(i_1)\ldots p(i_s)}{p(j_1)\ldots p(j_s)} < (k+1)\pi$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво. В § 4 будет показано, как получается этот критерий из критерия I В. А. Якубовича.

§ 3. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + q(t)\dot{x} + p(t)x = 0; \qquad q(t+\omega) = q(t), \quad p(t+\omega) = p(t) \tag{0.4}$$

1. Известная подстановка

$$x = z\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t q(t_1)\,dt_1\right]$$

приводит уравнение (0.4) к виду

$$\ddot{z} + p^*(t)z = 0 \qquad \left(p^* = p - \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}\dot{q}\right) \tag{3.1}$$

Поскольку характеристичные числа связаны равенством

$$\chi\{x\} = \chi\{z\} + \frac{1}{2}q_{\text{ср}}$$

то при $\chi\{z\} > -{}^1\!/_2\, q_{\text{ср}}$ тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически

---

[1] Как сообщил М. Г. Крейн, аргументы у функции ω (обозначенной нами через ψ) в статье [74] (стр. 338) должны быть поставлены в алфавитном порядке: $\omega(s, t)$. На стр. 340 статьи[74] ошибочно выписано уравнение

$$RJ_0(\sqrt{\lambda H}\,r) + r(R-r)\sqrt{\lambda H}\,J_0'(\sqrt{\lambda H}\,r) = 0$$

вместо уравнения

$$J_0(\sqrt{\lambda H}\,r) - rJ_0'(\sqrt{\lambda H}\,r)\sqrt{\lambda H}\ln\frac{r}{R} = 0$$

Соответствующие изменения должны быть проделаны в последующих строчках этой страницы. На стр. 345 в формулировке теоремы 8 слова «при некотором натуральном n» должны быть заменены словами «при некотором $n = 0, 1, 2, \ldots$».

[2] В формулировке критерия в [96] все неравенства надлежит записать открытыми и коэффициент $^1/_4$ в обоих неравенствах должен быть заменен на $^1/_2$.

устойчиво, а при $\chi\{z\} < -{}^1/_2\, q_{\text{ср}}$—неустойчиво. Известно [5], что

$$\chi\{z\} = -\frac{1}{\omega}\operatorname{Re}\ln|\rho|_{\text{наиб}}$$

где ρ—корни квадратного уравнения

$$\rho^2 - 2A^*\rho + 1 = 0$$

и постоянная A^* соответствует уравнению (3.1). Поэтому при $q_{\text{ср}} < 0$ тривиальное решение уравнения (0.4) неустойчиво, а при $q_{\text{ср}} > 0$ тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво, если

$$|A^*| < \operatorname{ch}\frac{1}{2}\,\omega\, q_{\text{ср}}$$

и неустойчиво, если знак неравенства будет обратным.

Если функция p^* неотрицательна, то анализ устойчивости можно провести, следуя Ляпунову [13] и учитывая сдвиг пределов для A^*.

При $q_{\text{ср}} = 0$ устойчивость тривиального решения уравнения (0.4) равносильна устойчивости тривиального решения уравнения (3.1) и любое условие устойчивости или неустойчивости для уравнения (3.1) распространяется и на уравнение (0.4).

После этих замечаний перейдем к обзору достаточных условий устойчивости тривиального решения уравнения (0.4).

2. В статье [45] М. Я. Леонов установил, что при условиях

$$p(t) > 0, \qquad q(t) > -\frac{1}{2}\,\frac{\dot p(t)}{p(t)}$$

тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво. При этом функции p и q могут и не быть периодическими. Это же условие иным путем было позднее получено и в статьях [58, 82], авторы которых не обратили внимания на результат М. Я. Леонова.

Заменой независимого переменного

$$\vartheta = \int_0^t \sqrt{p(t_1)}\, dt_1$$

уравнение (0.4) при $p(t) > 0$ может быть приведено к виду

$$\frac{d^2x}{d\vartheta^2} + 2\gamma(\vartheta)\frac{dx}{d\vartheta} + x = 0 \qquad \left(\gamma(\vartheta) = \left[\frac{q(t)}{\sqrt{p(t)}} + \frac{\dot p(t)}{2p(t)\sqrt{p(t)}}\right]_{t=t(\vartheta)}\right) \tag{3.2}$$

где γ—периодическая функция ϑ с периодом

$$L = \int_0^\omega \sqrt{p(t)}\, dt$$

Исследование устойчивости тривиального решения уравнения (3.2) содержится в работах М. Я. Леонова [50, 52, 53, 59, 91].

В заметке [59] функция γ предполагается нечетной. Тогда, если $\varphi_1(\vartheta)$ есть решение уравнения

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = 1 + \gamma(\vartheta)\sin 2\varphi \tag{3.3}$$

отвечающее начальному условию $\varphi_1(0) = 0$, а функция Φ определяется формулой

$$\Phi(\vartheta) = \exp\left(-2\int_0^\vartheta \gamma(\vartheta_1)\cos 2\varphi_1(\vartheta_1)\, d\vartheta_1\right)$$

то при условии

$$\sqrt{\Phi(L)}\cos\varphi_1(L) < 1$$

тривиальное решение уравнения (3.2) устойчиво, а при условии

$$\sqrt{\Phi(L)}\cos\varphi_1(L) > 1$$

неустойчиво. Приближенная формула для функции φ_1

$$\varphi_1(\vartheta) \approx \vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{2}\,\psi(\vartheta)\int_0^\vartheta \gamma(\vartheta_1)\,\psi^{-1}(\vartheta_1)\sin 2\vartheta_1\,d\vartheta_1\right]$$

где

$$\psi(\vartheta) = \exp\left(2\int \gamma(\vartheta)\cos 2\vartheta\, d\vartheta\right)$$

Эта формула дает довольно точное приближение для функции $\varphi_1(\vartheta)$, когда

$$\left[\int_0^\vartheta \gamma(\vartheta_1)\,d\vartheta_1\right]_{\text{наиб}} \leqslant \frac{1}{4}\ln 10 + \left[\int_0^\vartheta \gamma(\vartheta_1)\,d\vartheta_1\right]_{\text{наим}}$$

что показано в статье [45]. Однако было бы важно сформулировать условия устойчивости, исходя из приближенной формулы для функции φ_1.

В заметке [91] М. Я. Леонов установил, что общий интеграл уравнения (3.2) может быть представлен в виде

$$x = \left[Av\sin\varphi^* + \frac{B}{v}(F\sin\varphi^* + \cos\varphi^*)\right]\exp\left(-\int \gamma\, d\vartheta\right) \qquad (A,\ B = \text{const})$$

где $\varphi^*(\vartheta)$ — частное решение уравнения (3.3), а

$$v(\vartheta) = \exp\left(-\int_0^\vartheta \gamma\cos^2\varphi^* d\vartheta\right), \qquad F(\vartheta) = 2v^2\int_0^\vartheta \gamma v^{-2}\sin 2\varphi^*\, d\vartheta$$

В этой же заметке даны приближенное решение уравнения (3.3) и приближенное вычисление функций v и F.

3. В статье [82] предполагается, что

$$0 < l \leqslant q(t) \leqslant L, \qquad 0 < m \leqslant p(t) \leqslant M$$

(в принятых обозначениях для уравнения (0.4), при этом функции q и p могут и не быть периодическими). Следуя второму методу Ляпунова, устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (0.4) в виде

$$l > \sqrt{M} - \sqrt{m}, \qquad L < \frac{M + 2\sqrt{Mm} + 5m}{\sqrt{M} - \sqrt{m}} \tag{3.4}$$

при этом граница снизу для l не может быть уменьшена, если за функцию V Ляпунова принимается квадратичная форма с постоянными коэффициентами. В случае, когда L превосходит указанную границу, первое из условий (3.4) принимает вид:

$$l > \frac{C}{4}(\sqrt{M} - \sqrt{m})^2 + \frac{1}{C}$$

где C — больший корень квадратного уравнения

$$\frac{1}{4}(M + 6\sqrt{Mm} + 9m)\,C^2 - LC + 1 = 0$$

4. Основываясь на оценке характеристичного числа решений уравнения (3.1) (теоремы 1 и 2, § 2), В. А. Якубович получил [87, 97] следующие Л-критерии устойчивости тривиального решения уравнения (0.4) при $q_{\text{ср}} > 0$.

Первый критерий. а) Пусть $p^*(t) \leqslant 0$, тогда тривиальное решения уравнения (0.4) асимптотически устойчиво, если

$$q_{\text{ср}} > 2\sqrt{-p^*_{\text{ср}}}$$

б) Пусть $p^*(t) \leqslant a^2$ и $n\pi/\omega < a \leqslant (n+1)\pi/\omega$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, тогда тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво, если

$$\int_0^\omega [a^2 - p^*(t)]\,dt < \min_{k=0,1,\ldots,n} a\left[a\omega - k\pi + \frac{1}{4(a\omega - k\pi)}(\omega q_{\text{ср}})^2\right]$$

Второй критерий. а) Пусть $p^*(t) \geqslant b^2$ и $n\pi/\omega \leqslant b \leqslant (n+1)\pi/\omega$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Если

$$p_{\text{ср}}^* \leqslant b^2 + \frac{1}{\omega}\min_{k \geqslant n+1} \frac{2bk}{\sin\frac{b\omega}{k}}\left(\operatorname{ch}\frac{\omega q_{\text{ср}}}{2k} + \cos\frac{b\omega}{k}\right)$$

то тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво.

