Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

НАПРЯЖЕНИЯ В СПЛОШНОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

А. Г. Костюк
(Москва)

§ 1. В работе [1] приведены формулы, определяющие напряженное состояние в пластическом сплошном цилиндре радиуса a, вращающемся с угловой скоростью ω. При этом предполагается, что материал цилиндра обладает идеальной пластичностью и несжимаемостью.

Если на цилиндрической поверхности заданы радиальные напряжения σ_{ra} и цилиндр, кроме того, нагружен в осевом направлении силой P, то напряженное состояние цилиндра описывается следующими уравнениями:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_{ra} + \frac{1}{2} A (1 - \rho^2), \qquad \sigma_z = \frac{P}{\pi a^2} + \frac{1}{4} A (1 - 2\rho^2) \qquad \left(A = \frac{\gamma\omega^2 a^2}{g}\right) \tag{1.1}$$

где σ_r, σ_θ и σ_z — радиальное, окружное и осевое нормальное напряжение, $\rho = r / a$ — относительный радиус, γ — удельный вес метериала, g — гравитационное ускорение.

Вычисляя на основании (1.1) интенсивность напряжений σ_i, получим

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} = \left| \sigma_{ra} + \frac{A}{4} - \frac{P}{\pi a^2} \right| \tag{1.2}$$

т. е. при любых значениях σ_{ra}, A и P интенсивность напряжений постоянна по всему объему цилиндра. Если предположить, что материал цилиндра несжимаем и в упругой области, то из постоянства σ_i следует, что с ростом нагрузки в пластическое состояние переходит одновременно весь цилиндр [1].

Окружная скорость u на периферии цилиндра, при которой происходит его переход в пластическое состояние, определится из условия равенства правой части (1.2) пределу текучести σ_s:

$$u = u_0 \frac{2}{\sqrt{|1 + p - q|}} \qquad \left(u_0 = \sqrt{g \frac{\sigma_s}{\gamma}}\right)$$

где

$$p = \frac{4\sigma_{ra}}{A}, \qquad q = \frac{4P}{\pi a^2 A}$$

Так как необходимо ограничиться условием простого нагружения, то можно рассматривать лишь случаи, когда p и q не зависят от окружной скорости. Если

---

[1] Это обстоятельство осталось незамеченным в работе М. Ш. Микеладзе [2], что привело к ошибочному выводу о неразрешимости задачи о чисто пластическом состоянии сплошного цилиндра в предположении несжимаемости материала. Ошибочно также утверждение М. Ш. Микеладзе о том, что вращающийся барабан находится в плоском напряженном состоянии. В связи с этим формула (2.15), определяющая предельную скорость барабана, является неверной.

радиальное напряжение σ_{ra} создается за счет центробежных сил деталей, закрепленных на цилиндрической поверхности, то условие $p = \text{const}$ будет само собой выполнено.

Оказывается, формулы (1.1) дают точное решение задачи о деформации вращающегося сплошного цилиндра не только при идеальной пластичности материала, но и при произвольном законе упрочнения $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$.

Этот результат является прямым следствием постоянства интенсивности напряжений (а следовательно, и интенсивности деформаций) по всему объему цилиндра.

Так как степень деформации характеризуется величиной ε_i, которая в рассматриваемом случае оказывается постоянной, то можно сказать, что сплошной вращающийся цилиндр обладает «равнопрочностью».

§ 2. Влияние сжимаемости материала на напряженное состояние при достаточно развитых пластических деформациях можно учесть методом малого параметра в тех случаях, когда известно напряженное состояние для несжимаемого материала. Ниже применение этого метода к учету сжимаемости рассматривается для случая деформации сплошного вращающегося цилиндра, но, понятно, такой прием имеет общий характер. Напряжения представим в виде

$$\sigma_k = \sigma_{k0} + \lambda\sigma_{k1} + \lambda^2\sigma_{k2} + \ldots \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем индекс k означает компоненты тензора в системе координат (r, θ, z); индексом 0 отмечено напряженное состояние несжимаемого тела; λ — малый параметр; члены, зависящие от λ, дают поправку на сжимаемость.

Деформации запишем в виде ряда по степеням малого параметра:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k(0) + \lambda\left(\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0} + \frac{1}{2!}\lambda^2\left(\frac{\partial^2\varepsilon_k}{\partial\lambda^2}\right)_{\lambda=0} + \ldots \tag{2.2}$$

Уравнения теории малых упруго-пластических деформаций с учетом сжимаемости записываются следующим образом:

$$\varepsilon_k = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_k - \sigma) + \frac{\sigma}{3K} \qquad (3\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) \tag{2.3}$$

Здесь K — модуль объемной упругости.

Из уравнений (2.3), пользуясь зависимостями (2.1), можно вычислить производные от деформации по λ, входящие в (2.2); при этом производные вида $(\partial\varepsilon_k / \partial\lambda)_{\lambda=0}$ являются линейными функциями от напряжений σ_{k1}, величины $(\partial^2\varepsilon_k / \partial\lambda^2)_{\lambda=0}$ — линейными функциями от системы σ_{k2} и т. д.

