

БИГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ДИССИПАТИВНОЙ
НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ
ИЛИ ПОДДЕРЖИВАЕМЫЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ
ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛОЙ

А. М. Кац

(Ленинград)

1. Постановка задачи. Объектом исследования, проводимого в этой работе, является простейшая нелинейная система, уравнение движения которой имеет вид:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x + x^3 = R \sin m\omega t \quad (1.1)$$

где x — координата, t — время, k , R и ω — положительные постоянные, m — целое число.

Простейшие колебания такой системы, приближенно представляемые формулой

$$x = A \sin(m\omega t + \varphi) \quad (1.2)$$

хорошо изучены (см., например, работу [4]).

Займемся разысканием и исследованием колебаний более сложного вида, приближенно представляемых формулой

$$x = C + A \sin(m\omega t + \varphi) + B \sin(n\omega t + \psi) \quad (1.3)$$

где C , A , B , φ , ψ — постоянные, n — целое число, взаимно простое с m . Условимся называть их колебаниями вида (n/m) .

Для нахождения указанных постоянных воспользуемся методом Б. Г. Галеркина (примененным для разыскания решения вида (1.2) в работе [2]). Именно, представим выражение (1.3) для x в несколько другой форме:

$$x = Cf_1 + a_1f_2 + a_2f_3 + b_1f_4 + b_2f_5$$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \sin m\omega t, \quad f_3 = \cos m\omega t, \quad f_4 = \sin n\omega t, \quad f_5 = \cos n\omega t \quad (1.4)$$

$$a_1 = A \cos \varphi, \quad a_2 = A \sin \varphi, \quad b_1 = B \cos \psi, \quad b_2 = B \sin \psi$$

и подставим его в систему уравнений

$$\int_0^{2\pi/\omega} (\ddot{x} + k\dot{x} + x + x^3 - R \sin m\omega t) f_r dt = 0 \quad (r=1, 2, 3, 4, 5) \quad (1.5)$$

из которой и должны быть найдены C , a_1 , a_2 , b_1 и b_2 .

Заметим, что левые части уравнений (1.5) с точностью до постоянных множителей представляют некоторые коэффициенты Фурье функции

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = \ddot{x} + k\dot{x} + x + x^3 - R \sin m\omega t \quad (1.6)$$

а именно, постоянный член тригонометрического ряда, коэффициенты членов, имеющих частоту $m\omega$, и коэффициенты членов, имеющих частоту $n\omega$. Поэтому вместо вычисления интегралов (1.5) проще подставить выражение (1.3) в $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$, выделить указанные члены и приравнять их коэффициенты нулю. Выполняя подстановку, получим

$$\begin{aligned} F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = & C \left(1 + \frac{3}{2} A^2 + \frac{3}{2} B^2 + C^2 \right) + \\ & + A \left(1 - m^2 \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 + \frac{3}{2} B^2 + 3C^2 \right) \sin(m\omega t + \varphi) + km\omega A \cos(m\omega t + \varphi) + \\ & + B \left(1 - n^2 \omega^2 + \frac{3}{2} A^2 + \frac{3}{4} B^2 + 3C^2 \right) \sin(n\omega t + \psi) + kn\omega B \cos(n\omega t + \psi) - \\ & - \frac{3}{2} A^2 C \cos(2m\omega t + 2\varphi) - \frac{3}{2} B^2 C \cos(2n\omega t + 2\psi) - \\ & - \frac{1}{4} A^3 \sin(3m\omega t + 3\varphi) - \frac{1}{4} B^3 \sin(3n\omega t + 3\psi) - \\ & - 3ABC \cos[(m+n)\omega t + \varphi + \psi] + 3ABC \cos[(m-n)\omega t + \varphi - \psi] - \\ & - \frac{3}{4} A^2 B \sin[(2m+n)\omega t + 2\varphi + \psi] + \frac{3}{4} A^2 B \sin[(2m-n)\omega t + 2\varphi - \psi] - \\ & - \frac{3}{4} AB^2 \sin[(m+2n)\omega t + \varphi + 2\psi] - \frac{3}{4} AB^2 \sin[(m-2n)\omega t + \varphi - 2\psi] - \\ & - R \cos \varphi \sin(m\omega t + \varphi) + R \sin \varphi \cos(m\omega t + \varphi) \quad (1.7) \end{aligned}$$