б) Пусть $p^*(t) \geqslant 0$. Если

$$p_{\text{ср}}^* \leqslant \min_{k \geqslant 1} \frac{4}{\omega^2} k^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\omega q_{\text{ср}}}{4k} = \begin{cases} \dfrac{4}{\omega^2}\operatorname{ch}^2\dfrac{\omega q_{\text{ср}}}{4} & \text{при} \quad \omega q_{\text{ср}} \leqslant 4.796 \\ 0.5518\, q_{\text{ср}}^2 & \text{при} \quad \omega q_{\text{ср}} \geqslant 4.796 \end{cases}$$

то тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво.

в) Пусть $p^*(t) \geqslant -b^2$. Если $q_{\text{ср}} > 2b$ и

$$p_{\text{ср}}^* \leqslant -b^2 + \frac{1}{\omega}\min_{k \geqslant 1} \frac{2bk}{\operatorname{sh}\frac{b\omega}{k}}\left(\operatorname{ch}\frac{\omega q_{\text{ср}}}{2k} + \operatorname{ch}\frac{b\omega}{k}\right)$$

то тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво.

5. Если $p(t) \geqslant 0$, то метод Ляпунова [13] анализа устойчивости посредством приближенного вычисления A удается распространить [92] для уравнения (0.4). Мы изложим это в § 5 для системы второго порядка. Сейчас остановимся на том специальном случае, когда $q(t) \equiv a > 0$, т. е. рассмотрим возмущенное движение диссипативной механической системы с одной степенью свободы при постоянной диссипации энергии [31, 90, 92]. Заметим, что известная подстановка

$$x = y \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t [q(t_1) - q_{\text{ср}}]\,dt_1\right)$$

приводит уравнение (0.4) к виду

$$\ddot{y} + q_{\text{ср}}\dot{y} + \left[p(t) - \frac{1}{2}\dot{q}(t) - \frac{1}{4}q^2(t) + \frac{1}{4}q_{\text{ср}}^2\right]y = 0$$

и при этом $\chi\{x\} = \chi\{y\}$. Итак, изложим распространение метода Ляпунова анализа устойчивости на уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + p(t)\,x = 0 \qquad (a > 0,\ p(t+\omega) = p(t) \geqslant 0) \tag{3.5}$$

В этом случае [90, 92] положим

$$A_1 = \frac{1}{a}\,\omega p_{\text{ср}} \operatorname{th}\frac{a\omega}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{2a^2}(\omega p_{\text{ср}})^2 - \frac{e^{-a\omega}}{(1+e^{-a\omega})a^2}\int_0^\omega e^{-at}p\,dt\int_0^\omega e^{at}p\,dt - \frac{1}{a^2}\operatorname{th}\frac{a\omega}{2}\int_0^\omega e^{-at}p\,dt\int_0^t e^{at_1}p_1\,dt_1$$

$$A_3 = \frac{1}{a^3}\operatorname{th}\frac{a\omega}{2}\int_0^\omega p\,dt\int_0^t p_1\,dt_1\int_0^{t_1} p_2\,dt_2 + \frac{1}{(1+e^{-a\omega})a^3}[-K_1(a) +$$

$$+ e^{-a\omega}K_1(-a) + K_2(a) - e^{-a\omega}K_2(-a) - K_3(a) + e^{-a\omega}K_3(-a)]$$

где

$$K_1(a) = \int_0^\omega p\,dt \int_0^t e^{-at_1} p_1 dt_1 \int_0^{t_1} e^{at_2} p_2\,dt_2$$

$$K_2(a) = \int_0^\omega e^{-at} p\,dt \int_0^t p_1 dt_1 \int_0^{t_1} e^{at_2} p_2\,dt_2$$

$$K_3(a) = \int_0^\omega e^{-at} p\,dt \int_0^t e^{at_1} p_1 dt_1 \int_0^{t_1} p_2\,dt_2$$

и $p_i = p(t_i)$ $(i = 1, 2)$. В первом приближении [1] получаем область устойчивости в пространстве параметров системы, определяемую неравенством, установленным Р. Эйнауди [31]:

$$\omega p_{\text{ср}} \operatorname{th} \frac{a\omega}{2} \leqslant 2a$$

Во втором приближении область неустойчивости определяется неравенствами

$$\omega p_{\text{ср}} \operatorname{th} \frac{a\omega}{8} \leqslant 4a, \qquad A_2 \leqslant A_1 - 2$$

В третьем приближении область устойчивости определяется неравенствами

$$\omega p_{\text{ср}} \operatorname{th} \frac{a\omega}{8} \leqslant 4a, \qquad A_2 \leqslant A_1, \qquad A_3 \leqslant 2 - A_1 + A_2$$

а область неустойчивости — неравенствами

$$\omega p_{\text{ср}} \operatorname{th} \frac{a\omega}{10} \leqslant 5a, \qquad A_2 \geqslant A_1 + A_3$$

Дальнейший анализ можно провести, лишь рассматривая члены ряда для A, следующие за A_3.

§ 4. Перейдем к обзору работ по устойчивости тривиального решения системы второго порядка канонического вида:

$$\frac{dx_1}{dt} = h_{12}(t)\,x_1 + h_{22}(t)\,x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -h_{11}(t)\,x_1 - h_{12}(t)\,x_2 \tag{4.1}$$

или в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{JH}(t)\,x$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}(t+\omega) = \mathrm{H}(t) = \| h_{ij}(t) \|_1^2 \qquad (h_{21} = h_{12}), \qquad \mathrm{J} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

1. В заметке [64] М. Г. Крейн впервые выделил класс систем канонического вида положительного типа, характеризующийся тем, что их матрицам-функциям отвечает неотрицательная квадратичная форма $(\mathrm{H}(t)\,a, a)$ (a — постоянный вектор), т. е.

$$h_{11}(t) \geqslant 0, \qquad h_{11}(t)\,h_{22}(t) - [h_{12}(t)]^2 \geqslant 0 \qquad (0 \leqslant t < \omega)$$

положительная в среднем, т. е.

$$\int_0^\omega h_{11}(t)\,dt > 0, \qquad \int_0^\omega h_{11}(t)\,dt \int_0^\omega h_{22}(t)\,dt - \left[\int_0^\omega h_{12}(t)\,dt\right]^2 > 0$$

---

[1] За номер приближения будем принимать наибольший индекс вычисленного A_n. Указанные неравенства гарантируют асимптотическую устойчивость или соответственно неустойчивость тривиального решения уравнения (3.5).

Мы будем также говорить, что матрица-функция $\mathrm{H}(t)$ неотрицательна и соответственно положительна в среднем [1]. Оказалось, что на системы канонического вида положительного типа переносятся основные из результатов Ляпунова для уравнений (0.1) и (1.1) при $p(t) \geqslant 0$. Эти исследования мы изложим в § 7, а здесь приведем следующий Л-критерий М. Г. Крейна.

Критерий I_2 [98]. Пусть матрица $\mathrm{H}(t)$ неотрицательна и положительна в среднем. Тогда, если выполнено неравенство

$$\int_0^\omega |h_{12}(t)|\,dt + \left[\int_0^\omega h_{11}(t)\,dt \int_0^\omega h_{22}(t)\,dt\right]^{1/2} < 2$$

то тривиальное решение системы (4.1) устойчиво. Критерий I_2 для уравнения (0.1) переходит в критерий (0.2) Ляпунова.

2. Перейдем к обзору результатов В. А. Якубовича [65, 70, 97]. Им проведен тонкий анализ топологической структуры множества троек периодических функций $h_{22}(t)$, $h_{12}(t)$, $h_{11}(t)$ [т. е. множества матриц $\mathrm{H}(t)$]. Установлено, что множество матриц $\mathrm{H}(t)$, для которых все решения системы (4.1) ограничены (не ограничены) при $t \to \pm\infty$, распадается на счетное число открытых связных подмножеств — «областей устойчивости» $\mathscr{O}_k$ («областей неустойчивости» $\mathscr{H}_k$), $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. На границах располагаются матрицы $\mathrm{H}(t)$, для которых имеются периодические или полупериодические решения периода ω.

Обозначим φ_ξ угол поворота за время ω вектора — решения ξ системы (4.1) с компонентами x_2 и x_1. Из качественного поведения решений для различных областей устойчивости и неустойчивости В. А. Якубович устанавливает следующее.

Для того чтобы $\mathrm{H}(t)$ принадлежало $\mathscr{O}_k$, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений $k\pi < \varphi_\xi < (k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Для того чтобы $\mathrm{H}(t)$ принадлежало $\mathscr{H}_k$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись два решения ξ_1 и ξ_2 с углами поворота $\varphi_{\xi_1} > k\pi$, $\varphi_{\xi_2} < k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Из теоремы сравнения [70, 97], доказанной в [97] для линейной системы второго порядка без предположения периодичности коэффициентов системы, и сформулированного выше утверждения относительно углов поворота решений вытекает следующая теорема.

---

[1] Система (4.1) ортогональным преобразованием может быть приведена к системе, у которой матрица $\mathrm{H}(t)$ неотрицательна и положительна в среднем, причем устойчивость тривиального решения первоначальной системы равносильна устойчивости преобразованной системы. Именно, замена

$$y = e^{\vartheta t\,\mathrm{J}} x \qquad \left(y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; \quad = \frac{k\pi}{\omega}\ ;\ k = 1, 2, \ldots\right)$$

приведет систему (4.1) к системе

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{J}\mathrm{H}_1(t)\,y$$

где периодическая симметрическая матрица $\mathrm{H}_1(t)$ имеет вид:

$$\mathrm{H}_1(t) = \frac{k\pi}{\omega}\mathrm{I} + e^{\vartheta t\,\mathrm{J}}\,\mathrm{H}(t)\,e^{-\vartheta t\,\mathrm{J}} \qquad \left(\mathrm{I} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\right)$$

Поскольку собственные значения h_μ и $h_\mu^{(1)}$ матриц H и H_1 связаны соотношением

$$h_\mu^{(1)} = \frac{k\pi}{\omega} + h_\mu \qquad (\mu = 1, 2)$$

то при достаточно большом k матрица $\mathrm{H}_1(t)$ будет неотрицательна и положительна в среднем. Утверждение справедливо для линейной системы канонического вида с периодическими коэффициентами произвольного порядка.

