Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Б. М. Булах

(Саратов)

При изучении установившихся безвихревых изэнтропических конических течений идеального газа обычно предполагают, что отклонения скоростей от скорости основного однородного потока малы, а также малы производные скоростей по пространственным координатам. На этом основании уравнение для потенциала скоростей линеаризируют, причем выбрасываются также некоторые старшие производные. Решения линейного уравнения дают в основном правильную картину при малых возмущениях. На характеристическом конусе для однородного потока скорости, даваемые линейной теорией, имеют особенность квадратного корня.

Покажем, что возникновение этой особенности является результатом линеаризации, так что в точной теории этой особенности нет. Этот факт лишает основания выводы работ, опирающиеся в этом вопросе на линейную теорию, например[1]. Исследуем также течения, примыкающие к однородному потоку вдоль характеристического конуса. В конических течениях скорости зависят только от угловых величин, за которые здесь принимаются $\xi = x/z$, $\eta = y/z$; ось z направлена «по скорости» однородного потока. В плоскости $\xi\eta$ введем полярные координаты

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\eta}{\xi}$$

Выражения для компонент скоростей по соответствующим осям будут

$$u = \cos\theta F_r - \frac{\sin\theta}{r} F_\theta, \qquad v = \sin\theta F_r + \frac{\cos\theta}{r} F_\theta, \qquad w = F - rF_r$$

Здесь индексы внизу обозначают производные, функция F удовлетворяет уравнению

$$\{a^2(1 + r^2) - [rF - (1 + r^2)F_r]^2\} F_{rr} + 2\left\{\left[F - \left(r + \frac{1}{r}\right)F_r\right]F_\theta\right\}\left(\frac{1}{r}F_{r\theta} - \frac{1}{r^2}F_\theta\right) +$$

$$+ \left(a^2 - \frac{1}{r^2}F_\theta^2\right)\left(\frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + \frac{1}{r}F_r\right) = 0 \qquad (1)$$

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\varkappa - 1}{2}\left[F_r^2 + \frac{1}{r^2}F_\theta^2 + (F - rF_r)^2 - F_0^2\right]$$

Здесь $\varkappa$ — адиабатический индекс, a_0 — скорость звука в однородном потоке, F_0 — значение потенциала в однородном потоке, равное его скорости.

На характеристическом конусе

$$r = r_0 = (M_0^2 - 1)^{-1/2} \qquad \left(M_0 = \frac{F_0}{a_0}\right) F_r = F_\theta = 0$$

так как в невозмущенном потоке имеется одна составляющая скорости w_0. При $r = r_0$ обращаются в нуль коэффициенты при F_{rr}, $F_{r\theta}$.

Ищем решение уравнения (1) в окрестности $r = r_0$ в виде

$$F = F_0 + F_2(\theta)(r - r_0)^2 + F_3(\theta)(r - r_0)^3 + \cdots$$

Оказывается, что все $F_k(\theta)$ — постоянные, соответствующие осесимметричному течению, так как процесс определения $F_k(\theta)$ идет без участия производных по θ в (1) и коэффициенты при производных в (1) зависят только от r. Если искать решение в виде

$$F = F_0 + F_\alpha(\theta)(r_0 - r)^\alpha + \cdots, \quad \alpha > 1,$$

то единственной возможностью будет случай $\alpha = 2$, т. е. предыдущий. Для того чтобы выявить главный член F в окрестности $r = r_0$, упростим (1), выбросив члены заведомо более высокого порядка в коэффициентах при старших производных и в свободном члене. Так, в коэффициенте при F_{rr} выбросим F_θ^2, F_r^2, $F_r(r - r_0)$, — они заведомо являются малыми более высокого порядка, чем F_r и $r - r_0$, которые мы оставляем. Аналогично и с другими членами (1), причем считаем, что $F_{r\theta}$ ограничена при $r \to r_0$, что означает конечное касательное ускорение. Введем еще новую искомую функцию и переменную по формулам

$$\Phi = (\varkappa + 1)\frac{M_0^4}{M_0^2 - 1}\frac{1}{F_0}F, \quad t = 1 - r(M_0^2 - 1)^{1/2}$$

При этом характеристическому конусу соответствует $t = 0$.

Упрощенное уравнение запишется

$$\left(-\frac{1}{2}\Phi_t + t\right)\Phi_{tt} - \frac{1}{2}\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_{\theta\theta} - \frac{M_0^2 - 1}{M_0^2(\varkappa + 1)}\Phi_\theta\Phi_{t\theta} = 0 \tag{2}$$

Отметим, что

$$\frac{d}{dt}(r_0 - r) = (M_0^2 - 1)^{-1/2} \neq 0$$

Уравнение линеаризированных течений будет

$$[1 - r^2(M_0^2 - 1)]F_{rr} + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + \frac{1}{r}F_r = 0$$

После введения новой искомой функции и переменной по приведенным выше формулам и выбрасывания членов более высокого порядка в окрестности $t = 0$ оно примет вид:

$$t\Phi_{tt} - \frac{1}{2}\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_{\theta\theta} = 0 \tag{3}$$

Главным членом решений этого уравнения будет, как легко установить, $t^{3/2}$:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_{3/2}(\theta)\, t^{3/2} + \cdots$$

что и дает указанную ранее особенность.

Легко видеть, что $t^{3/2}$ не будет главным членом решений (2), так как t — малая более высокого порядка, чем $\Phi_t \sim O(t^{1/2})$. Отсюда же получается, что если искать главный член в виде $\Phi_\alpha(\theta)\, t^\alpha$, то единственная возможность есть $\alpha = 2$.

Если считать, что $\Phi_{tt} \to 0$ при $t \to 0$, то уравнение (2) можно еще упростить, выбросив из коэффициента при $\Phi_{tt}\Phi_t$, а также $\Phi_\theta\Phi_{t\theta}$. В результате получим (3), которое дает $\Phi_{tt} \to \infty$ при $t \to 0$, т. е. противоречие с первоначальным допущением, что $\Phi_{tt} \to 0$ при $t \to 0$. Если считать, что $\Phi_{tt} \to \infty$ при $t \to 0$, то можно установить аналогично с плоским течением, у которого ускорение обращалось бы в бесконечность на прямой звуковой линии, чего, по нашему мнению, быть не может. Приведенные соображения делают вероятным такую теорему.

Теорема. К однородному потоку нельзя присоединить без скачка вдоль характеристического конуса иного потока, чем осесимметричный.

Поступила 27 III 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. The Shock Strength in Supersonic «Conical Fields», The Philosophical Magazine, vol. 40, seventh series, № 311, 1949.