Полученное выражение содержит члены с «основными» частотами 0 , $m\omega$, $n\omega$ и с «комбинационными» частотами

$$\begin{aligned} 2m\omega, 2n\omega, 3m\omega, 3n\omega, (m+n)\omega, |m-n|\omega, (2m+n)\omega \\ |2m-n|\omega, (m+2n)\omega, |m-2n|\omega \end{aligned}$$

Если ни одна из комбинационных частот не равна ни одной из основных, то уравнения (1.5) принимают вид:

$$\begin{aligned} C \left(1 + \frac{3}{2} A^2 + \frac{3}{2} B^2 + C^2 \right) &= 0 \\ A \left(1 - m^2 \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 + \frac{3}{2} B^2 + 3C^2 \right) - R \cos \varphi &= 0 \\ km\omega A + R \sin \varphi &= 0 \\ B \left(1 - n^2 \omega^2 + \frac{3}{2} A^2 + \frac{3}{4} B^2 + 3C^2 \right) &= 0 \\ kn\omega B &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Эти уравнения приводятся к следующим:

$$B = C = 0, \quad A \left(1 - m^2 \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 \right) = R \cos \varphi, \quad km\omega A = -R \sin \varphi \quad (1.9)$$

Это — известные уравнения для нахождения коэффициентов приближенного решения вида (1.2). Напомним кстати, что для свободных колебаний ($R = 0$) они дают

$$1 + \frac{3}{4} A^2 = (m\omega)^2 \quad (1.10)$$

Новые результаты получаются, если некоторые комбинационные частоты совпадают с основными. Это возможно только в следующих четырех случаях:

- (1) $m = 1, n = 3, 3m = n, |2m - n| = m$
- (2) $m = 3, n = 1, 3n = m, |m - 2n| = n$
- (3) $m = 1, n = 2, 2m = n, |m - n| = m, |2m - n| = 0$
- (4) $m = 2, n = 1, 2n = m, |m - n| = n, |m - 2n| = 0$

При этом в первых двух случаях ни одна из комбинационных частот не равна нулю, поэтому первое уравнение (1.7) остается в силе и, следовательно, $C = 0$. Рассмотрим последовательно все четыре случая.

2. Колебания вида $(3/1)$ ($m = 1, n = 3$). Ищем приближенное решение уравнения

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x + x^3 = R \sin \omega t \tag{2.1}$$

имеющее вид:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) + B \sin(3\omega t + \psi) \tag{2.2}$$

Подставляя в выражение (1.7) $C = 0, m = 1, n = 3$ и приравнивая нулю коэффициенты гармоник с частотами ω и 3ω , получаем четыре уравнения:

$$\begin{aligned} A [1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 + \frac{3}{2} B^2 - \frac{3}{4} AB \cos(3\varphi - \psi)] &= R \cos \varphi \\ k\omega A + \frac{3}{4} A^2 B \sin(3\varphi - \psi) &= -R \sin \varphi \\ B(1 - 9\omega^2 + \frac{3}{2} A^2 + \frac{3}{4} B^2) - \frac{1}{4} A^3 \cos(3\varphi - \psi) &= 0 \\ 3k\omega B - \frac{1}{4} A^3 \sin(3\varphi - \psi) &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Вводим обозначения

$$\beta = \frac{B}{A}, \quad \gamma = 3\varphi - \psi \tag{2.4}$$

Тогда уравнения (2.3) переписываются так:

$$\begin{aligned} A(1 - \omega^2) + \frac{3}{4} A^3(1 - \beta \cos \gamma + 2\beta^2) &= R \cos \varphi \\ k\omega A + \frac{3}{4} A^3 \beta \sin \gamma &= -R \sin \varphi \\ A\beta(1 - 9\omega^2) - \frac{1}{4} A^3(\cos \gamma - 6\beta - 3\beta^3) &= 0 \\ 3k\omega A\beta - \frac{1}{4} A^3 \sin \gamma &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Рассмотрим сперва систему без трения ($k = 0$). Тогда