Пусть $H_1 \geqslant H_2$ будет обозначать, что для любого постоянного вектора a имеем $(H_1 a, a) \geqslant (H_2 a, a)$, т. е. квадратичная форма $((H_1 - H_2) a, a)$ неотрицательна.

Если выполнены неравенства

$$H_1(t) \leqslant H(t) \leqslant H_2(t) \qquad (0 \leqslant t < \omega)$$

и матрицы $H_1(t)$ и $H_2(t)$ принадлежат k-й области устойчивости $\mathscr{O}_k$ (неустойчивости $\mathscr{H}_k$), то и матрица H принадлежит той же области устойчивости (неустойчивости).

В. А. Якубовичем доказываются следующие Л-критерии устойчивости и неустойчивости тривиального решения системы (4.1).

Критерий I. Пусть взята матрица

$$H_0 = \begin{Vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \beta_0 & \gamma_0 \end{Vmatrix}$$

где $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ — произвольные действительные числа, удовлетворяющие условиям $\alpha_0 > 0$, $\alpha_0\gamma_0 - \beta_0^2 = 1$, и $h_{\min}(t)$ и $h_{\max}(t)$ — наименьший и наибольший корни уравнения $\det(H(t) - hH_0) = 0$. Если для некоторого $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$k\pi < \int_0^\omega h_{\min}(t)\,dt \leqslant \int_0^\omega h_{\max}(t)\,dt < (k+1)\pi$$

то тривиальное решение системы (4.1) устойчиво и $H(t)$ принадлежит $\mathscr{O}_k$.

В частности, если $\alpha_0 = \gamma_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, то $h_{\min}(t)$ и $h_{\max}(t)$ суть наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $H(t)$:

$$h_{\min}(t) = \frac{h_{11} + h_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2}$$

$$h_{\max}(t) = \frac{h_{11} + h_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2}$$

Покажем, как из критерия I получается критерий В. И. Бурдиной (§ 2). Запишем уравнение (0.1) в виде системы

$$\frac{dy}{dt} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{Vmatrix} y \qquad \left(y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}\right) \tag{4.2}$$

Преобразование

$$z = \begin{Vmatrix} f & 0 \\ 0 & \frac{1}{f} \end{Vmatrix} y \qquad (f(t+\omega) = f(t) > 0)$$

переведет систему (4.2) в систему

$$\frac{dz}{dt} = JH(t)\,z, \qquad H(t) = \begin{Vmatrix} \frac{p}{f^2} & \frac{\dot{f}}{f} \\ \frac{\dot{f}}{f} & f^2 \end{Vmatrix} \tag{4.3}$$

причем устойчивость тривиального решения обеих систем равносильна. Пусть

$$f(t) = \sqrt[4]{p(t)}$$

тогда имеем

$$h_{\min}(t) = \sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt[4]{p}}\left|\frac{d\sqrt[4]{p}}{dt}\right|, \qquad h_{\max}(t) = \sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt[4]{p}}\left|\frac{d\sqrt[4]{p}}{dt}\right|$$

Замечая, что

$$\int_0^\omega \frac{1}{\sqrt[4]{p}} \left| \frac{d\sqrt[4]{p}}{dt} \right| dt = \frac{1}{2} \ln \frac{p(i_1)\ldots p(i_s)}{p(j_1)\ldots p(j_s)}$$

где $i_1, \ldots, i_s$ — точки максимумов, а $j_1, \ldots, j_s$ — точки минимумов функции $p(t) > 0$, и применяя критерий I к системе (4.3), получим критерий В. И. Бурдиной [96].

Критерий II. Пусть матрица $\mathrm{H}(t)$ неотрицательна. Обозначим

$$g(t) = \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2}$$

и подсчитаем константы

$$A_{ij}^{\pm} = \int_0^\omega h_{ij}(t) \exp\left(\pm \int_0^t g(t_1)\, dt_1\right) dt \qquad (i, j = 1, 2)$$

$$M^{\pm} = \frac{1}{2}(A_{11}^{\pm} + A_{22}^{\pm}) + \frac{1}{2}\sqrt{(A_{11}^{\pm} - A_{22}^{\pm})^2 + 4(A_{12}^{\pm})^2}$$

$$m^{\pm} = \frac{1}{2}(A_{11}^{\pm} + A_{22}^{\pm}) - \frac{1}{2}\sqrt{(A_{11}^{\mp} - A_{22}^{\pm})^2 + 4(A_{12}^{\pm})^2}$$

Если для некоторого $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$k\pi < m^- \leqslant M^+ < (k+1)\pi$$

то тривиальное решение системы (4.1) устойчиво и $\mathrm{H}(t)$ принадлежит $\mathscr{O}_k$, а если выполнены неравенства

$$M^- > k\pi, \qquad m^+ < k\pi$$

то тривиальное решение системы (4.1) неустойчиво и $\mathrm{H}(t)$ принадлежит $\mathscr{H}_k$.

В случае неположительной матрицы $\mathrm{H}(t)$ в предыдущих неравенствах следует заменить $M^{\pm}$ на $M^{\mp}$, $m^{\pm}$ на $m^{\mp}$.

В. А. Якубовичем [97] предложен метод определения устойчивости тривиального решения системы (4.1), близкий по идее к методу М. И. Ельшина [36] для уравнения (0.1). Этот метод основывается на сравнении данной системы (4.1) с системой, у которой коэффициенты являются кусочно-постоянными функциями. Первый шаг предложенного метода приводит к следующему критерию.

Критерий III. Обозначим

$$\delta(t) = \int_0^t [h_{12}(t) - (h_{12})_{\text{ср}}]\, dt$$

$$\alpha^+ = \sup\left[h_{22}(t)\, e^{-2\delta(t)}\right], \qquad \alpha^- = \inf\left[h_{22}(t)\, e^{-2\delta(t)}\right]$$

$$\gamma^+ = \sup\left[h_{11}(t) e^{2\delta(t)}\right], \qquad \gamma^- = \inf\left[h_{11}(t)\, e^{2\delta(t)}\right]$$

Если $h_{22}(t)\, e^{-2\delta(t)}$ или $h_{11}(t)\, e^{2\delta(t)}$ не тождественные постоянные (иначе система (4.1) интегрируется в явной форме) и выполнены неравенства

$$\frac{k^2\pi^2}{\omega^2} \leqslant \alpha^-\gamma^- - (h_{12})_{\text{ср}}^2 \leqslant \alpha^+\gamma^+ - (h_{12})_{\text{ср}}^2 \leqslant \frac{(k+1)^2\pi^2}{\omega^2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и при этом суммы $\alpha^+ + \gamma^+$ и $\alpha^- + \gamma^-$ одинакового знака, то тривиальное решение системы (4.1) устойчиво и $\mathrm{H}(t)$ принадлежит либо $\mathscr{O}_k$, если указанные суммы положительны, либо $\mathscr{O}_{-k-1}$, если отрицательны.

Если

$$\alpha^{\pm}\gamma^{\pm} - (h_{12})_{\text{ср}}^2 < 0$$

то тривиальное решение системы (4.1) неустойчиво и $\mathrm{H}(t)$ принадлежит $\mathscr{H}_0$.

§ 5. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)\, x_1 + p_{12}(t)\, x_2\,, \qquad \frac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)\, x_1 + p_{22}(t)\, x_2 \tag{5.1}$$

1. При условии, что функции p_{12} и p_{21} знакопостоянны [1], для анализа устойчивости тривиального решения системы (5.1) удается распространить [92] метод Ляпунова [13].

Обозначим $\alpha = \omega\,(p_{11})_{\text{ср}}$, $\beta = \omega\,(p_{22})_{\text{ср}}$, $a = (\alpha - \beta)\,/\,\omega$ и, не нарушая общности, предположим $a \geqslant 0$. Уравнение для характеристического показателя ρ системы запишется в виде

$$\rho^2 - (1 + e^{-a\omega})\, A\rho + e^{-a\omega} = 0 \quad (A = 1 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots)$$

Выражения для A_n могут быть представлены в виде

$$A_n = \frac{(-1)^n}{1 + e^{-a\omega}} \int\limits_0^{\omega} dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} e^{at_1} (\psi_1 - \psi_2) \ldots$$

$$\ldots e^{at_{n-1}} (\psi_{n-1} - \psi_n)\, e^{at_n} [\psi(\omega) - \psi_1 + \psi_n e^{-a\omega}]\, Q_1 \ldots Q_n\, dt_n$$

причем

$$Q(t) = p_{21}(t) \exp \int\limits_0^t [p_{11}(t_1) - p_{22}(t_1) - a]\, dt_1\,, \qquad Q_\nu = Q(t_\nu)$$

$$\psi(t) = \int\limits_0^t e^{-at_1} P(t_1)\, dt_1\,, \qquad \psi_\nu = \psi(t_\nu)$$

$$P(t) = p_{12}(t) \exp \int\limits_0^t [p_{22}(t_1) - p_{11}(t_1) + a]\, dt_1$$

Проведем анализ устойчивости при $a > 0$. При $\alpha + \beta > 0$ тривиальное решение системы (5.1) неустойчиво. При $\alpha + \beta = 0$ тривиальное решение неустойчиво при условии $|A| > \operatorname{sch} {}^1/_2\, a\omega$, а интервал $|A| < \operatorname{sch} {}^1/_2\, a\omega$ требует особого рассмотрения. Поэтому определение областей устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров системы (5.1) проведем для $\alpha + \beta < 0$, замечая, что области неустойчивости распространяются и на случай $\alpha + \beta = 0$.

