Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ

В. П. Шестопалов

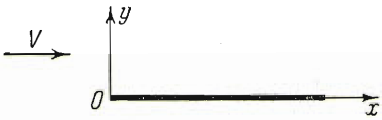
(Харьков)

Наряду с рассмотрением задачи обтекания пластинки вязкой жидкостью в рамках теории пограничного слоя представляет интерес непосредственное исследование этой задачи, исходя из уравнений Навье-Стокса для полубесконечной пластинки. В таком виде эта задача впервые изучалась Н. Е. Кочиным. Результаты этой работы, относящиеся, повидимому, к 1944 г., были опубликованы во II томе его «Собрания сочинений» [1]. Приближенный метод, позволяющий принципиально рассмотреть эту задачу, был намечен А. А. Дородницыным.

Необходимо отметить, что независимо от Н. Е. Кочина (результаты которого были опубликованы посмертно лишь в 1949 г.), Альден [2] опубликовал в 1948 г. второе приближение для решения этой задачи.

В работе Н. Е. Кочина было дано общее решение задачи обтекания полубесконечной пластинки. Для возможности сравнения с опытом и с теорией пограничного слоя необходимо дальнейшее преобразование полученных Кочиным уравнений, позволяющих уже применять численные методы интегрирования. В настоящей работе произведены необходимые преобразования и проведено численное интегрирование в первом и втором приближениях. Одновременно и независимо аналогичные вычисления производились Б. Черниловским.

Автор благодарит В. Л. Германа за указание и обсуждение темы.



Фиг. 1

1. Воспроизведем вкратце решение этой задачи, следуя работе [1]. Рассматривается обтекание плоской полубесконечной пластинки однородным потоком несжимаемой жидкости. Положительная ось x совпадает с пластинкой (фиг. 1). Скорость потока на бесконечности вверх по течению обозначена через V.

Уравнение движения, представленное в параболических координатах ξ и η, имеет вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\triangle\psi}{\xi^2+\eta^2}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\triangle\psi}{\xi^2+\eta^2}\right)=\nu\Delta\left(\frac{\triangle\psi}{\xi^2+\eta^2}\right) \tag{1.1}$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости,

$$\triangle\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2},\qquad x^2=\xi^2-\eta^2,\qquad y=2\xi\eta \tag{1.2}$$

Проекции скорости на оси x и y будут

$$\begin{aligned}u&=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{2(\xi^2+\eta^2)}\left(\eta\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\xi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\\-v&=\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{1}{2(\xi^2+\eta^2)}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}-\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\end{aligned} \tag{1.3}$$

Поэтому для функции тока $\psi(\xi,\eta)$ краевые условия имеют вид:

$$\psi(\xi,0)=0,\qquad \lim_{\eta\to\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\psi}{\eta}\right)=2V \tag{1.4}$$

Решение (1.1) ищется в виде ряда

$$\psi \sim \xi f_0(\eta) + \frac{1}{\xi} f_1(\eta) + \frac{1}{\xi^3} f_2(\eta) + \ldots \tag{1.5}$$

Ограничиваясь первыми двумя членами, после замены

$$\eta = \sqrt{\frac{\nu}{V}}\, s, \qquad f_0 = \sqrt{\nu V}\,\varphi_0(s), \qquad f_1 = \nu \sqrt{\frac{\nu}{V}}\,\varphi_1(s) \tag{1.6}$$

и соответствующих преобразований задача приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_0''' + \varphi_0''\varphi = 0 \tag{1.7}$$

$$\varphi_1''' + \varphi_0\varphi_1'' + 2\varphi_0'\varphi_1' - \varphi_0''\varphi_1 = s^2\varphi_0'^2 - 2s\varphi_0\varphi_0' - 2\bar{\lambda}^2 \quad (\bar{\lambda} = \mathrm{const})$$

с граничными условиями

$$\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0, \qquad \varphi_0'(\infty) = 2, \qquad \varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = 0, \qquad \varphi_1'(\infty) = 0 \tag{1.8}$$

Отбрасывая члены порядка $1 / R_x^2$, можно получить выражения

$$\frac{u}{V} = \frac{1}{2(R_x + s^2)} (R_x\varphi_0' + \varphi_1' + s\varphi_0) \tag{1.9}$$

$$\frac{p_{xy}\,|_{\,y=0}}{\rho V^2} = \frac{1}{4\sqrt{R_x}} \left\{ \varphi_0''(0) + \frac{\varphi_1''(0)}{R_x} \right\} \tag{1.10}$$

Здесь $p_{xy}\,|_{\,y=0}$ — напряжение трения на пластинке,

$$R_x = \frac{V\xi^2}{\nu} = R + s^2 = R + \frac{V\eta^2}{\nu}, \qquad R = \frac{Vx}{\nu}$$

При числе Рейнольдса $R \to \infty$ отношение

$$\frac{u}{V} = \frac{1}{2}\varphi_0'(s)$$

т. е. имеет тот же вид, что и в обычной теории пограничного слоя.