$$\sin \gamma = \sin \varphi = 0 \tag{2.6}$$

Вместо того чтобы считать, что γ и φ могут быть равны нулю или 180° , примем, что $\gamma = \varphi = 0$, но A и B могут быть как положительными, так и отрицательными. При этом условии получаем

$$\begin{aligned} A(1 - \omega^2) + \frac{3}{4} A^3(1 - \beta + 2\beta^2) &= R \\ \beta(1 - 9\omega^2) - \frac{1}{4} A^2(1 - 6\beta - 3\beta^3) &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Исключив из этих уравнений ω , находим

$$\frac{8}{9} A \left(1 + \frac{1 + 21\beta - 27\beta^2 + 51\beta^3}{32\beta} A^2 \right) = R \quad (2.8)$$

Из второго уравнения (2.7)

$$\omega^2 = \frac{1}{9} + A^2 \left(-\frac{1}{36\beta} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \beta^2 \right) \quad (2.9)$$

В таком виде уравнения (2.7) допускают довольно простой ход решения: задаемся значением β , из (2.8) определяем A , а затем ω из (2.9).

Уравнение (2.8) удобно решать графически. Для этого представляем его в следующем виде:

$$A^3 = -\frac{1}{N(\beta)} \left(A - \frac{9}{8} R \right) \quad (2.10)$$

где

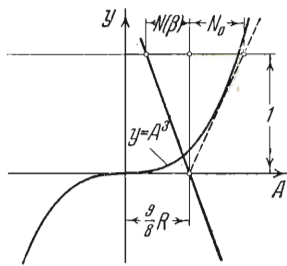
$$N(\beta) = \frac{1 + 21\beta - 27\beta^2 + 51\beta^3}{32\beta} \quad (2.11)$$

и ищем точки пересечения кубической параболы

$$y = A^3 \quad (2.12)$$

с прямой

$$y = -\frac{1}{N(\beta)} \left(A - \frac{9}{8} R \right) \quad (2.13)$$



Фиг. 1.

Такое построение схематически показано на фиг. 1. На фиг. 2 изображен график функции $N(\beta)$.

Значениям $N(\beta) > 0$ и $N(\beta) < -N_0$ соответствует по одному значению A , а значениям в интервале $0 > N(\beta) > -N_0$ — по три значения A .

При малых положительных значениях β величина ω из (2.9) получается мнимой. Все остальные значения β дают действительные A и ω .

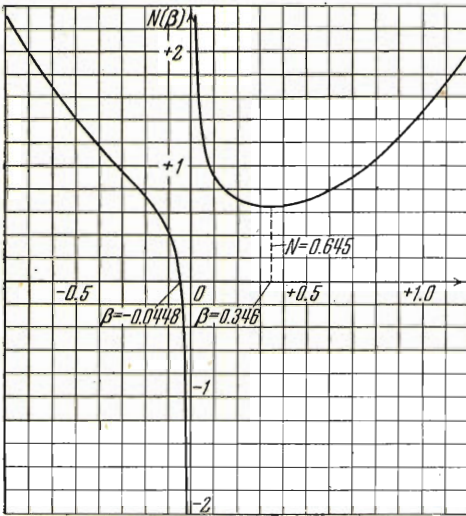
На фиг. 3 изображены схематически кривые (2.12), $N(\beta)$, $A(\omega)$ и $B(\omega)$ с указанием участков, одновременно пробегаемых на них соответствующими точками при изменении β .