а) Допустим функции p_{12} и p_{21} разных знаков. В первом приближении [2]

---

[1] Заметим, что любая система уравнений (5.1) ортогональным преобразованием с периодическими коэффициентами может быть приведена к виду, когда функции на побочной диагонали матрицы коэффициентов знакопостоянны. Запишем систему (5.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{P}(t)\, x \qquad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \mathrm{P}(t + \omega) = \mathrm{P}(t) = \| p_{ij}(t) \|_1^2 \right)$$

и выполним подстановку

$$y = \exp\left(\frac{2k\pi}{\omega}\, t\, \mathrm{J}\right) x \qquad \left(= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ \ \mathrm{J} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},\ \ k = \pm 1,\ \pm 2, \ldots \right)$$

В новых переменных система уравнений принимает вид:

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{Q}(t)\, y,\ \ \mathrm{Q}(t) = \| q_{ij}(t) \|_1^2 = \frac{2k\pi}{\omega}\, \mathrm{J} + \exp\left(\frac{2k\pi}{\omega}\, t\, \mathrm{J}\right) \mathrm{P}(t) \exp\left(-\frac{2k\pi}{\omega}\, t\, \mathrm{J}\right)$$

Матрица-функция $\mathrm{Q}(t)$ периодическая и при достаточно большом по модулю k функции q_{12} и q_{21} знакопостоянны.

[2] См. сноску на стр. 491.

область устойчивости определяется неравенствами

$$\alpha \leqslant 0, \qquad A_1 \leqslant \left[\left(\frac{2}{1+e^{\beta-\alpha}},\ \frac{8}{1+e^{\alpha-\beta}}\right)_{\text{наиб}};\ \frac{(1+e^{-\alpha})(1+e^{\beta})}{1+e^{\beta-\alpha}}\right]_{\text{наим}}$$

а область неустойчивости — неравенством

$$A_1 \leqslant \frac{(1-e^{-\alpha})(1-e^{\beta})}{1+e^{\beta-\alpha}}$$

которое может быть выполнено только при $\alpha > 0$.

Во втором приближении область устойчивости определяется неравенствами

$$A_1 \leqslant \left\{\left[\frac{3}{1+e^{\beta-\alpha}};\ \frac{(1+e^{-\alpha})(1+e^{\beta})}{1+e^{\beta-\alpha}}\right]_{\text{наим}};\ \left[\frac{18}{1+e^{\alpha-\beta}},\ \frac{(1+e^{-\alpha})(1+e^{\beta})}{1+e^{\beta-\alpha}}\right]_{\text{наим}}\right\}_{\text{наиб}}$$

$$A_2 \leqslant A_1 + \frac{(e^{-\alpha}-1)(1-e^{\beta})}{1+e^{\beta-\alpha}}$$

а область неустойчивости — неравенствами

$$A_1 \leqslant \left(\frac{4}{1+e^{\beta-\alpha}},\ \frac{32}{1+e^{\alpha-\beta}}\right)_{\text{наиб}}, \qquad A_2 \leqslant A_1 - \frac{(1+e^{-\alpha})(1+e^{\beta})}{1+e^{\beta-\alpha}}$$

В третьем приближении область устойчивости определяется неравенствами

$$A_1 \leqslant \left(\frac{4}{1+e^{\beta-}},\ \frac{32}{1+e^{\alpha-\beta}}\right)_{\text{наиб}}, \qquad A_2 \leqslant A_1 + \frac{(e^{-\alpha}-1)(1-e^{\beta})}{1+e^{\beta-\alpha}}$$

$$A_3 \leqslant \frac{(1+e^{-\alpha})(1+e^{\beta})}{1+e^{\beta-\alpha}} - A_1 + A_2$$

а область неустойчивости — неравенствами

$$A_1 \leqslant \left(\frac{5}{1+e^{\beta-\alpha}},\ \frac{50}{1+e^{\alpha-\beta}}\right)_{\text{наиб}}, \qquad A_2 \geqslant \frac{(e^{-\alpha}-1)(1-e^{\beta})}{1+e^{\beta-\alpha}} + A_1 + A_3$$

Дальнейший анализ можно провести лишь с рассмотрением членов ряда для A, следующих за A_3.

б) Допустим функции p_{12} и p_{21} одинаковых знаков. При этом невозмущенное движение неустойчиво не только при $\alpha+\beta > 0$, но и при $\alpha+\beta = 0$, а при $\alpha+\beta < 0$ — при $\alpha \geqslant 0$. Остается рассмотреть случай $\beta < \alpha < 0$.

В первом приближении область устойчивости определяется неравенством

$$|A_1| \leqslant \frac{1}{1+e^{\beta-\alpha}} \ln \frac{e^{-\alpha}+e^{\beta}-e^{\beta-\alpha}}{1+e^{\beta-\alpha}}$$

либо неравенством

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{1+e^{\beta-\alpha}}{2}|A_1|\right)^n \leqslant \frac{1+e^{\beta-\alpha}}{2}\operatorname{th}\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{e^{-\alpha}+e^{\beta}}{2}$$

а область неустойчивости — неравенством

$$|A_1| \geqslant \frac{(e^{-\alpha}-1)(1-e^{\beta})}{1+e^{\beta-\alpha}}$$

Во втором приближении область устойчивости определяется неравенством

$$1+|A_1| + \frac{2A_2}{(1+e^{\beta-\alpha})^2 A_1^2}\{\exp[(1+e^{\beta-\alpha})|A_1|] - 1 - (1+e^{\beta-\alpha})|A_1|\} \leqslant \frac{e^{-\alpha}+e^{\beta}}{1+e^{\beta-\alpha}}$$

либо неравенством

$$1+|A_1|+A_2\left\{1+4\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left[\frac{(1+e^{\alpha-\beta})\,|A_1|}{2}\right]^{n-2}\right\}\leqslant\frac{e^{-\alpha}+e^{\beta}}{1+e^{\beta-\alpha}}$$

а область неустойчивости — неравенством

$$A_2\geqslant\frac{(e^{-\alpha}-1)(1-e^{\beta})}{1+e^{\beta-\alpha}}-|A_1|$$

2. В заметке [94] методами, близкими к применяемым В. А. Якубовичем [76, 97], В. И. Бурдина установила следующий критерий устойчивости тривиального решения системы (5.1). Обозначим

$$\mu_0=\frac{1}{2\omega}\int_0^{\omega}[p_{11}(t)+p_{22}(t)]\,dt$$

а через $h_{\min}(t)$ и $h_{\max}(t)$— наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы

$$\left\|\begin{matrix}-p_{21} & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{22})\\ \frac{1}{2}(p_{11}-p_{22}) & p_{12}\end{matrix}\right\|$$

Если при $\mu_0<0$ хотя бы для одного $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots,\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi$ имеют место неравенства

$$k\pi-\int_0^{\omega}h_{\min}(t)\,dt\leqslant\arccos\frac{1-\operatorname{ch}\mu_0\omega\cos\beta}{\operatorname{ch}\mu_0\omega-\cos\beta}$$

$$\int_0^{\omega}h_{\max}(t)\,dt-k\pi\leqslant\arccos\frac{1+\operatorname{ch}\mu_0\omega\cos\beta}{\operatorname{ch}\mu_0\omega+\cos\beta}$$

то тривиальное решение системы (5.1) устойчиво. Полагая $\beta=0$ или $\beta=\pi$ и совершая предельный переход при $\mu_0\to0$ и заменяя знаки $\leqslant$ на $<$, получим критерий I В. А. Якубовича (§ 4).

§ 6. Перейдем к обзору условий устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}(t)\,x_1+\ldots+p_{sn}(t)\,x_n\qquad(s=1,\ldots,n)\tag{6.1}$$

1. Если $\{x_{sr}(t)\}$ $(s,\ r=1,\ldots,n)$ — система n независимых решений для системы (6.1), то функции $x_{sr}(t+\omega)$ также являются решениями, т. е.

$$x_{sr}(t+\omega)=a_{1r}x_{s1}(t)+\ldots+a_{nr}x_{sn}(t)\qquad(s,\ r=1,\ldots,n)$$

Уравнение [1]

$$\det\|a_{sr}-\delta_{sr}\rho\|=0$$

или в развернутом виде

$$\rho^n+A_1\rho^{n-1}+\ldots+A_{n-1}\rho+A_n=0\tag{6.2}$$

называется характеристичным, соответствующим периоду ω [1,5]. Поскольку коэффициенты A_ν $(\nu=1,\ldots,n)$ не зависят от взятой системы n независимых решений, то в качестве таковой можно взять фундаментальную систему, определяемую начальными условиями $x_{sr}(0)=\delta_{sr}$, и тогда характеристичное уравнение может быть записано в виде

$$\det\|x_{sr}(\omega)-\delta_{sr}\rho\|=0\tag{6.3}$$

[1] Всюду дальше δ_{sr} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{ss}=1$, $\delta_{sr}=0$ при $s\neq r$.

Ляпунов доказывает (п. 47[5]), что корни характеристичного уравнения присоединенной системы

$$\frac{dy_s}{dt} + p_{1s}(t)\,y_1 + \ldots + p_{ns}(t)\,y_n = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

суть обратные величины корням характеристичного уравнения данной.

Известно, что характеристичное число системы (6.1) равняется

$$\chi\{x_1, \ldots, x_n\} = -\frac{1}{\omega}\operatorname{Re}\ln|\rho_\nu|_{\text{наиб}}$$

где $\rho_\nu\,(\nu = 1, \ldots, n)$ — корни характеристичного уравнения (6.2).

Поскольку система уравнений (6.1) является правильной[5], то когда все корни характеристичного уравнения (6.2) по модулю меньше единицы, тривиальное решение системы (6.1) асимптотически устойчиво; если же среди корней имеются такие, модули которых больше единицы, то тривиальное решение неустойчиво.

