Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О РЕЗОНАНСЕ В КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

И. Г. Малкин

(Свердловск)

В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия существования почти периодических решений систем линейных неоднородных уравнений с периодическими коэффициентами и с почти периодическими правыми частями.

Рассмотрим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + f_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где p_{sj} — непрерывные периодические функции t с периодом ω, а f_s — почти периодические функции t. В зависимости от спектра частот функций f_s и корней характеристического уравнения однородной системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n \tag{2}$$

для системы (1) могут представиться два случая. В одном случае для системы (1) существует почти периодическое решение при любом выборе функций f_s, имеющих заданный спектр частот. Этот случай будем называть нерезонансным. В другом случае система (1) не имеет почти периодических решений, но имеет решения в виде полиномов относительно t с почти периодическими коэффициентами. Второй случай мы будем называть резонансным. В резонансном случае система (1) также может иметь почти периодические решения, но для этого необходимо, чтобы функции f_s удовлетворяли некоторым дополнительным условиям. Мы ставим себе задачей выяснить, при каких условиях имеет место резонансный, или нерезонансный случай, и при каких условиях в резонансном случае система (1) все же допускает почти периодические решения. Другими словами, мы ставим себе целью установить необходимые и достаточные условия существования почти периодических решений для системы (1). Этой задачей занимались многие авторы. Однако во всех известных нам работах задача решается при весьма частных предположениях. В настоящей работе мы даем решение задачи в общем виде.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (2). Мы будем предполагать, что это уравнение может иметь как простые, так и кратные корни, что каждому кратному корню может отвечать как одна, так и несколько групп решений. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ все корни характеристического уравнения, имеющие модуль, равный единице, а через $\mu_1, \ldots, \mu_m$—все корни, имеющие модуль, отличный от единицы. При этом каждый кратный корень мы выписываем столько раз, сколько групп решений ему соответствует. Поэтому $k + m \leqslant n$ и среди величин λ_i, μ_α могут быть и равные, но каждой из них отвечает только одна группа решений. При этих условиях система (2) имеет k и только k квазипериодических решений $\varphi_{s1}(t), \ldots, \varphi_{sk}(t)$. При этом каждая из функций φ_{sj}

равна произведению периодической функции периода ω, разлагающейся в равномерно сходящийся ряд Фурье, и периодической функции $e^{\alpha_j t}$, где $\alpha_j = \omega^{-1} \ln \lambda_j$.

Наряду с системой (2) рассмотрим систему

$$\frac{dy_s}{dt} + p_{1s}y_1 + \cdots + p_{ns}y_n = 0 \tag{3}$$

с ней сопряженную. Согласно теореме Ляпунова характеристическое уравнение системы (3) имеет корни $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_k, 1/\mu_1, \ldots 1/\mu_m$, причем соответствующим корням в системах (3) и (2) отвечают одинаковое число решений этих систем. Отсюда, в частности, вытекает, что система (3) имеет k и только k квазипериодических решений, которые мы обозначим через $\psi_{s1}(t), \ldots, \psi_{sk}(t)$.

Допустим сначала, что функции $f_s(t)$ являются конечными тригонометрическими суммами, и докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если в уравнениях (1) функции f_s являются конечными тригонометрическими суммами, то, для того чтобы эти уравнения допускали почти периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись k следующих условий:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{s=1}^n \psi_{si} f_s\, dt = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через p_i и q_α число решений, отвечающих в (2) и (3) корням λ_i и μ_α, так что $p_1 + \cdots + p_k + q_1 + \cdots + q_m = n$. Тогда система (3) будет иметь n частных решений вида

$$\begin{gathered}
y_{s1}^{(i)} = \psi_{si} \\
y_{s2}^{(i)} = t\psi_{si} + \psi_{si}^{(2)} \qquad (i = 1, \ldots, k;\ s = 1, \ldots, n) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{sp_i}^{(i)} = \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!}\psi_s + \frac{t^{p_i-2}}{(p_i-2)!}\psi_{si}^{(2)} + \cdots + \psi_{si}^{(p_i)} \\
y_{s1}^{(k+\alpha)} = e^{-\omega_\alpha t} F_{s\alpha} \\
y_{s2}^{(k+\alpha)} = e^{-\omega_\alpha t}(tF_{s\alpha} + F_{s\alpha}^{(2)}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m;\ s = 1, \ldots, n) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{sq_\alpha}^{(k+\alpha)} = e^{-\omega_\alpha t}\left(\frac{t^{q_\alpha-1}}{(q_\alpha-1)!}F_s + \frac{t^{q_\alpha-2}}{(q_\alpha-2)!}F_{s\alpha}^{(2)} + \cdots + F_{s\alpha}^{(q_\alpha)}\right)
\end{gathered} \tag{5}$$