На фиг. 4 и 5 изображены кривые $A(\omega)$ и $B(\omega)$, полученные в результате вычислений для примера $R = 0.5$:

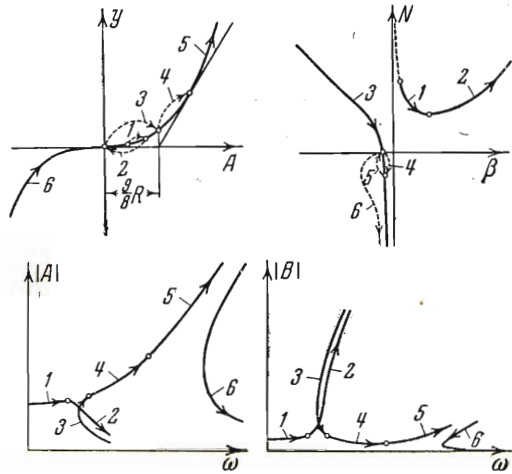
$$\ddot{x} + x + x^3 = 0.5 \sin \omega t, \quad x = A \sin \omega t + B \sin 3\omega t$$

Мы видим, что решение (2.2) имеет ветви, на которых оно мало отличается от синусоидального, и, кроме того, две особенные ветви, отвечающие при значениях частоты возмущающей силы, несколько превосходящих $1/3$ собственной частоты малых колебаний системы. На этих ветвях при увеличении ω амплитуда первой гармоники $|A|$ уменьшается, стремясь к нулю, а амплитуда третьей гармоники $|B|$ растет до ∞ . Разумеется, как мы покажем ниже, влияние трения ограничивает рост $|B|$. Тем не менее в определенной области частот величина $|B|$ может быть довольно-

большой, так что движение сильно отличается от синусоидального. При изменении ω третья гармоника должна резко (при достаточно малых

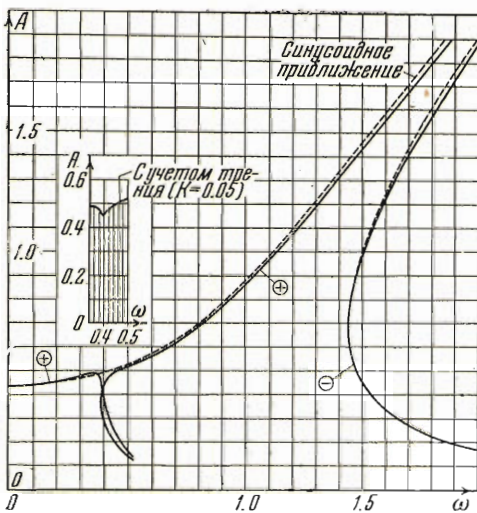


Фиг. 2

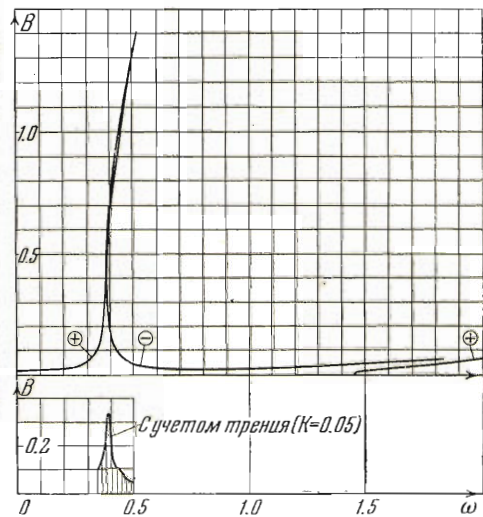


Фиг. 3

k — скачком) менять свою величину и фазу, переходя с одной ветви резонансной кривой на другую. Таким образом, обнаруженное явление можно охарактеризовать как «нелинейный резонанс третьей гармоники



Фиг. 4



Фиг. 5

колебания», по характеру похожий на основной, причем при достаточно малом трении здесь должно иметь место явление «срыва третьей гармоники».

Для дальнейшего выяснения характера движения в области «резонанса третьей гармоники» выведем приближенные формулы для случая $|B| \gg |A|$.

Из (2.7) получим, пренебрегая членами $1-\beta$ и $1-6\beta$ в скобках:

$$1 + \frac{3}{4}B^2 = (3\omega)^2, \quad A = \frac{R}{17\omega^2 - 1} \quad (2.14)$$

Вспомянув формулу (1.9) для частоты свободных колебаний, видим, что рассматриваемое движение приблизительно является суммой свободных колебаний $B \sin 3\omega t$, амплитуда которых определяется их частотой 3ω , и слабых дополнительных колебаний $A \sin \omega t$ с амплитудой, пропорциональной возмущающей силе R .