2. Н. Г. Четаев[40] предложил метод определения устойчивости тривиального решения системы (6.1) неканонического вида. Будем вычислять фундаментальную систему по методу последовательных приближений Пикара

$$x_{sr}^{(0)} = \delta_{sr}, \; x_{sr}^{(1)} = \delta_{sr} + \int_0^t p_{sr}\,dt, \ldots,$$

$$x_{sr}^{(k)} = \delta_{sr} + \int_0^t \sum_{j=1}^n p_{sj}x_{jr}^{(k-1)}\,dt \qquad (s,\; r = 1, \ldots, n)$$

В k-м приближении характеристичное уравнение (6.3) определяется как

$$\det\|x_{sr}^{(k)}(\omega) - \delta_{sr}\rho\| = 0$$

или

$$\det\left\|\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \sum_{j=1}^n p_{sj}x_{jr}^{(k-1)}\,dt - \delta_{sr}\lambda\right\| = 0 \qquad \left(\lambda = \frac{\rho - 1}{\omega}\right) \tag{6.4}$$

Напишем по этому характеристическому уравнению соответствующую систему уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_s}{dt} = C_{s1}^{(k)}x_1 + \ldots + C_{sn}^{(k)}x_n \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{6.5}$$

где

$$C_{sr}^{(k)} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \sum_{j=1}^n p_{sj}x_{jr}^{(k-1)}\,dt \qquad (s,\, r = 1, \ldots, n)$$

и, в частности,

$$C_{sr}^{(1)} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p_{sr}\,dt$$

Если ни для каких целых неотрицательных значений $m_1, \ldots, m_n$, имеющих в сумме 2, не уничтожается выражение

$$m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни уравнения (6.4), то система уравнений[1]

[1] Вместо $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ можно взять любую определенно-положительную квадратичную форму переменных $x_1, \ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами.

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_k}{\partial x_s} (C_{s1}^{(k)} x_1 + \ldots + C_{sn}^{(k)} x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

имеет определенное решение, являющесся квадратичной формой:

$$V_k = \frac{1}{2} \sum_{s,r=1}^{n} b_{sr} x_s x_r \qquad (b_{sr} = b_{rs})$$

Полная производная от V_k по t, взятая в силу заданной системы (6.1), может быть записана в виде

$$\frac{dV_k}{dt} = \sum_{r,j=1}^{n} h_{rj}(t)\, x_r x_j$$

где

$$h_{rj}(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} [b_{rs} p_{sj}(t) + b_{js} p_{sr}(t)] \qquad (h_{jr} = h_{rj};\ r,\ j = 1, \ldots, n)$$

Допустим, существует такое $\mu > 0$, что

$$\sum_{r,j=1}^{n} h_{rj}(t)\, x_r x_j - \mu (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant 0 \tag{6.6}$$

Это будет выполнено, если все главные диагональные миноры матрицы

$$\| h_{rj}(t) - \delta_{rj}\mu \|$$

неотрицательны для всех t $0 \leqslant t < \omega$.

Тогда, если V_k определенно-отрицательна (что будет иметь место, если $\operatorname{Re} \lambda_\nu < 0$, $\nu = 1, \ldots, n$), то тривиальное решение системы (6.1) асимптотически устойчиво. Если же при некоторых значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$ V_k становится положительной (что будет иметь место, если среди корней уравнения (6.4) имеется хотя бы один с положительной действительной частью), то тривиальное решение системы (6.1) неустойчиво.

Таким образом, условия (6.6) определяют одновременную устойчивость (неустойчивость) тривиальных решений систем (6.5) и (6.1). В первом приближении ($k = 1$) система (6.5) совпадает с усредненной системой.

Основываясь на методе Н. Г. Четаева, Ш. Нугманова [39] получила следующие результаты. Запишем систему (6.1) в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = C_{s1} x_1 + \ldots + C_{sn} x_n + \tilde{p}_{s1}(t)\, x_1 + \ldots + \tilde{p}_{sn}(t)\, x_n \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где

$$C_{sr} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} p_{sr}\, dt\,, \qquad \tilde{p}_{sr}(t) = p_{sr}(t) - C_{sr}$$

Пусть линейные формы переменных $x_1, \ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами $U_j = A_{j1} x_1 + \ldots + A_{jn} x_n$ определены из условий

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial U_j}{\partial x_s} (C_{s1} x_1 + \ldots + C_{sn} x_n) = \varkappa_j U_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

где $\varkappa_j$ — корни характеристического уравнения

$$\det \| C_{sr} - \delta_{sr} \varkappa \| = 0 \qquad (s,\ r = 1, \ldots, n) \tag{6.7}$$

соответствующего системе уравнений с осредненными коэффициентами. Если все $\varkappa_j$ отличны от нуля и различны, то A_{jk} можно так пронормировать, чтобы

$$\Delta = \det \| A_{jk} \| = 1$$

Пусть периодические функции β_{ji} определяются равенствами

$$\beta_{ji}(t) = \sum_{s,r=1}^{n} \Delta_{js}\Delta_{ir}\widetilde{p}_{sr}(t) \qquad (j, i = 1, \ldots, n)$$

где Δ_{js} — минор определителя Δ, соответствующий элементу A_{js}. Определим периодические функции g_{kj} равенствами

$$g_{kj}(t) = (1-\varepsilon)(\varkappa_k + \overline{\varkappa}_k)^2 \delta_{kj} + (\varkappa_k + \overline{\varkappa}_k)\beta_{kj}(t) + (\varkappa_j + \overline{\varkappa}_j)\overline{\beta}_{jk}(t) \qquad (k, j = 1, \ldots, n)$$

где ε — отличная от нуля положительная постоянная.

Тогда имеют место:

Теорема 1. Если все корни характеристического уравнения (6.7) имеют отрицательные действительные части и для всех t $0 \leqslant t < \omega$ выполнены неравенства

$$g_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} g_{11} \cdots g_{1n} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ g_{n1} \cdots g_{nn} \end{vmatrix} > 0 \qquad (6.8)$$

то тривиальное решение системы (6.1) асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Если среди корней характеристического уравнения (6.7) имеется по крайней мере один корень с положительной действительной частью и притом выполняются неравенства (6.8) для всех t $0 \leqslant t < \omega$, то тривиальное решение системы (6.1) неустойчиво.

3. Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \mathrm{P}(t)\, x, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{P}(t+\omega) = \mathrm{P}(t) = \| p_{sr}(t) \|_1^n \qquad (6.9)$$

где λ — действительный параметр. При $\lambda = 1$ уравнение (6.9) представляет запись системы (6.1) в векторной форме. Матрица фундаментальной системы решений $\mathrm{X}(t)$ удовлетворяет соответствующему матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \lambda \mathrm{P}(t)\,\mathrm{X}, \qquad \mathrm{X}(0) = \mathrm{I}_n \qquad (\mathrm{I}_n \text{ — единичная матрица } n\text{-го порядка})$$

и представима в виде (см. [41])

$$\mathrm{X}(t) = \mathrm{Z}(t)\, e^{\mathrm{A}t}$$

В работе Н. П. Еругина [41] (глава V, § 7) для постоянной матрицы $\mathrm{A} = \omega^{-1} \ln \mathrm{X}(\omega)$ и периодической матрицы $\mathrm{Z}(t)$ построены ряды

$$\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathrm{A}_k, \qquad \mathrm{Z}(t) = \mathrm{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathrm{Z}_k(t)$$

где A_k и $\mathrm{Z}_k(t)$ определяются последовательно. Высказаны также и некоторые предположения о сходимости рядов. Доказано, что инварианты (коэффициенты векового уравнения), а следовательно, и определители Гурвица матрицы A суть целые функции λ.

§ 7. Рассмотрим линейную систему уравнений с периодическими коэффициентами канонического вида:

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda \frac{\partial H}{\partial x_{j+m}}, \qquad \frac{dx_{j+m}}{dt} = -\lambda \frac{\partial H}{\partial x_j} \qquad (j = 1, \ldots, m) \qquad (7.1)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2m} h_{jk}(t)\, x_j x_k, \qquad h_{jk}(t+\omega) = h_{jk}(t) = h_{kj}(t) \qquad (j,\ k = 1, \ldots, 2m)$$

а λ — действительный параметр.

1. Начнем с изложения результатов М. Г. Крейна [64,98], используя применяемую им терминологию. Систему (7.1) можно записать в виде одного векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \lambda\, \mathrm{JH}(t)\, x \tag{7.2}$$

Здесь x — вектор-функция, $\mathrm{H}(t)$ — симметрическая периодическая матрица-функция, а J — матрица специального вида:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2m} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}(t) = \| h_{jk}(t) \|_1^{2m}, \qquad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_m \\ -\mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix}$$

Точка λ_0 $(-\infty < \lambda_0 < \infty)$ называется λ-точкой устойчивости уравнения (7.2), если при $\lambda = \lambda_0$ тривиальное решение уравнения (7.2) устойчиво. Если же, кроме того, при $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ устойчиво тривиальное решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \mathrm{JH}_1(t)\, x$$

с периодической симметрической матрицей-функцией $\mathrm{H}_1(t)$, достаточно близкой к матрице-функции $\mathrm{H}(t)$, то $\lambda = \lambda_0$ называется λ-точкой сильной устойчивости уравнения (7.2). При этом для случая непрерывных матриц-функций под достаточно близкими $\mathrm{H}(t)$ и $\mathrm{H}_1(t)$ понимаются матрицы-функции, соответствующие элементы которых отличаются друг от друга для всех значений t меньше чем на ε, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Для случая суммируемых матриц-функций отсылаем к § 5 статьи [98]. Заметим, что точка устойчивости $\lambda = 0$ причисляется к λ-точкам сильной устойчивости уравнения (7.2), если некоторая ее окрестност состоит из таких точек.