При малом s (что удовлетворяется для пограничного слоя) (1.9) запишется так:

$$\frac{u}{V} = \frac{1}{2}\left(\varphi_0' + \frac{\varphi_1'}{R} + \frac{s\varphi_0}{R} \right) \tag{1.11}$$

Таблица 1

s	$\varphi_0(s)$	$\varphi_0'(s)$	$\varphi_0''(s)$
0.0	0.00000	0.00000	1.32824
0.4	0.10611	0.52942	1.30957
0.8	0.42032	1.03352	1.18666
1.2	0.92230	1.45798	0.91237
1.6	1.56911	1.76218	0.55651
2.0	2.30576	1.91104	0.25694
2.4	3.08534	1.97558	0.08748
2.8	3.88031	1.99496	0.02173
3.2	4.67938	1.99922	0.00392

2. Используя асимптотики для $\varphi_0(s)$, $\varphi_0'(s)$, $\varphi_0''(s)$ при больших значениях s, в работе[1] указывается метод, при помощи которого можно найти формальное решение системы (1.7). При этом показано, что каждое из уравнений системы, кроме первого, имеет однопараметрическое множество решений, удовлетворяющих граничным условиям.

Для нахождения распределения скоростей (1.11) и напряжений трения на пластинке (1.10) необходимо определить функции φ_0, φ_1, т. е. решить рекурентную систему уравнений (1.7) при заданных граничных условиях (1.8). Так как решение первого уравнения (1.7) хорошо известно[3], будем решать второе уравнение (1.7), используя при этом решение первого уравнения (1.7), данное в виде табл. 1.

Как известно, решением линейного неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка является функция

$$\varphi_1(s) = C_1\chi_1(s) + C_2\chi_2(s) + C_3\chi_3(s) + Q(s) \tag{2.1}$$

где χ_1, χ_2, χ_3 — частные линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения. Ищем решение второго уравнения (1.7) в указанном виде численными методами. Отметим, что соответствующее (1.7) однородное уравнение

$$\chi''' + \varphi_0\chi'' + 2\varphi_0'\chi' - \varphi_0''\chi = 0 \tag{2.2}$$

имеет частным решением, как это ясно из подстановки, функцию $\varphi_0'(s)$.

Полагая $\chi_1(s) = \varphi_0'(s)$, найдем $\chi_2(s)$ и $\chi_3(s)$, пользуясь численным методом Адамса-Штермера, при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} &\chi_2(0) = 1, \qquad \chi_2'(0) = 0, \qquad \chi_2''(0) = 0 \\ &\chi_3(0) = 0, \qquad \chi_3'(0) = 0, \qquad \chi_3''(0) = 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

s	$\chi_2(s)$	$\chi_2'(s)$	$\chi_2''(s)$	$\chi_2'''(s)$	$\chi_3(s)$	$\chi_3'(s)$	$\chi_3''(s)$	$\chi_3'''(s)$
0.0	1.0000	0.0000	0.0000	1.3284	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.2	1.0019	0.0266	0.2653	1.3072	0.0203	0.1996	0.9926	0.1068
0.4	1.0143	0.1052	0.5158	1.1623	0.0792	0.3943	0.9438	0.4142
0.6	1.0408	0.2293	0.7142	0.7946	0.1768	0.5719	0.8162	0.8730
0.8	1.1079	0.3843	0.8152	0.1772	0.3064	0.7145	0.5922	1.362
1.0	1.2029	0.5452	0.7752	0.5972	0.4582	0.8030	0.2802	1.712
1.2	1.3246	0.6832	0.5804	1.3224	0.6238	0.8240	0.2332	1.768
1.4	1.4712	0.7720	0.2666	1.7453	0.7836	0.7750	0.4028	1.448
1.6	1.6279	0.7872	0.0872	1.7175	0.9292	0.6701	0.6326	0.836
1.8	1.7828	0.7385	0.3920	1.2760	1.0492	0.5314	0.7302	0.143
2.0	1.9222	0.6382	0.5816	0.6058	1.1422	0.3866	0.6982	0.425
2.2	2.0358	0.5128	0.6372	0.0221	1.2053	0.2580	0.5772	0.732
2.4	2.1222	0.3912	0.5856	0.4528	1.2462	1.1880	0.4216	0.786
2.6	2.1932	0.2842	0.4742	0.6229	1.2708	0.0888	0.2742	0.663
2.8	2.2427	0.2028	0.3502	0.6028	1.2836	0.0459	0.1613	0.472
3.0	2.2768	0.1435	0.2402	0.4862	1.2904	0.0218	0.0852	0.249
3.2	2.3021	0.1028	0.1593	0.3382	1.2934	0.0096	0.0412	0.162