Переходим к рассмотрению системы с трением ($k > 0$).

Преобразуем систему уравнений (2.5), для чего выразим из последнего уравнения A^2 :

$$A^2 = \frac{12k\omega\beta}{\sin \gamma} \quad (2.15)$$

и подставим в третье. Получим

$$(9\omega^2 - 1) \sin \gamma + 3k\omega \cos \gamma = 9k\omega\beta (2 + \beta^2) \quad (2.16)$$

Введя обозначение

$$\frac{3k\omega}{9\omega^2 - 1} = \operatorname{tg} \delta \quad (0 < \delta < \pi) \quad (2.17)$$

можно представить уравнение (2.16) в таком виде:

$$\sin(\gamma + \delta) = 3\beta(2 + \beta^2) \sin \delta \quad (2.18)$$

Воспользовавшись (2.15), представим второе уравнение (2.5) в следующей форме:

$$k\omega A (1 + 9\beta^2) = -R \sin \varphi \quad (2.19)$$

Выпишем в окончательном виде полученную систему уравнений, куда войдут (2.17), (2.18), (2.19), (2.15) и первое уравнение (2.5):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{3k\omega}{9\omega^2 - 1} \quad (0 < \delta < \pi) \\ \sin(\gamma + \delta) &= 3\beta(2 + \beta^2) \sin \delta \quad (0 < \gamma < \pi) \\ A^2 &= \frac{12k\omega\beta}{\sin \gamma} \\ R \cos \varphi &= A(1 - \omega^2) + \frac{3}{4}A^3(1 - \beta \cos \gamma + 2\beta^2) \\ -R \sin \varphi &= k\omega A(1 + 9\beta^2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Рассмотрим сперва те области, где полученное решение мало отличается от даваемого синусоидальным приближением. Примем, что k мало, $\omega \neq 1/3$ и β мало. Тогда $\operatorname{tg} \delta$ и $\sin \delta$ малы

$$\begin{aligned} \sin(\gamma + \delta) \approx 0, \quad \sin \gamma \approx \sin \delta &= \frac{3k\omega}{\sqrt{(9\omega^2 - 1)^2 + (3k\omega)^2}} \\ \beta &= \frac{A^2}{4\sqrt{(9\omega^2 - 1)^2 + (3k\omega)^2}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

и окончательно, если пренебречь величиной β в двух последних уравнениях (2.20);

$$A(1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2) = R \cos \varphi, \quad B = \frac{A^3}{4} \frac{1}{\sqrt{(9\omega^2 - 1) + (3k\omega)^2}} \quad (2.22)$$

$$k\omega A = -R \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{3k\omega}{9\omega^2 - 1} \quad (0 < \gamma < \pi)$$

Таким образом, полученное приближенное решение есть сумма точного решения $A \sin(\omega t + \varphi)$ уравнения

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x + x^3 = R \sin \omega t - \frac{1}{4} A^3 \sin(3\omega t + 3\varphi) \quad (2.23)$$

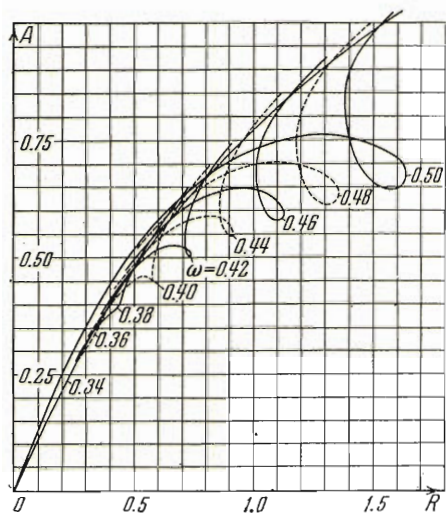
[это точное решение совпадает с синусоидальным приближением для уравнения (2.4)] и решения линейного уравнения