Множество λ-точек сильной устойчивости есть открытое множество, и, таким образом, если оно не пусто, то оно распадается в конечную или бесконечную совокупность непересекающихся открытых интервалов, называемых λ-зонами устойчивости уравнения (7.2).

Матрицантом уравнения (7.2), как известно, называется матрица-функция

$$\mathrm{U}(t;\ \lambda) = \| u_{jk}(t;\ \lambda) \|_1^{2m}$$

определяемая как решение матричного уравнения

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt} = \lambda\, \mathrm{JH}(t)\, \mathrm{U} \qquad (\mathrm{U}(0;\ \lambda) = \mathrm{I}_{2m})$$

Тогда характеристичное уравнение (6.3) запишется в виде [1]

$$\det(\mathrm{U}(\omega;\ \lambda) - \rho \mathrm{I}_{2m}) = 0 \tag{7.3}$$

Теорему Ляпунова-Пуанкаре [4,5] можно сформулировать следующим образом. Если $\mathrm{H}(t)$ — действительная симметрическая периодическая матрица-функция, то корни характеристичного уравнения (7.3) расположены симметрично как относительно единичной окружности, так и относительно действительной оси.

Основываясь на теореме Ляпунова-Пуанкаре, приходим к выводу: тривиальное решение уравнения (7.2) при данном λ устойчиво в том и только в том

---

[1] М. Г. Крейн называет матрицу $\mathrm{U}(\omega;\ \lambda)$ матрицей монодромии, а корни характеристического уравнения (7.3) мультипликаторами уравнения (7.2).

случае, если при этом λ все корни характеристичного уравнения (7.3) по модулю равны единице и кратным корням отвечают линейные элементарные делители матрицы $\mathrm{U}(\omega; \lambda)$.

М. Г. Крейн выделил из класса уравнений (7.2) класс уравнений положительного типа, характеризуемый тем, что их матрицам-функциям $\mathrm{H}(t)$ отвечает неотрицательная форма $(\mathrm{H}(t)\,\xi,\ \xi)$ (ξ — постоянный вектор):

$$\sum_{j,\,k=1}^{2m} h_{jk}(t)\,\xi_j\xi_k \geqslant 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty)$$

положительная в среднем

$$\sum_{j,\,k=1}^{2m} \int_0^{\omega} h_{jk}(t)\,dt\,\xi_j\xi_k > 0 \qquad \left(\sum_{j=1}^{2m} \xi_j^2 > 0\right)$$

Мы будем говорить в дальнейшем также, что матрица $\mathrm{H}(t)$ неотрицательна и положительна в среднем.

В случае уравнения (7.2) положительного типа среди бесконечного[1] числа λ-зон устойчивости, уходящих в обе стороны λ-оси на бесконечность, существует зона, содержащая точку $\lambda = 0$, называемая центральной зоной устойчивости. М. Г. Крейн[98] доказывает следующую теорему.

Длина любой нецентральной зоны устойчивости уравнения (7.2) положительного типа не превосходит величины

$$\pi\left[\int_0^{\omega} h_{\min}(t)\,dt\right]^{-1}$$

где $h_{\min}(t)$ — наименьшее собственное значение матрицы $\mathrm{H}(t)$ в каждый момент времени. Этой же величины не превосходит и длина каждой из двух частей центральной зоны устойчивости, на которые она делится точкой $\lambda = 0$.

М. Г. Крейном[98] установлены следующие Л-критерии принадлежности λ центральной зоне устойчивости уравнения (7.2).

Критерий I_n. Обозначим через C матрицу

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_m \\ \mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix} \times \left\| \int_0^{\omega} |\,h_{jk}(t)\,|\,dt \right\|_1^{2m}$$

тогда λ принадлежит центральной зоне устойчивости уравнения (7.2) положительного типа, если

$$|\,\lambda\,| < \frac{2}{M(\mathrm{C})}$$

где $M(\mathrm{C})$ — наибольшее собственное число матрицы C (заведомо положительное).

Критерий II. Запишем матрицу $\mathrm{H}(t)$ в виде

$$\mathrm{H}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(t) & \mathrm{B}(t) \\ \mathrm{B}(t) & \mathrm{C}(t) \end{pmatrix}$$

где $\mathrm{A}(t)$, $\mathrm{B}(t)$, $\mathrm{C}(t)$ — квадратные матрицы m-го порядка, причем симметричеcким матрицам $\mathrm{A}(t)$ и $\mathrm{C}(t)$ отвечают неотрицательные квадратичные формы $(\mathrm{A}(t)\,\xi,\ \xi)$ и $(\mathrm{C}(t)\,\xi,\ \xi)$ при $0 \leqslant t < \omega$. Пусть периодические функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ в каждый момент времени совпадают с модулем наибольшего по модулю

[1] Если множество точек t, для которых матрица-функция $\mathrm{H}(t)$ не вырождается, имеет положительную меру.

собственного значения матриц A (t), B (t) и C (t) соответственно. Тогда λ принадлежит центральной зоне устойчивости уравнения (7.2), если

$$|\lambda| < 2\left\{\int_0^\omega \beta(t)\,dt + \left[\int_0^\omega \alpha(t)\,dt \int_0^\omega \gamma(t)\,dt\right]^{1/2}\right\}^{-1}$$

2. Основываясь на результатах М. Г. Крейна [64], М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидский [73] распространили Л-критерий I В. А. Якубовича (см. § 4) на систему канонического вида произвольного порядка. Рассматривается векторное дифференциальное уравнение (7.2) при $\lambda = 1$:

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{JH}(t)\,x \tag{7.4}$$

Критерий М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидского. Пусть $h_{\min}(t)$ и $h_{\max}(t)$ — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы H (t) в каждый момент времени. Если

$$n\pi < \int_0^\omega h_{\min}(t)\,dt \leqslant \int_0^\omega h_{\max}(t)\,dt < (n+1)\,\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

то тривиальное решение уравнения (7.4) устойчиво.

В статье И. М. Гельфанда и В. Б. Лидского [99] исследована структура областей устойчивости системы канонического вида порядка $2m$, соответствующей уравнению (7.4). Доказывается, что каждая область устойчивости характеризуется одним из 2^m возможных положений корней характеристичного уравнения (7.3) (при $\lambda=1$) на единичной окружности и, кроме того, некоторым целым числом k. Число k равно числу полных оборотов, которые совершает комплексный определитель $\det[\mathrm{X}_1(t) + i\mathrm{X}_2(t)]$ за время ω. Прямоугольная матрица

$$\begin{pmatrix}\mathrm{X}_1(t)\\ \mathrm{X}_2(t)\end{pmatrix}$$

порядка $2m \times m$ составлена из m линейно независимых решений рассматриваемой системы, начальные условия которых выбраны так, что

$$\mathrm{X}_1'(0)\,\mathrm{X}_2(0) - \mathrm{X}_2'(0)\,\mathrm{X}_1(0) = 0$$

где штрих означает транспонированную матрицу.

§ 8. Рассмотрим систему $2m$-го порядка с периодическими коэффициентами

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} + \mu\,[p_{k1}(t)\,y_1 + \ldots + p_{km}(t)\,y_m] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{8.1}$$

где μ — действительный параметр.

Ляпунов [5] (§ 52) доказал, что если все корни уравнения

$$\det\left\| -\mu\,\frac{p_{kj}(t) + p_{jk}(t)}{2} - \varkappa\delta_{kj}\right\|_1^m = 0$$

неотрицательны при всех t $0 \leqslant t < \omega$, то тривиальное решение системы (8.1) неустойчиво.

1. Для дальнейшего будем предполагать, что $p_{kj}(t) = p_{jk}(t)$. Запишем систему (8.1) в виде векторного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \mu\,\mathrm{P}(t)\,y = 0 \qquad \left(y = \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix},\ \mathrm{P}(t+\omega) = \mathrm{P}(t) = \|p_{jk}(t)\|_1^m\right) \tag{8.2}$$

Полагая $\lambda=\sqrt{|\mu|}$, $dy/dt=\lambda z$, уравнение (8.2) приводится к системе

$$\frac{dy}{dt}=\lambda z, \qquad \frac{dz}{dt}=\mp\lambda \mathrm{P}(t)\, y$$

(верхний знак соответствует $\mu>0$, а нижний $\mu<0$). Таким образом, уравнение (8.2) эквивалентно уравнению (7.2), в котором x есть прямая сумма векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, а

$$\mathrm{H}(t)=\begin{pmatrix}\pm\mathrm{P}(t) & 0\\ 0 & \mathrm{I}_m\end{pmatrix}$$

Уравнение (8.2) называется уравнением положительного типа, если симметрическая матрица-функция $\mathrm{P}(t)$ неотрицательна и положительна в среднем. Для уравнений (8.2) положительного типа тривиальное решение неустойчиво при $\mu\leqslant 0$, как это вытекает из приведенного выше предложения Ляпунова.

Следуя М. Г. Крейну [98], точку $\mu>0$ будем называть точкой сильной устойчивости уравнения (8.2), если соответствующая точка $\lambda=+\sqrt{\mu}$ является точкой сильной устойчивости уравнения (7.2). Множество всех точек сильной устойчивости уравнения (8.2) положительного типа распадается на открытые интервалы, расположенные на полуоси $\mu>0$, называемые зонами устойчивости уравнения (8.2). Имеет место следующая теорема[64, 73, 98].

