Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В СЛУЧАЕ С. В. КОВАЛЕВСКОЙ

В. В. Румянцев

(Москва)

При условиях С. В. Ковалевской

$$A = B = 2C, \qquad x_0 \neq 0, \qquad y_0 = z_0 = 0$$

уравнения Эйлера движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки O принимают вид:

$$2\frac{dp}{dt} = qr, \qquad 2\frac{dq}{dt} = -rp + a\gamma_3, \qquad \frac{dr}{dt} = -a\gamma_2 \tag{1}$$

Здесь A, B, C обозначают главные моменты инерции тела для неподвижной точки, x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести тела в системе координат $Oxyz$, оси которой направлены по главным осям инерции тела для неподвижной точки; p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости тела на оси x, y, z, соответственно; γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы вертикально вверх направленной прямой относительно осей координат, mg — вес тела, $a = mgx_0 / C$.

Функции γ_1, γ_2, γ_3 удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2 \tag{2}$$

Очевидно, уравнения (1)—(2) имеют частное решение

$$p = \omega = \text{const}, \qquad q = r = 0, \qquad \gamma_1 = 1, \qquad \gamma_2 = \gamma_3 = 0 \tag{3}$$

описывающее равномерное вращение тела вокруг оси x, совпадающей при этом с вертикалью. Это движение тела примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость по отношению к переменным p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3.

Допустим, что в возмущенном движении

$$\begin{matrix} p = \omega + \xi_1, & q = \xi_2, & r = \xi_3 \\ \gamma_1 = 1 + \zeta_1, & \gamma_2 = \zeta_2, & \gamma_3 = \zeta_3 \end{matrix} \tag{4}$$

Легко видеть, что уравнения возмущенного движения тела

$$\begin{aligned} &2\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2\xi_3, && \frac{d\zeta_1}{dt} = \xi_3\zeta_2 - \xi_2\zeta_3 \\ &2\frac{d\xi_2}{dt} = -\xi_3(\omega + \xi_1) + a\zeta_3, && \frac{d\zeta_2}{dt} = (\omega + \xi_1)\zeta_3 - \xi_3(1 + \zeta_1) \\ &\frac{d\xi_3}{dt} = -a\zeta_2, && \frac{d\zeta_3}{dt} = \xi_2(1 + \zeta_1) - (\omega + \xi_1)\zeta_2 \end{aligned} \tag{5}$$

допускают интегралы

$$\begin{aligned} V_1 &= 2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\omega\xi_1) + \xi_3^2 + 2a\zeta_1 \\ V_2 &= 2(\xi_1\zeta_1 + \xi_2\zeta_2 + \xi_1 + \omega\zeta_1) + \xi_3\zeta_3 \\ V_3 &= \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + 2\zeta_1 \end{aligned} \tag{6}$$

Функцию Ляпунова построим в форме линейной связки интегралов (6) уравнений возмущенного движения [1]

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + (2\omega^2 - a) V_3 = 2\xi_1^2 - 4\omega\xi_1\zeta_1 + (2\omega^2 - a)\zeta_1^2 + 2\xi_2^2 - 4\omega\xi_2\zeta_2 + \\ + (2\omega^2 - a)\zeta_2^2 + \xi_3^2 - 2\omega\xi_3\zeta_3 + (2\omega^2 - a)\zeta_3^2 \qquad (7)$$

Чтобы первые две однотипные квадратичные формы были определенно-положительными, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\begin{vmatrix} 2 & -2\omega \\ -2\omega & 2\omega^2 - a \end{vmatrix} = -2a > 0 \qquad (8)$$

Последняя квадратичная форма в выражении (7) будет определенно-положительной при выполнении условия

$$\begin{vmatrix} 1 & -\omega \\ -\omega & 2\omega^2 - a \end{vmatrix} = \omega^2 - a > 0 \qquad (9)$$

которое, очевидно, будет выполнено, если выполнено условие (8). Таким образом, условие (8) является достаточным условием безусловной устойчивости движения (3) по отношению к переменным p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3.

Легко видеть, что условие (8) является также и необходимым условием устойчивости движения [3]. В самом деле, определяющее уравнение, соответствующее системе уравнений (5) возмущенного движения, имеет вид:

$$\triangle(\lambda) = 2\lambda^2 (2\lambda^2 - a)(\lambda^2 - a + \omega^2) = 0 \qquad (10)$$

Очевидно, что при $a > 0$ найдется по крайней мере один положительный корень уравнения (10) и согласно одной теореме Ляпунова [2] движение (3) будет неустойчивым.

Поступила 14 IV 1954

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
3. Grammel. Die Stabilität der Staudeschen Kreiselbewegungen. Math. Zeitschrift, Bd. 6, 1920.