Из табл. 2 видно, что $\chi_2(s)$, $\chi_2'(s)$; $\chi_3(s)$, $\chi_3'(s)$ являются довольно плавными функциями; это свойство указанных функций облегчает дальнейшее исследование решения (1.7).

Частное решение $Q(s)$ отыскиваем методом вариации произвольных постоянных в виде

$$Q(s) = C_1(s)\chi_1(s) + C_2(s)\chi_2(s) + C_3(s)\chi_3(s) \tag{2.4}$$

На $C_1(s)$, $C_2(s)$, $C_3(s)$ накладываются следующие условия:

$$\begin{aligned} &C_1'\chi_1 + C_2'\chi_2 + C_3'\chi_3 = 0 \\ &C_1'\chi_1' + C_2'\chi_2' + C_3'\chi_3' = 0 \\ &C_1'\chi_1'' + C_2'\chi_2'' + C_3'\chi_3'' = \theta(s)\,(s\varphi_0' - \varphi_0)^2 - 4\lambda^2 \end{aligned}$$

Отсюда

$$C_1' = \frac{\theta(s)}{U(s)}\begin{vmatrix} \chi_2 & \chi_3 \\ \chi_2' & \chi_3' \end{vmatrix}, \qquad C_2' = \frac{-\theta(s)}{U(s)}\begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1' & \chi_2' \end{vmatrix}, \qquad C_3' = \frac{\theta(s)}{U(s)}\begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1' & \chi_2' \end{vmatrix}$$

где

$$U(s) = \begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \\ \chi_1' & \chi_2' & \chi_3' \\ \chi_1'' & \chi_2'' & \chi_3'' \end{vmatrix} = -\varphi_0''(s), \qquad C_i(s) = \int_0^s C_i'(s)\,ds$$

Общее решение второго уравнения (1.7) записано в виде (2.1). Для определения произвольных постоянных используем начальные условия

$$\varphi_1(0) = 0, \qquad \varphi_1'(0) = 0$$

которые приводят к тому, что $C_1 = C_2 = 0$.

Таким образом, решение (1.7) имеет окончательный вид:

$$\varphi_1 = C\chi_3 + Q \tag{2.5}$$

Как показано в работе Н. Е. Кочина, условие $\varphi_1'(\infty) = 0$ выполняется при любом конечном C. Только при одном значении C решение φ_1' будет стремиться к нулю при $s \to \infty$ быстрее любой степени s^{-1}, и лишь при этом условии будут иметь решения следующие уравнения системы. Используя общее решение (1.7), полученное в работе [1], и производя элементарные, но довольно громоздкие вычисления, находим для C величину, приблизительно равную 723.

Теперь можно вычислить φ_1' по формуле

$$\varphi_1' = C\chi_3' + Q'$$

где $C \approx 723$, величина χ_3' берется из табл. 2, а Q' определяется по формуле (2.4). Результаты расчета приведены в табл. 3.

3. Для непосредственного нахождения u/V и $p_{xy}\big|_{y=0}$ необходимо установить взаимосвязь между различными переменными, которыми мы пользовались при рассмотрении работы Н. Е. Кочина.