Полная система σ_k должна удовлетворять условиям равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = -A\rho, \qquad \int_0^1 \sigma_z \rho\, d\rho = \frac{P}{2\pi a^2} \tag{2.4}$$

и условиям совместности деформаций

$$\Phi(\lambda) = \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{\rho} = 0, \qquad \varepsilon_z = \text{const} \tag{2.5}$$

Так как граничные и объемные нагрузки не варьируются, то системы σ_{kn} $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ должны удовлетворять уравнениям равновесия (2.4) при нулевой правой части и нулевым граничным условиям на периферии для радиальных напряжений σ_{rn}. На оси цилиндра должно быть $\sigma_{rn} = \sigma_{\theta n}$.

Первое из уравнений (2.5) представим в виде ряда по степеням λ:

$$\Phi(\lambda) = \Phi(0) + \lambda\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2}\right)_{\lambda=0} + \ldots \tag{2.6}$$

Как легко видеть, производная $(\partial^s\Phi / \partial\lambda^s)_{\lambda=0}$ не зависит от систем напряжений σ_{kn}, где $n > s$, и является линейной функцией от напряжений σ_{ks}.

Уравнения совместности (2.5) будут удовлетворены, если на основании (2.2) и (2.6) положить

$$\Phi(0) + \lambda\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0, \qquad \varepsilon_z(0) + \lambda\left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = B_1 \tag{2.7}$$

$$\left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial \lambda^n}\right)_{\lambda=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^n \varepsilon_z}{\partial \lambda^n}\right)_{\lambda=0} = B_n \tag{2.8}$$

Здесь B_1, B_n — постоянные.

Напряжения σ_{k1}, соответствующие поправке на сжимаемость по первому приближению, определяются из системы (2.7) и уравнений равновесия (2.4), но без правой части. При этом параметр λ можно положить равным единице. Напряжения σ_{kn}, соответствующие следующим приближениям, определяются из (2.4) при нулевой правой части и уравнений (2.8).

В тех случаях, когда несжимаемое тело обладает «равнопрочностью», т. е. интенсивность напряжений, подсчитанная по системе σ_{k0}, является постоянной величиной, получающиеся системы уравнений для σ_{kn} оказываются не только линейными, но и с постоянными коэффициентами и, следовательно, легко могут быть решены. Для отыскания n-го приближения должны быть известны системы напряжений до $n-1$ приближения включительно.

Решения упомянутых систем уравнений первого и второго приближения для случая вращающегося сплошного цилиндра, целиком перешедшего в пластическое состояние, имеет следующий вид:

$$\sigma_{r1} = -\frac{1}{4} A\alpha(1-\rho^2), \qquad \sigma_{\theta 1} = -\frac{1}{4} A\alpha(1-3\rho^2), \qquad \sigma_{z1} = -\frac{1}{4} A\beta(1-2\rho^2) \tag{2.9}$$

Здесь

$$\alpha = \frac{m(1+\varkappa)}{1+\varkappa+m(^4/_3+\varkappa)}, \qquad \beta = \frac{m(2+\varkappa)}{1+\varkappa+m(^4/_3+\varkappa)}$$

$$m = \frac{\sigma_{i0}}{3\varepsilon_{i0}K}, \qquad \varkappa = \frac{\sigma_{i0}^2}{\varepsilon_{i0}} \frac{\partial}{\partial \sigma_{i0}}\left(\frac{\varepsilon_{i0}}{\sigma_{i0}}\right)$$

Для системы σ_{k2} получаются зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{r2} &= a_1(1-\rho^2) - a_2(1-\rho^4) \\ \sigma_{\theta 2} &= a_1(1-3\rho^2) - a_2(1-5\rho^4) \\ \sigma_{z2} &= b_1(1-2\rho^2) - b_2(1-3\rho^4) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь

$$i = \operatorname{sign}\left(\sigma_{ra} + \frac{A}{4} - \frac{P}{\pi a^2}\right)$$

$$\Delta \frac{\sigma_{i0} a_1}{A^2} i = -\frac{1}{24}(\beta-\alpha)^2 m\left(\frac{1}{2}\xi+\varkappa\right) + \frac{1}{16}\varkappa\alpha(\beta-\alpha)\left(\varkappa+1+\frac{1}{3}m\right)$$

$$\Delta \frac{\sigma_{i0} a_2}{A^2} i = -\frac{1}{36}(\beta-\alpha)^2 m\left(\frac{1}{2}\xi+\varkappa\right) - \frac{1}{96}\varkappa m\alpha^2 + \frac{1}{16}\varkappa\alpha(\beta-\alpha)\left(\varkappa+1+\frac{1}{3}m\right)$$