где $\omega_\alpha = \frac{1}{\omega}\ln \mu_\alpha$ — характеристический показатель, $\psi_{si}^{(j)}$ — квазипериодические, а $F_{s\alpha}^{(j)}$ — просто периодические функции времени периода ω. Введем теперь в уравнения (1) вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ переменные $u_1^{(i)}, \ldots, u_{p_i}^{(i)}$, $v_1^{(\alpha)}, \ldots, v_{q_\alpha}^{(\alpha)}$ при помощи подстановки

$$\begin{gathered}
u_1^{(i)} = \sum_{s=1}^n \psi_{si}x_s, \qquad u_\beta^{(} = \sum_{s=1}^n \psi_{si}^{(\beta)}x_s \\
v_1^{(\alpha)} = \sum_{s=1}^n F_{s\alpha}x_s, \qquad v_\gamma^{(\alpha)} = \sum_{s=1}^n F_{s\alpha}^{(\gamma)}x_s \\
(i = 1, \ldots, k;\ \alpha = 1, \ldots, m;\ \beta = 2, \ldots, p_i;\ \gamma = 2, \ldots, q_\alpha)
\end{gathered} \tag{6}$$

Тогда, учитывая, что выражения

$$u_1^{(i)},\quad tu_1^{(i)}+u_2^{(i)},\ \ldots,\ \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!}u_1^{(i)}+\cdots+u_{p_i}^{(i)}$$

и

$$e^{-\omega_\alpha t}v_1^{(\alpha)},\ e^{-\omega_\alpha t}(tv_1^{(\alpha)}+v_2^{(\alpha)}),\ \ldots,\ e^{-\omega_\alpha t}\left(\frac{t^{q_\alpha-1}}{(q_\alpha-1)!}v_1^{(\alpha)}+\cdots+v_{q_\alpha}^{(\alpha)}\right)$$

являются первыми интегралами уравнений (2), получим

$$\frac{du_1^{(i)}}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\psi_{si}f_s,\qquad \frac{du_\beta^{(i)}}{dt}=-u_{\beta-1}^{(i)}+\sum_{s=1}^{n}\psi_{si}^{(\beta)}f_s\qquad \begin{pmatrix} i=1,\ldots,k\\ \beta=2,\ldots,p_i\end{pmatrix}\tag{7}$$

$$\frac{dv_1^{(\alpha)}}{dt}=\omega_\alpha v_1^{(\alpha)}+\sum_{s=1}^{n}F_{s\alpha}f_s,\qquad \frac{dv_\gamma^{(\alpha)}}{dt}=\omega_\alpha v_\gamma^{(\alpha)}-v_{\gamma-1}^{(\alpha)}+\sum_{s=1}^{n}F_{s\alpha}^{(\gamma)}f_s\tag{8}$$

Определитель подстановки (6) отличается не обращающимся в нуль множителем

$$e^{(q_1\omega_1+\cdots+q_m\omega_m)t}$$

от определителя Вронского фундаментальной системы решений (5), и поэтому подстановка (6) ни при каких значениях t не является особенной. Кроме того, она, очевидно, обладает тем свойством, что задача о почти периодических решениях для системы (1) эквивалентна той же задаче для систем (7) и (8).

Обращаясь к последней задаче, заметим прежде всего, что уравнения (8) допускают почти периодические решения при любом выборе функций f_s. Действительно, так как по предположению $\operatorname{Re}(\omega_\alpha)\neq 0$, то первое уравнение (8) имеет частное решение

$$v_1^{(\alpha)}=e^{\omega_\alpha t}\int_a^t e^{-\omega_\alpha t}\sum_{s=1}^{n}F_{s\alpha}f_s\,dt$$

где $a=-\infty$ при $\operatorname{Re}(\omega_\alpha)<0$ и $a=+\infty$ при $\operatorname{Re}(\omega_\alpha)>0$. Это решение, очевидно, ограничено при $-\infty<t<+\infty$, и, следовательно, на основании известной теоремы Бора и Нейгебауера оно будет почти периодическим. Подставляя это решение во второе уравнение группы (8), мы получим для определения $v_2^{(\alpha)}$ уравнение такого же типа, как и для $v_1^{(\alpha)}$, которое, следовательно, также допускает почти периодическое решение. Продолжая аналогичным образом дальше, убеждаемся, что уравнения (8) допускают почти периодическое решение при любом выборе функций f_s.

Переходим теперь к уравнениям (7). По условию относительно f_s правая часть уравнения для $u_1^{(i)}$ представляет собой конечную сумму членов вида $\exp(i\lambda t)\,\varphi(t)$, где λ — вещественно, а $\varphi(t)$ — периодическая функция периода ω, разлагающаяся в равномерно сходящийся ряд Фурье. Поэтому для того чтобы неопределенный интеграл этой правой части и, следовательно, функция $u_1^{(i)}$ вышли почти периодическими, необходимо и достаточно, чтобы разложение Фурье этой правой части не содержало свободного члена, т. е. чтобы выполнялось i-е условие (4). Допустим, что это условие действительно выполнено. Тогда будем иметь

$$u_1^{(i)}=\int_0^t\sum_{s=1}^{n}\psi_{si}f_s\,dt+c_1^{(i)}$$

где $c_1^{(i)}$ — произвольная постоянная. Этой постоянной можно распорядиться таким образом, чтобы решение для $u_2^{(i)}$ вышло также почти периодическим.

