Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ВОПРОСУ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' + p(x)y = 0$

А. П. Шварцман

(Одесса)

§ 1. В ПММ опубликовано в последнее время несколько работ, посвященных обобщениям и уточнениям известных признаков Ляпунова [1] и Жуковского [2] об ограниченности решений уравнения

$$y'' + p(x)y = 0 \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1.1}$$

где $p(x)$ — ограниченная неотрицательная периодическая функция с периодом ω.

Для того чтобы различать область применения признаков Ляпунова и Жуковского, удобно рассматривать $p(x)$ как плотность распределения массы по оси x.

Если обозначить

$$H = \sup p(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant \omega)$$

то признак Жуковского [2] при $n = 0$ имеет вид:

$$H\omega^2 \leqslant \pi^2 \tag{1.2}$$

Следовательно, ограниченность решений уравнения (1.1) во всяком случае имеет место при сравнительно небольших «пиках» H плотности $p(x)$. Разумеется, ограничение, налагаемое на «пики» плотности, приводит к ограничению массы M, приходящейся на интервал длины ω, так как $M \leqslant H\omega$.

При значительных «пиках» плотности $p(x)$, а именно, когда $H\omega^2 > \pi^2$ (признак Жуковского не выполняется), ограниченность всех решений уравнения (1.1) все же может иметь место, если масса M не очень велика. Признак Ляпунова [1]

$$\omega M \leqslant 4 \qquad \left(M = \int_0^\omega p(x)\,dx\right) \tag{1.3}$$

указывает верхнюю границу для массы M, при которой все еще обеспечена ограниченность всех решений уравнения (1.1). Более того, эта классическая оценка Ляпунова является, как известно, точной в следующем смысле: для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такая неотрицательная периодическая (с периодом ω) и суммируемая от нуля до ω функция $p(x)$, для которой $\omega M < 4 + \varepsilon$ и для которой вместе с тем решения уравнения (1.1) являются неограниченными.

Если рассматривать уравнение (1.1) при дополнительных ограничениях, налагаемых на функцию $p(x)$, то, конечно, возможны некоторые «расширения» признака Ляпунова. Например, в заметке А. М. Гольдина [5] показано, что все решения уравнения (1.1) будут ограниченными, если

$$\omega M \leqslant 4 + \frac{4}{H\omega^2} \tag{1.4}$$

Это неравенство (1.4) дает верхнюю границу для массы M, при которой обеспечена ограниченность всех решений уравнения (1.1), рассматриваемого, однако, уже для функций $p(x)$, у которых «пики» не превосходят числа H. Таким образом, множество функций $p(x)$, для которых (1.4) дает признак ограниченности всех решений уравнения (1.1), является частью того множества функций $p(x)$, для которых признак Ляпунова представляет точную оценку.

Но для этого более узкого множества функций $p(x)$, т. е. для неотрицательных периодических (с периодом ω) функций $p(x)$, и таких, что $p(x) \leqslant H$ (где H фиксировано), неравенство (1.4) не дает для массы M точной оценки в указанном выше смысле. Такая точная оценка содержится в результатах М. Г. Крейна [4].

§ 2. Из результатов М. Г. Крейна [4] (теорема 7) вытекает, что для ограниченности всех решений уравнения (1.1), где $p(x)$ есть любая неотрицательная периодическая (с периодом ω) функция, «пики» которой не превосходят H, достаточно, чтобы имело место неравенство

$$1 < \frac{4H}{M^2} \chi \left(\frac{M}{H\omega}\right) \tag{2.1}$$

где функция $\chi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ определяется как наименьший положительный корень уравнения [1]

$$\sqrt{\chi} \operatorname{tg} \sqrt{\chi} = \frac{t}{1-t}$$

Допустим, что неравенство (2.1) решено относительно M, так что из него получено

$$M < F(H, \omega)$$

т. е. получена некоторая оценка сверху для массы M, при которой все решения уравнения (1.1) ограничены.

Из рассуждений, приведенных в статье М. Г. Крейна [4] (см. теоремы 1 и 7), вытекает, что содержащаяся в признаке (2.1) неявная оценка сверху для массы M является точной оценкой в таком же смысле, как это было указано выше для признака Ляпунова: для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такая неотрицательная периодическая (с периодом ω) функция $p(x)$, ограниченная сверху числом H $(p(x) \leqslant H)$, для которой $M < F(H, \omega) + \varepsilon$ и для которой вместе с тем уравнение (1.1) имеет неограниченные решения.

Для удобства пользования признаком (2.1) приводим таблицу значений [2] функции $\chi(t)$.