Теорема 1. Первая зона устойчивости уравнения (8.2) положительного типа не меньше первой зоны устойчивости скалярного уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\mu p_{\max}(t)\, y=0$$

и не больше первой зоны устойчивости скалярного уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\mu p_{\min}(t)\, y=0$$

где $p_{\max}(t)$ и $p_{\min}(t)$ — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы $\mathrm{P}(t)$ в каждый момент времени.

Сочетая теорему 1 с критерием (0.2) Ляпунова, М. Г. Крейн [64, 98] получает следующие два Л-критерия устойчивости.

Критерий А. Число μ принадлежит первой зоне устойчивости уравнения (8.2) положительного типа, если

$$0<\mu<\frac{4}{\omega}\left(\int_0^{\omega} p_{\max}(t)\, dt\right)^{-1}$$

Как следствие признака I_n (§ 7) получается второй Л-критерий.

Критерий Б. Число μ принадлежит первой зоне устойчивости уравнения (8.2) с положительной в среднем матрицей $\mathrm{P}(t)$, если

$$0<\mu<\frac{4}{\omega} M^{-1}(\mathrm{Q})$$

где $M(\mathrm{Q})$ — наибольшее собственное значение матрицы

$$\mathrm{Q}=\left\|\int_0^{\omega}|p_{jk}(t)|\, dt\right\|_1^m$$

Преимущество критерия Б в том, что здесь приходится вычислять собственные значения постоянной матрицы. Критерий Б сильнее критерия А всякий раз, когда выполнено одно из следующих условий [98]:

1) все элементы матрицы $\mathrm{P}(t)$ суть неотрицательные функции t;
2) матрица $\mathrm{P}(t)$ является якобиевой, т. е.

$$p_{jk}(t) \equiv 0 \qquad \text{при } |j-k|>1$$

3) число m равно двум.

Критерий Б может быть усилен, если его применять не к уравнению (8.2), а к уравнению, получаемому из него по следующему способу. Симметрическую матрицу-функцию $\mathrm{P}(t)$ можно бесконечным числом способов представить в виде

$$\mathrm{P}(t) = \mathrm{P}^{+}(t) - \mathrm{P}^{-}(t)$$

где $\mathrm{P}^{+}(t)$ и $\mathrm{P}^{-}(t)$ — неотрицательные матрицы. Тогда, если $\mathrm{P}(t)$ положительна в среднем, то первая зона устойчивости уравнения (8.2) не меньше первой зоны устойчивости уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\,\mathrm{P}^{+}(t)\,y = 0$$

В силу теоремы 1 М. Г. Крейн [98] устанавливает из этого предложения, что если $\mathrm{P}(t)$ положительна в среднем, то первая зона устойчивости уравнения (8.2) не меньше первой зоны устойчивости скалярного уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu p_{\text{м}}^{+}(t)\,y = 0$$

где

$$p_{\text{м}}^{+}(t) = \frac{1}{2}\left[p_{\max}(t) + |p_{\max}(t)|\right]$$

2. М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидский [73] доказали следующий Л-критерий сильной устойчивости уравнения (8.2) при $\mu = 1$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{P}(t)\,y = 0 \tag{8.3}$$

Пусть

$$a^2 \underset{\not\equiv}{\leqslant} p_{\min}(t) \leqslant p_{\max}(t) \underset{\not\equiv}{\leqslant} b^2 \tag{8.4}$$

где a, b — постоянные и $n\pi/\omega \leqslant a \leqslant (n+1)\pi/\omega$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Уравнение (8.3) сильно устойчиво, если

$$\int_0^{\omega} [p_{\max}(t) - a^2]\,dt < 2(n+1)(b^2 - a^2)\,\nu_0$$

где ν_0 — наименьший положительный корень уравнения

$$a \operatorname{ctg}\left[\frac{a\omega}{2(n+1)} - a\nu\right] = b \operatorname{tg} b\nu$$

В частности, при $a = n\pi/\omega$, $b = (n+1)\pi/\omega$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ уравнение (8.3) сильно устойчиво, если матрица $\mathrm{P}(t)$ удовлетворяет условию (8.4), что представляет распространение критерия (0.3) Жуковского на векторное уравнение (8.3).

Второй частный вид критерия М. Г. Нейгауз — В. Б. Лидского получается, если $b = \infty$ и матрица $\mathrm{P}(t)$ удовлетворяет условию (8.4). Уравнение (8.3) сильно устойчиво, если

$$\int_0^{\omega} [p_{\max}(t) - a^2]\,dt < 2a(n+1)\operatorname{ctg}\frac{a\omega}{2(n+1)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

В заметке [73] М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидский установили также следующее предложение. Пусть симметрическая периодическая матрица-функция $\mathrm{P}(t) =$

$= \mathrm{P}_0(t) + \widetilde{\mathrm{P}}(t)$, где $\mathrm{P}_0(t)$ — диагональная матрица с элементами $p_{jj}^{(0)}(t)$ ($j=1, \ldots, m$), а $\widetilde{\mathrm{P}}(t)$ — неотрицательно определенная матрица и $\widetilde{p}(t)$ — наибольшее собственное значение матрицы $\widetilde{\mathrm{P}}(t)$ в каждый момент времени. Допустим, что функции $p_{jj}^{(0)}(t)$ ($j=1, \ldots, m$) принадлежат зонам устойчивости одной четности уравнения (0.1) (см. § 2). Тогда, если функции $p_{jj}^{(0)}(t) + \widetilde{p}(t)$ принадлежат тем же зонам устойчивости, что и $p_{jj}^{(0)}(t)$ ($j=1, \ldots, m$), то уравнение (8.3) сильно устойчиво. Это предложение содержит в себе теорему 1.

В заключение отметим, что в статье И. М. Рапопорта [71] получены асимптотические формулы, определяющие границы зон устойчивости и неустойчивости уравнения (8.2) и эффективные в области больших значений параметра μ, в предположении, что $\mathrm{P}(t)$ — симметрическая периодическая матрица-функция с положительными и различными собственными значениями. К результатам И. М. Рапопорта примыкают недавние исследования В. Хааке [83].

Поступила 18 III 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Floquet G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Ann. de l'École Normale, 2-e série, t. 12, 1883, pp. 47—88.
2. Hill G. W. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. Acta Math., t. VIII, 1886, pp. 1—36.
3. Ляпунов А. М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. II, № 1—2, 1889, стр. 1—94.
4. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta Math., t. XIII, 1890, pp. 5—270.
5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892, 250 стр.
6. Жуковский Н. Е. Условия конечности интегралов уравнения $d^2y/dx^2 + py = 0$. Матем. сборн., т. XVI, вып. 3, 1892, стр. 582—591. Собр. соч., т. I, 1948, стр. 246—253.
7. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris, t. I, 1892, 385 p.; t. II, 1893, 472 p.; t. III, 1899, 414 p.
8. Ляпунов А. М. Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. V, № 3 и 4, 5 и 6, 1896—1897, стр. 190—254.
9. Ляпунов А. М. Sur un série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. C. R., t. CXXIII, № 26, 1896, pp. 1248—1252.
10. Ляпунов А. М. Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. C. R., t. CXXVIII, № 15, 1899, pp. 910—913.
11. Ляпунов А. М. Sur une équation transcendante et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. C. R., t. CXXVIII, № 18, 1899, pp. 1085—1088.
12. Ляпунов А. М. Sur une série relative à la théorie d'une équation différentielle linéaire du second ordre. C. R., t. CXXXI, № 26, 1900, pp. 1185—1188.
13. Ляпунов А. М. Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. Зап. Акад. Наук по физ.-матем. отд., 8-я серия, т. XIII, № 2, 1902, стр. 1—70.
14. Levi-Civita T. Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire. Ann. de l'École Normale, 2-e série, t. 28, 1911, pp. 325—376.
15. Hamel G. Über die lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Math. Ann., Bd. 73, H. 3, 1913, S. 371—412.
16. Haupt O. Über lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Math. Ann., Bd. 79, 1919, S. 278—285.

17. Андронов А. А. и Леонтович М. А. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами. Журнал Русского физ.-хим. общ., серия физ., т. LIX, вып. 5—6, 1927, стр. 429—442.
18. Strutt M. J. O. Der charakteristische Exponent der Hillschen Differentialgleichung. Math. Ann., Bd. 101, 1929, S. 559—569.
19. Marković Ž. Sur les solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient périodique. Proc. London Math. Soc., ser. 2, vol. 31, 1930, pp. 417—438.
20. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. II, ГТТИ, 1934, 444 стр.
21. Адамов Н. В. Sur quelques propriétés des intégrales d'une équation du second ordre à coefficients périodiques. C. R., t. CXCVII, № 22, 1933, pp. 1280—1282.
22. Кочин Н. Е. О крутильных колебаниях коленчатых валов. ПММ, старая серия, т. II, вып. 1, 1934, стр. 3—28. Собр. соч., т. II, 1949, стр. 507—535.
23. Горелик Г. С. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами. ЖТФ, т. IV, вып. 10, 1934, стр. 1783—1817; т. V, вып. 2, 1935, стр. 195—215.
24. Стретт М. Д. О. Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. ОНТИ, 1935, 237 стр.
25. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических нормальных сил, приложенных к одному из концов стержня. Сборник статей «Исследование колебаний конструкций». ОНТИ, 1935, стр. 25—42.
26. Kramers H. A. Das Eigenwertproblem im eindimensionalen periodischen Kraftfelde. Physica, vol. 2, 1935, S. 483—490.
27. Адамов Н. В. Геометрический смысл условия устойчивости Ляпунова. ДАН СССР, т. II, № 5—6, 1935, стр. 361—364.
28. Адамов Н. В. Некоторые достаточные условия устойчивости. ДАН СССР, т. II, № 7, 1935, стр. 447—450.
29. Адамов Н. В. Sur l'oscillation des intégrales de l'équation du deuxième ordre aux coefficients périodiques et sur quelques conditions de la stabilité. Матем. сборн., т. XLII, вып. 6, 1935, стр. 651—668.
30. Бондаренко Г. В. Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. Изд. АН СССР, 1936, 50 стр.
31. Einaudi R. Sulle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema dissipativo. Atti Veneto, t. XCV, part II, 1936, pp. 425—444.
32. Ельшин М. И. К проблеме колебаний линейного дифференциального уравнения второго порядка. ДАН СССР, т. XVIII, № 3, 1938, стр. 141—145.
33. Левин Б. Я. Про оцінку роста інтеграла рівняння Штурма-Ліувілля. Труди Одеського державного університету. Математика, т. II, 1938, стр. 39—43.
34. Cesari L. Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. Atti Accad. Italia, Mem. Cl. Sci. Fis., Mat., Nat. (6), t. 11, 1940, pp. 633—695.
35. Адамов Н. В. Некоторые свойства преобразований, не меняющих интегральную кривую уравнения первого порядка. ДАН СССР, т. XXIX, № 8—9, 1940, стр. 539—543.
36. Ельшин М. И. Об одном методе вычисления фазы линейного уравнения второго порядка. Учен. зап. МГУ, вып. 45, матем., 1940, стр. 97—107.
37. Артемьев Н. А. Основы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, ч. I. Изд. ЛГУ, 1941, 159 стр.
38. Borg G. Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen. Arch. för mat., astr. och fysik, Bd. 31A, H. 1, 1944, S. 1—30.
39. Нугманова Ш. Об устойчивости периодических движений. ДАН СССР, т. XLII, № 5, 1944, стр. 206—208.

40. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946, 204 стр.
41. Еругин Н. П. Приводимые системы. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, т. XIII, 1946, стр. 1—95.
42. Schwerdtfeger H. The Eigen-Value problem of Hills equation. Journ. and Proc. of the Royal Soc. of New South Wales, vol. LXXIX, part IV, 1945, pp. 176—189.
43. Проскуряков А. П. Характеристические числа решений дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. ПММ, т. X, вып. 5—6, 1946, стр. 545—558.
44. Ельшин М. И. К условиям, при которых решение линейной системы второго порядка имеет два нуля. ДАН СССР, т. LI, № 8, 1946, стр. 573—576.
45. Леонов М. Я. О квазигармонических колебаниях. ПММ, т. X, вып. 5—6, 1946, стр. 575—580.
46. Адамов Н. В. О некоторых преобразованиях, не меняющих интегральных кривых дифференциального уравнения первого порядка. Матем. сборн., новая серия, т. 23 (65), вып. 2, 1948, стр. 187—228.
47. Wallach S. The stability of differential equations with periodic coefficients. Proc. of the Natl Acad. of Sci., USA, vol. 34, № 5, 1948, pp. 203—204.
48. Еругин Н. П. Обобщение одной теоремы Ляпунова. ПММ, т. XII. вып. 5, 1948, стр. 633—638.
49. Смирнов В. И. Обзор научного творчества А. М. Ляпунова. ПММ, т. XII, вып. 5, 1948, стр. 479—560.
50. Леонов М. Я. До теорії квазигармонічних коливань. Доповіді Акад. Наук УРСР, № 3, 1948, стр. 51—57.
51. Юровский А. В. О некоторых критериях устойчивости интегралов системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXII, № 5, 1948, стр. 595—598.
52. Леонов М. Я. Некоторые признаки динамической устойчивости. ПММ, т. XII, вып. 6, 1948, стр. 737—748.
53. Леонов М. Я. Параметрическое представление квазигармонических колебаний. ДАН СССР, т. LXII, № 2, 1948, стр. 161—162.
54. Персидский К. П. Об одной оценке характеристичных чисел. Изв. Акад. Наук Казахск. ССР, № 56, серия матем. и мех., вып. 2, 1948, стр. 36—45.
55. Немыцкий В. В. и Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд 2-е, ГИТТЛ, 1949, 550 стр.
56. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, 1949, 243 стр.
57. Borg G. On a Liapounoff criterion of stability. Amer. Journ. of Math., vol. LXXI, № 1, 1949, pp. 67—70.
58. Гинзбург И. П. О достаточных условиях устойчивости решений уравнения $y''+py'+qy=0$. Учен. зап. ЛГУ, механика, № 114, вып. 17, 1949, стр. 200—204.
59. Леонов М. Я. Устойчивость квазигармонических колебаний. ДАН СССР, т. LXIV, № 5, 1949, стр. 645—648.
60. Гусарова Р. С. О критериях ограниченности решений линейных уравнений второго порядка. УМН, т. IV, вып. 3, 1949, стр. 132—133.
61. Гусарова Р. С. Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XIII, вып. 3, 1949, стр. 241—246.
62. Гусарова Р. С. Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950, стр. 313—314.
63. Коваленко К. Р. Основные положения теории зон устойчивости А. М. Ляпунова и их применение к некоторым вопросам динамической устойчивости

стержней. Автореферат кандидатской диссертации. Одесский институт инж. мор. флота, 1950, стр. 1—7.
64. Крейн М. Г. Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXXIII, № 3, 1950, стр. 445—448.
65. Якубович В. А. Об ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$, $p(t+\omega) = p(t)$. ДАН СССР, т. LXXIV, № 5, 1950, стр. 901—903.
66. Коваленко К. Р. и Крейн М. Г. О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXXV, № 4, 1950, стр. 495—498.
67. Макаров С. М. Исследование характеристического уравнения линейной системы двух уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951, стр. 373—378.
68. Айзерман М. А. Достаточное условие устойчивости одного класса динамических систем с переменными параметрами. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951, стр. 382—384.
69. Рапопорт И. М. О линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXXVI, № 6, 1951, стр. 793—796.
70. Якубович В. А. Критерий устойчивости решений системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. УМН, т. VI, вып. 1, 1951, стр. 166—168.
71. Рапопорт И. М. К вопросу об устойчивости колебаний материальной системы. ДАН СССР, т. LXXVII, № 1, 1951, стр. 25—28.
72. Крейн М. Г. О применении одного алгебраического предложения в теории матриц монодромии. УМН, т. VI, вып. 1, 1951, стр. 171—177.
73. Нейгауз М. Г. и Лидский В. Б. Об ограниченности решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXXVII, № 2, 1951, стр. 189—192.
74. Крейн М. Г. О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951, стр. 323—348.
75. Гольдин А. М. Об одном критерии Ляпунова. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951, стр. 379—381.
76. Якубович В. А. Критерии устойчивости для системы двух уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXXVIII, № 2, 1951, стр. 221—224.
77. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952, 432 стр.
78. Дубошин Г. Н. Основы теории устойчивости движения. Изд. МГУ, 1952, 317 стр.
79. Макаров С. М. Исследование характеристического уравнения линейной системы из двух уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами. Труды Куйбыш. авиац. инст., вып. 1, 1952, стр. 24—29.
80. Демидович Б. П. О некоторых свойствах характеристических показателей системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Учен. зап. МГУ, вып. 163, матем., т. VI, 1952, стр. 123—132.
81. Шиманов С. Н. К теории квазигармонических колебаний. ПММ, т. XVI, вып. 2, 1952, стр. 129—146.
82. Старжинский В. М. Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952, стр. 369—374.
83. Haacke W. Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Math. Ztschr., Bd. 56, H. 1, 1952, S. 65—79.

84. Старжинский В. М. Об устойчивости неустановившихся движений в одном случае. ПММ, т. XVI, вып. 4, 1952, стр. 500—504.
85. Бейлин Е. А. и Джанелидзе Г. Ю. Обзор работ по динамической устойчивости упругих систем. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952, стр. 635—648.
86. Немыцкий В. В. Проблемы качественной теории дифференциальных уравнений. Вестник МГУ, № 8, серия физ.-мат. и естеств. наук, № 5, 1952, стр. 19—39.
87. Якубович В. А. Оценка характеристических показателей и критерии устойчивости для линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXXXVII, № 3, 1952, стр. 345—348.
88. Шварцман А. П. К вопросу об ограниченности решений дифференциального уравнения $y'' + p(x)y = 0$. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954, стр. 464—468.
89. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. Изд-во иностр. лит., 1953, 474 стр.
90. Старжинский В. М. Об устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953, стр. 117—122.
91. Леонов М. Я. Приближенный метод исследования квазигармонических колебаний. Научные записки института машиноведения и автоматики АН УССР, т. II, вып. 1, 1953, стр. 5—8.
92. Старжинский В. М. Об устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Инж. сборник, т. XVIII, 1954, стр. 119—138.
93. Schäfke F. W. Einige Stabilitätskriterien. Ztschr. angew. Math. und Mech., Bd. 33, № 8/9, 1953, S. 283—285.
94. Бурдина В. И. Критерий ограниченности решений системы дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. XC, № 3, 1953, стр. 329—332.
95. Pipes L. A. Matrix solution of equations of the Mathieu-Hill type. Journ. Appl. Phys. (N. Y.), vol. 24, № 7, 1953, pp. 902—910.
96. Бурдина В. И. Об ограниченности решений системы дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. XCIII, № 4, 1953, стр. 603—606.
97. Якубович В. А. Вопросы устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Кандидатская диссертация. ЛГУ, 1953, 215 стр. Автореферат, стр. 1—13.
98. Крейн М. Г. Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сборник памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР (находится в печати).
99. Гельфанд И. М. и Лидский В. Б. О структуре областей устойчивости канонических линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. УМН (находится в печати).
100. Якубович В. А. Оценки характеристических показателей системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XVIII, вып. 5.
101. Якубович В. А. Распространение метода А. М. Ляпунова определения ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$, $p(t + \omega) = p(t)$ на случай знакопеременной функции $p(t)$. ПММ (находится в печати).