$$\Delta \frac{\sigma_{i0} b_1}{A^2} i = \frac{1}{8}(\beta-\alpha)^2\left(1+\frac{2}{3}m\right)\left(\frac{1}{2}\xi+\varkappa\right) + \frac{1}{16}\varkappa\alpha(\beta-\alpha)\left(\varkappa+1-\frac{2}{3}m\right)$$

$$\Delta \frac{\sigma_{i0} b_2}{A^2} i = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2\left(1+\frac{2}{3}m\right)\left(\frac{1}{2}\xi+\varkappa\right) + \frac{1}{32}\varkappa\alpha^2\left(1+\frac{2}{3}m\right) + \\ + \frac{1}{16}\varkappa\alpha(\beta-\alpha)\left(\varkappa+1-\frac{2}{3}m\right)$$

$$\Delta = 1+\varkappa+m\left(\frac{4}{3}+\varkappa\right), \qquad \xi = \frac{\sigma_{i0}^3}{\varepsilon_{i0}} \frac{\partial^2}{\partial \sigma_{i0}^2}\left(\frac{\varepsilon_{i0}}{\sigma_{i0}}\right)$$

Для степенного закона упрочнения $\sigma_i = N\varepsilon_i^{\mu}$ и, следовательно,

$$\varkappa = \frac{1-\mu}{\mu}, \qquad \xi = \frac{(1-\mu)(1-2\mu)}{\mu^2}, \qquad m = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{i0}}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Для упругого материала $\mu = 1$ и ряды (2.1) обрываются на втором члене; суммы $\sigma_{k0} + \sigma_{k1}$ дают известное точное решение упругой задачи.

При учете сжимаемости материала не весь цилиндр одновременно переходит в пластическое состояние; пластическая область возникает в центре цилиндра при окружной скорости

$$u = 2u_0 \left| \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} + p - q \right|^{-1/2}$$

и с ростом скорости распространяется на весь цилиндр.

Найдем величину окружной скорости u_1 на периферии, при которой упругая зона исчезает. Интенсивность напряжений приближенно представим в виде

$$\sigma_i \approx \sigma_i(0) + \lambda\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial\lambda}\right)_{\mu=0} + \frac{1}{2!}\lambda^2\left(\frac{\partial^2\sigma_i}{\partial\lambda^2}\right)_{\lambda=0}$$

Используя полученные решения (2.9), (2.10), после преобразований найдем (при $\lambda = 1$)

$$\sigma_i^\circ = 1 - i\left[\sigma_{z1}^\circ + \sigma_{z2}^\circ - \frac{1}{2}(\sigma_{r1}^\circ + \sigma_{r2}^\circ + \sigma_{\theta1}^\circ + \sigma_{\theta2}^\circ)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\sigma_{i1}^{\circ 2} - \left[\sigma_{z1}^\circ - \frac{1}{2}(\sigma_{r1}^\circ + \sigma_{\theta1}^\circ)\right]^2\right\}$$

где

$$\sigma^\circ = \frac{\sigma}{\sigma_{i0}}, \qquad \sigma_{i1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_{r1} - \sigma_{\theta1})^2 + (\sigma_{\theta1} - \sigma_{z1})^2 + (\sigma_{z1} - \sigma_{r1})^2}$$

Ограничиваясь случаем степенного упрочнения и полагая, что $\sigma_i = \sigma_s$ при $\rho = 1$, получим формулу для u_1 (осевая сила P отсутствует):

$$u_1 = 2u_0\left[1 + p - \varkappa\alpha + \frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{1+p} - (1-\mu)\frac{\alpha^2}{1+p}\frac{1 + {}^1/_3\mu + (1 - {}^2/_3\mu)m}{1 + (1 + {}^1/_3\mu)m}\right]^{-1/2} \qquad (2.11)$$

Так как в момент перехода цилиндра в пластическое состояние пластические деформации еще не развиты, то можно положить $\sigma_{i0}/3\varepsilon_{i0} \approx G$ модулю упругости при сдвиге и, следовательно,

$$m = \frac{G}{K} = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$$

Для материала сжимаемого, но обладающего идеальной пластичностью, предельная окружная скорость приближенно определяется из соотношения

$$u_{np} = 2u_0\left(1 + p + \frac{1}{2}\frac{\alpha_0^2}{1+p}\right)^{-1/2} \qquad \left(\alpha_0 = \frac{3(1-2\nu)}{5-4\nu}\right) \qquad (2.12)$$

Из формул (2.11) и (2.12) следует, что сжимаемость материала приводит к снижению предельной скорости на несколько процентов. При больших μ, наоборот, значения скорости u_1 выше, чем для цилиндра из несжимаемого материала.

Поступила 29 IV 1954

Московский энергетический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Надаи А. Пластичность. ОНТИ, 1936.
2. Микеладзе М. Ш. О прочности быстровращающегося цилиндра. ПММ, т. XVI, вып. 6, 1952.