Таблица значений функций $\chi(t)$[2]

t	χ	t	χ	t	χ	t	χ
0	0	0.26	0.314	0.50	0.739	0.76	1.458
0.02	0.020	0.28	0.343	0.52	0.784	0.78	1.528
0.04	0.041	0.30	0.374	0.54	0.830	0.80	1.599
0.06	0.062	0.32	0.405	0.56	0.878	0.82	1.674
0.08	0.084	0.34	0.438	0.58	0.926	0.84	1.752
0.10	0.107	0.36	0.472	0.60	0.977	0.86	1.832
0.12	0.130	0.38	0.506	0.62	1.029	0.88	1.916
0.14	0.154	0.40	0.542	0.64	1.083	0.90	2.002
0.16	0.179	0.42	0.579	0.66	1.140	0.92	2.090
0.18	0.203	0.44	0.617	0.68	1.199	0.94	2.179
0.20	0.231	0.46	0.656	0.70	1.260	0.96	2.274
0.22	0.257	0.48	0.697	0.72	1.322	0.98	2.370
0.24	0.285			0.74	1.388	1.00	2.467

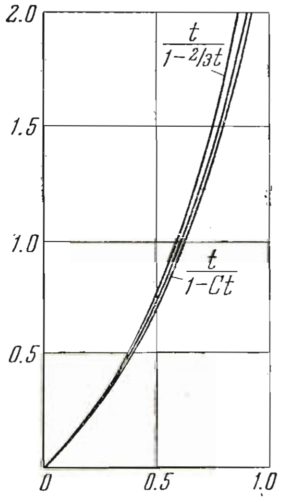
[1] В работе М. Г. Крейна [4] функция $p(x)$ предполагается неотрицательной только в среднем.

[2] В табулировании функции $\chi(t)$ принимал участие Б. Д. Литовчин.

Рассмотрим неравенства (1.19) работы [4]

$$\chi^- = \frac{t}{1 - ct} \leqslant \chi(t) \leqslant \chi^+ = \frac{t}{1 - {}^2/_3\, t} \qquad \left(c = 1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$$

Как видно из графика (фиг. 1), функция $\chi(t)$, представленная на чертеже средней кривой, достаточно тесно «зажата» между функциями χ^- и χ^+. Поэтому, если в неравенстве (2.1) заменим $\chi(t)$ на χ^-, то получим, повидимому, достаточно близкий к точному признак ограниченности решений уравнения (1.1) для всего множества указанных выше функций $p(x)$.



Фиг. 1

Неравенство (2.1) при замене $\chi(t)$ на χ^- переходит в неравенство

$$1 \leqslant \frac{4}{M\omega\left(1 - c\dfrac{M}{H\omega}\right)}$$

или

$$f(M) \equiv \frac{c}{H} M^2 - \omega M + 4 \geqslant 0 \qquad (2.2)$$

Полученное неравенство (2.2) представляет ослабление точного признака М. Г. Крейна, но достаточно к нему близкое.

Это неравенство для множества всех неотрицательных ограниченных периодических (с периодом ω) функций, т. е. для $H = \infty$, переходит в неравенство (1.3).

Неравенство (2.2) безусловно удовлетворяется, когда $f(M)$ имеет комплексные или равные действительные корни, т. е. когда

$$\omega^2 - \frac{16c}{H} \leqslant 0 \quad \text{или} \quad H\omega^2 \leqslant 16c \approx 9.51$$

Этот результат близок к неравенству (1.2).

Предположим теперь, что $H\omega^2 > 16c$ (имеются значительные «пики» плотности $p(x)$). Тогда корни $f(M)$

$$M_{1,2} = \frac{H\omega}{2c}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{16c}{H\omega^2}}\right)$$

будут действительными и неравными.

Для того чтобы теперь выполнялся признак (2.2), достаточно, чтобы было либо $M \geqslant M_1$, либо $M \leqslant M_2$.

а) Если $M \geqslant M_1$, то, принимая во внимание, что $H\omega \geqslant M$, имеем также

$$H\omega \geqslant \frac{H\omega}{2c}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{16c}{H\omega^2}}\right) \qquad \left(c = 1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$$

Отсюда

$$H\omega^2 \leqslant \frac{16c}{1 - (2c - 1)^2} = \pi^2$$

Таким образом, при условии $M \geqslant M_1$ признак (1.2) также выполняется.

б) Если же $M \leqslant M_2$, т. е.

$$M \leqslant \frac{H\omega}{2c}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16c}{H\omega^2}}\right)$$

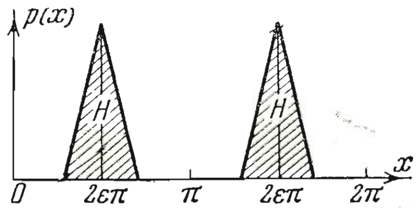
то, разлагая радикал в ряд, получаем

$$M \leqslant \frac{H\omega}{2c}\left\{1-\left(1-\frac{8c}{H\omega^2}-\frac{32c^2}{H^2\omega^4}-\dots\right)\right\}$$

и, удерживая три члена этого ряда:

$$M \leqslant \frac{4}{\omega}+\frac{16c}{H\omega^3} \quad \text{или} \quad \omega M \leqslant 4+\frac{16c}{H\omega^2}$$

Полученная оценка поглощает результат (1.4), так как $16c \gg 4$; одновременно выяснилось, что этот результат далек от точного (в указанном выше смысле).