Таблица 3

s	$\chi_3'(s)$	$Q'(s)$	$\varphi_1'(s)$
0.0	0.0000	0.000	0.000
0.2	0.1996	—0.052	143.93
0.6	0.5719	—0.517	413.16
1.0	0.8030	—1.236	580.79
1.2	0.8246	—1.561	596.19
1.4	0.7750	—1.767	560.90
1.6	0.6701	—1.826	485.20
2.2	0.2580	—1.226	186.82
2.6	0.0889	—0.687	64.27
3.2	0.0098	—0.253	7.08

Рассмотрим первое приближение. Согласно (1.3) u в параболических координатах с учетом (1.5) будет иметь следующий вид:

$$u = \frac{1}{2}\left\{\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2} f_0'(\eta) + \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} f_0(\eta)\right\} \tag{3.1}$$

Из (1.2) находим

$$\xi^2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}, \qquad \eta^2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2} \tag{3.2}$$

Переход к переменной s и функции $\varphi_0(s)$ при помощи подстановок (1.6) дает следующие соотношения:

$$f_{0\eta}' = V\varphi_{0s}', \quad \frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2} = \left[1 + \frac{4\nu^2}{V^2 y^2} s^4\right]^{-1}, \qquad \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} = \left[s\sqrt{\frac{\nu}{V}} + \frac{y^2 V^{3/2}}{4s^3 \nu^{3/2}}\right]^{-1} \tag{3.3}$$

Отношение (3.1) в силу (3.2) и (3.3) примет вид:

$$\frac{u}{V} = \frac{1}{2}\left\{\left[1 + \frac{4\nu^2}{V^2 y^2} s^4\right]^{-1} \varphi_0' + \left[s\left(1 + \frac{y^2 V^2}{4s^4 \nu^2}\right)\right]^{-1} \varphi_0\right\} \tag{3.4}$$

Переменная s через x, y выражается следующим образом:

$$s = \sqrt{\frac{Vy}{2\nu}}\,\frac{1}{g(x,y)}, \qquad \left(g(x,y) = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\right) \tag{3.5}$$

Используя (3.5), получаем

$$\frac{u}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{g^2}{1+g^2}\varphi_0' + \frac{\varphi_0}{s}\,\frac{1}{1+g^2}\right) \tag{3.6}$$

В работе Н. Е. Кочина указано, что первое приближение должно мало отличаться от решения, даваемого теорией Блазиуса. Действительно, в этом случае уравнение Блазиуса в функциях φ_0 имеет вид:

$$\varphi_0''' + \varphi_0 \varphi_0'' = 0$$

с граничными условиями

$$\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0, \qquad \varphi_0'(\infty) = 2, \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{\varphi_0}{s} = 2 \tag{3.7}$$

При $x \to \infty$ величина s может принимать любое значение, что следует из (3.5):

$$s\,|_{x\to\infty} = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{V}{\nu x}} \tag{3.8}$$

Тогда

$$\frac{u}{V} = \frac{1}{2}\varphi_0' \qquad (\varphi_0' = (s\,|_{x\to\infty}))$$

Однако (3.8) показывает, что $s\,|_{x\to\infty}$ совпадает со значением безразмерной переменной η, принятой в уравнении Блазиуса.

В случае $s \to \infty$ имеем

$$\varphi_0'\Big|_{s\to\infty} = 2, \quad \frac{\varphi_0}{s}\Big|_{s\to\infty} = 2, \quad g(x,\ y)\Big|_{\substack{s\to\infty\\ y\to\infty}} = 1, \quad \frac{u}{V}\Big|_{s\to\infty} = 1 \tag{3.9}$$

Для непосредственного расчета выразим s и g через безразмерную независимую переменную $\eta = {}^1/_2\, y\sqrt{V/\nu x}$, принятую в теории пограничного слоя. В результате несложных преобразований получаем

$$s = \eta\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1+(4\eta^2\nu/xV)}}}, \qquad g^2 = \frac{Vx}{4\eta^2\nu}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\eta^2\nu}{Vx}}\right) \tag{3.10}$$

Величина $4\eta^2\nu/Vx$ в пограничном слое мала. Поэтому (3.10) значительно упрощаются:

$$s \approx \frac{\eta}{1+{}^1/_2\,\eta^2\nu/Vx}, \qquad g^2 \approx \frac{Vx}{\eta^2\nu}\left(1+\frac{2\eta^2\nu}{Vx}\right) \tag{3.11}$$

Из (3.11) видно, что при больших x величина s практически совпадает с η, а g^2 становится большим.

Вычисления по формуле (3.6) были произведены[1] с учетом, что s и g^2 берутся согласно (3.11). При этом $x = 1$ см, $\nu = 0.15$ см^2/сек, $V = 800$ см/сек. Результаты расчетов приведены в табл. 4.