Для этого достаточно положить

$$c_1^{(i)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{s=1}^{n} \left\{ \psi_{si}^{(2)} f_s - \int_0^t \psi_{si} f_s \, dt \right\} dt$$

Продолжая таким же образом дальше, мы придем к заключению, что при выполнении i-го условия (4) i-я группа уравнений (7) допускает почти периодическое решение, что, очевидно, и доказывает теорему.

Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_p$ — спектр частот функций f_s. Из доказанной теоремы непосредственно вытекает, что если характеристическое уравнение системы (2) не имеет корней с модулями, равными единице, то система (1) при любом выборе функций f_s будет допускать почти периодическое решение. При этом таких решений у системы (1) будет только одно. Действительно, если бы таких решений было два, то их разность являлась бы почти периодическим решением однородной системы (2), что при отсутствии у ее характеристического уравнения корней с модулями, равными единице, невозможно. Если характеристическое уравнение системы (2) имеет корни с модулями, равными единице, то условия (4) будут все же тождественно удовлетворяться при любом выборе функций f_s с заданным спектром частот, если не выполняется ни одно соотношение вида

$$\frac{2r\pi}{\omega} \pm \frac{1}{\omega} \sqrt{-1} \ln \lambda_i + \nu_q = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k;\ q = 1, \ldots, p;\ r = 1, 2 \ldots) \tag{9}$$

Если же существуют соотношения вида (9), то имеет место резонанс. Почти периодические решения будут существовать лишь для таких функций f_s, для которых выполняются соотношения (4).

Если характеристическое уравнение системы (2) имеет корни с модулями, равными единице, и система (1) имеет почти периодические решения, то таких решений будет бесчисленное множество и все они определяются формулой

$$x_s = x_s^*(t) + A_1 \varphi_{s1} + \cdots + A_k \varphi_{sk}$$

где x_s^* — какое-нибудь частное почти периодическое решение, а $A_1, \ldots, A_k$ — произвольные постоянные.

Допустим, что мы имеем дело с резонансным случаем и условия (4) не выполняются для каких-нибудь значений индекса i. Тогда система (1) будет допускать решения в виде полиномов с почти периодическими коэффициентами. Степень этих полиномов равна $p_j - 1$, где j — то значение индекса i, для которого условия (4) не выполняются и для которого величина p_j наибольшая. К этому заключению легко приходим из рассмотрения уравнений (7) при невыполнении условий (4).

Отметим частный случай. Допустим, что функции f_s являются периодическими того же периода ω, что и коэффициенты p_{si}. Тогда если характеристическое уравнение системы (2) не имеет корня, равного единице, то уравнение (1) будет допускать одно и только одно периодическое решение при любом выборе функций f_s. Если же указанное характеристическое уравнение имеет единичный корень какой-нибудь кратности, то, для того чтобы уравнения (1) допускали периодическое решение, необходимо выполнение некоторых добавочных условий. А именно, пусть единичному корню отвечает k групп решений. Тогда система (3) будет допускать k и только k периодических решений, которые мы попрежнему обозначим через $\psi_{si}, \ldots, \psi_{sk}$. Для того чтобы система (1) допускала периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы попрежнему выполнялись условия (4), которые в рассматриваемом случае могут быть записаны в более простой форме:

$$\int_0^{\omega} \sum_{s=1}^{n} f_s \psi_{si} \, dt = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

При этом функции f_s могут быть произвольными периодическими функциями периода ω, в частности и такими, для которых ряды Фурье расходятся.

Допустим теперь, что f_s являются произвольными почти периодическими функциями. В этом случае можно также получить необходимые и достаточные условия существования почти периодических решений системы (1), но при некоторых более частных предположениях о характеристическом уравнении. А именно мы будем предполагать, что каждому кратному корню характеристического уравнения, модуль которого равен единице, отвечает столько групп решений, какова его кратность. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если число групп решений, отвечающих каждому кратному корню λ_i с модулем, равным единице, характеристического уравнения системы (2) равно его кратности, то, каковы бы ни были почти периодические функции f_s, система (1) тогда и только тогда допускает почти периодические решения, когда функции

$$\int_0^t \sum_{s=1}^n \psi_{si} f_s \, dt \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

ограничены.

Доказательство. В рассматриваемом случае каждая группа уравнений (7) будет состоять только из одного первого уравнения. Поэтому для того чтобы эти уравнения допускали почти периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы неопределенные интегралы правых частей этих уравнений были почти периодическими, для чего, как известно, необходимо и достаточно, чтобы они были ограниченными.

Поступила
19 IV 1954

Уральский государственный
университет