Фиг. 2

§ 3. Рассмотрим примеры. а) Пусть в уравнении $y'' + p(x)\, y = 0$ функция $p(x)$ имеет вид, представленный на фиг. 2, где

$$\omega = \pi, \quad p_{\max} = H, \quad M = \int_0^\pi p(x)\,dx = \varepsilon\pi H, \quad \frac{M}{H\omega} = \varepsilon \quad \left(0 < \varepsilon \leqslant \tfrac{1}{2}\right)$$

Рассмотренные выше признаки ограниченности всех решений уравнения (1.1) дают здесь такие границы для «пиков»:

$$\begin{array}{cccc} (1.2) & (1.3) & (2.2) & (2.1) \\ H \leqslant 1, & H \leqslant \dfrac{4}{\varepsilon\pi^2}, & H \leqslant \dfrac{4}{\varepsilon\pi^2}\dfrac{1}{1-\varepsilon c}, & H \leqslant \dfrac{4}{\varepsilon\pi^2}\dfrac{\chi(\varepsilon)}{\varepsilon} \end{array}$$

Непосредственно видим, что (2.2) дает больше, чем (1.3). Легко также обнаружить, что (2.2) дает больше, чем (1.2). Сравнивая же результаты, полученные по (1.3) и по (1.2), видим, что (1.3) дает больше, чем (1.2), только тогда, когда $\varepsilon < 4/\pi^2$; когда же $4/\pi^2 < \varepsilon \leqslant 1/2$, то (1.2) даст больше, чем (1.3).

По самой сути дела (2.1) дает всегда больше, чем остальные признаки.

б) Рассмотрим уравнение[1]

$$y'' + \lambda^2 \sin^{2n} x y = 0$$

Здесь

$$\omega = \pi, \qquad H = \lambda^2, \qquad M = \lambda^2 \int_0^\pi \sin^{2n} x\,dx = \lambda^2 \pi s_n$$

$$\frac{M}{H\omega} = s_n, \qquad s_n = \frac{1.\,3.\,5 \dots (2n-1)}{2.\,4.\,6 \dots 2n}$$

Для ограниченности всех решений этого уравнения мы получаем следующие границы для λ^2:

$$\begin{array}{cccc} (1.2) & (1.3) & (2.2) & (2.1) \\ \lambda^2 \leqslant 1, & \lambda^2 \leqslant \dfrac{4}{\pi^2 s_n}, & \lambda^2 \leqslant \dfrac{4}{\pi^2 s_n}\dfrac{1}{1-cs_n}, & \lambda^2 \leqslant \dfrac{4}{\pi^2 s_n}\dfrac{\chi(s_n)}{s_n} \end{array}$$

Так как $0 < s_n \leqslant 1/2$ $(n = 1, 2, \dots)$, то сравнение результата по (2.2) с результатом по (1.2) и по (1.3) здесь приводит к тем же выводам, что и в предыдущем примере. Граница по (1.3) больше, чем граница по (1.2), только когда $n \geqslant 2$.

в) Рассмотрим уравнение

$$y'' + \lambda^2 (1 - \varepsilon \sin x)\, y = 0 \qquad (0 < \varepsilon \leqslant 1)$$

[1] Этот пример, как и следующий, взяты из работы Ляпунова [2].

Здесь

$$\omega = 2\pi, \quad H = \lambda^2 (1 + \varepsilon), \quad M = \lambda^2 \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \sin x)\, dx = 2\pi\lambda^2, \quad \frac{M}{H\omega} = \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

Для ограниченности всех решений этого уравнения получаем такие границы для λ^2

$$\overset{(1.2)}{\lambda^2 \leqslant \frac{1}{4(1+\varepsilon)}}, \quad \overset{(1.3)}{\lambda^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2}}, \quad \overset{(2.2)}{\lambda^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2} \frac{1+\varepsilon}{4\pi^{-2} + \varepsilon}}, \quad \overset{(2.1)}{\lambda^2 \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\pi^2} \chi\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)}$$

Граница по (2.2) при любом ε больше, чем по (1.3), но не при любом ε она больше, чем по (1.2). Только при $\dfrac{\pi^2 - 8}{4} < \varepsilon \leqslant 1$ граница по (2.2) больше, чем по (1.2). Когда же

$$0 < \varepsilon < \frac{\pi^2 - 8}{4} \approx 0.465$$

то граница по (1.2) больше, чем по (2.2). Далее, граница по (1.2) при любом ε больше, чем по (1.3). Но граница (2.1), конечно, всегда наилучшая, хотя при малых ε она не намного больше, чем по (1.2).

Поступила 17 III 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950, стр. 276—283.
2. Ляпунов А. М. Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Сообщ. Харьковского математ. о-ва, вторая серия, т. V, № 5—6, стр. 190—254, 1896—1897.
3. Жуковский Н. Е. Условия конечности интегралов уравнения $d^2y / dx^2 + py = 0$. Собр. соч., т. I, стр. 246—253, Гостехиздат, 1948.
4. Крейн М. Г. О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости. ПММ, т. XV, вып. 3, стр. 323—348, 1951.
5. Гольдин А. М. Об одном критерии Ляпунова. ПММ, т. XV, вып. 3, стр. 379—381, 1951.