Таблица 4

η	$\varphi_0' = \frac{u}{v}$	s (3.11)	φ_0	$\frac{\varphi_0}{s}$	g^2(3.11)	$\frac{\varphi_0}{s}\frac{1}{1+g^2}$	$\frac{\varphi_0' g^2}{1+g^2}$	$\frac{u}{v}$ (3.6)
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	$\sim\infty$	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	0.2647	0.4000	0.1663	0.4180	10002	0.0000	0.2647	0.2647
0.8	0.5168	0.8000	0.3460	0.4331	5002	0.0001	0.5169	0.5170
1.2	0.7290	1.2000	0.5875	0.4900	5001	0.0001	0.7290	0.7291
1.6	0.8761	1.6000	0.9186	0.5740	3002	0.0002	0.8760	0.8762
2.0	0.9555	2.0000	1.2908	0.6450	2502	0.0003	0.9554	0.9557
2.4	0.9878	2.3991	1.6822	0.7020	2050	0.0004	0.9877	0.9881
2.8	0.9975	2.7992	2.0802	0.7440	1660	0.0004	0.9974	0.9978
3.0	0.9990	2.9991	2.2799	0.7620	1660	0.0005	0.9988	0.9993

[1] Вычисления в первом и втором приближениях произведены совместно с И. Е. Тараповым.

Из второй и последней колонки табл. 4 видно, что при $x = 1$ см кривая распределения скоростей, рассчитанная по (3.6), и кривая, вычисленная по теории Блазиуса, почти совпадают, имея отличие только в пятом знаке.

Рассмотрим второе приближение. При этом $\psi(\xi, \eta)$ из (1.5) запишется так:

$$\psi = \xi_0 f_0(\eta) + \frac{1}{\xi} f_1(\eta)$$

Скорость u имеет вид:

$$u = \frac{1}{2(\xi^2 + \eta^2)}\left(\eta f_0 + \xi^2 f_0' - \frac{\eta}{\xi^2} f_1 + f_1'\right) \tag{3.12}$$

Функции f_1 и f_1' в переменных s через φ_1 и φ_1' запишутся так:

$$f_1 = \sqrt{\nu V}\,\frac{\nu}{V}\,\varphi_1(s), \qquad f_1' = \nu\varphi_1'(s) \tag{3.13}$$

Простые, но весьма громоздкие преобразования приводят (3.12) к такому виду:

$$\frac{u}{V} = \frac{1}{2}\left\{\frac{g^2}{1+g^2}\left(\varphi_0' + \frac{2\nu}{Vy}\varphi_1'\right) + \frac{1}{1+g^2}\left(\frac{\varphi_0}{s} - \frac{2\nu}{Vy}\frac{\varphi_1}{s}\right)\right\} \tag{3.14}$$

Значения u/V, вычисленные по формуле (3.14) при $\nu = 0.15$ см²/сек, $V = 800$ см/сек, для значения $x = 1.2$, 2.5, 4.7 см приведены в табл. 5 (при вычислении значение φ_1' бралось из табл. 3).

Таблица 5

x	$\eta = 0.4$	0.8	1.2	1.6	2.0	2.5	2.8	3.2	4.0	5.0
1.2 см	0.261	0.426	0.548	0.651	0.742	0.811	0.858	0.901	0.956	0.994
2.5 см	0.205	0.360	0.497	0.601	0.698	0.777	0.836	0.882	0.955	0.993
4.7 см	0.176	0.322	0.454	0.598	0.670	0.761	0.831	0.878	0.956	0.993

Из табл. 5 видно, что второе приближение в решении задачи Н. Е. Кочина дает для u/V набор профилей скоростей в зависимости от расстояния x до переднего края пластинки.

В работе Альдена [2], который решал эту задачу другим методом, также получен набор профилей скоростей в зависимости от x.

Из уравнений Навье-Стокса можно определить также $\rho^{-1}(\partial p/\partial y)$. После отбрасывания членов порядка R_x^{-2} и $R_x^{-2/3}$ получаем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{V^2}{4\sqrt{R_x}}\left\{\varphi_0'' + \frac{s\varphi_0''}{2} + \varphi_0'\varphi_0 + s\varphi_0(\varphi_0' - \varphi_0)\right\} \tag{3.15}$$

Отклонение давления от давления свободного потока очень мало, за исключением области вблизи переднего края пластинки. Как показал расчет, при $R_x = 100$ это отклонение меньше чем 1%.

Поступила 30 XI 1953

Харьковский государственный педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Собр. соч., т. II, Изд. АН СССР, 1949.
2. Alden H. L. Second approximation to the laminar boundary layer flow over a flat plate. J. of Math. a. Phys., vol. XXVII, 1948.
3. Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. Phys., Bd. 56, 1908.