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x = \frac{1}{4} A^3 \sin(3\omega t + 3\varphi) \quad (2.24)$$

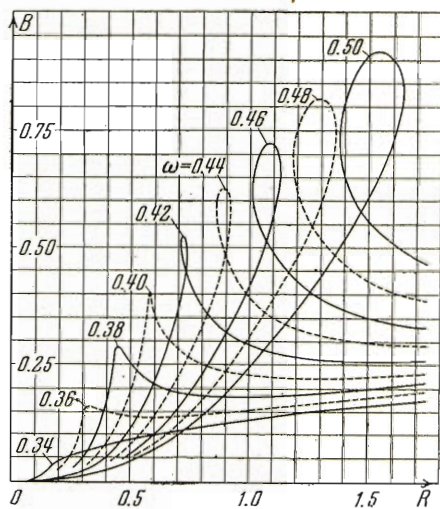
где в правой части как раз стоит сила, «недостающая» в уравнении (2.23) по сравнению с исходным уравнением (2.1).

Мы получили решение такого типа, который Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [1] называют «улучшенным первым приближением».

Для исследования области резонанса третьей гармоники надо пользоваться более общими формулами (2.20).



Фиг. 6



Фиг. 7

Мы провели по этим формулам расчет примера, в котором значение k было принято равным 0.05, а ω изменялась от 0.34 до 0.50. Задаваясь значениями ω и β , мы по формулам (2.20) последовательно определяли δ , γ , A , B , R . Подсчеты были произведены для 100 различных режимов колебаний. По результатам вычислений были построены кривые $A(R)$ и $B(R)$ при различных постоянных значениях, изображенные на фиг. 6 и 7.

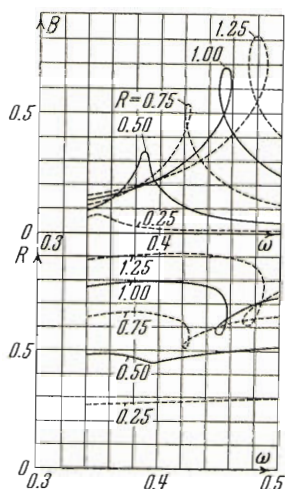
При этом для ясности чертежа на фиг. 6 только кривые для $\omega = 0.34$ и $\omega = 0.50$ нанесены полностью, у остальных же ветви, лежащие очень близко к указанным двум крайним кривым и переплетающиеся друг с другом, оборваны.

На основании фиг. 6 и 7 при помощи еще некоторых вспомогательных интерполяционных кривых построены на фиг. 7 кривые зависимостей $A(\omega)$ и $B(\omega)$ при различных постоянных значениях R .

Кривые для $R = 0.5$ перенесены на фиг. 4 и 5, которые построены для того же значения R , но без учета трения. Сопоставление кривых для систем без трения и с трением показывает, что влияние трения сводится к срезанию уходящих в бесконечность ветвей кривых, тогда как уже в небольшом отдалении от вершущек получившихся «резонансных кривых» трение весьма мало влияет на величины амплитуд.

Отметим, что для выбранных в примере значений $R = 0.5$, $k = 0.05$ отклонение закона движения от синусоидального при проходе через «резонанс третьей гармоники» значительно. С точки же зрения опасности больших колебаний этот резонанс совершенно несущественен.

На фиг. 8 «резонансные кривые» третьей гармоники при небольших значениях R похожи на обычные кривые резонанса линейной системы. Напротив, при больших значениях R они имеют необычную петлеобразную форму. По аналогии с резонансными кривыми синусоидального приближения можно полагать, что точки кривых с вертикальными касательными, т. е. такие, в которых $\partial A / \partial \omega = \infty$, $\partial B / \partial \omega = \infty$, разделяют устойчивые и неустойчивые участки и, следовательно, верхние половины петель неустойчивы. Этот вопрос, конечно, требует особого исследования.



Фиг. 8

В заключение рассмотрим случай сильного «резонанса третьей гармоники», когда k мало и $B \gg A$. Из (2.3) имеем

$$\varphi \approx 0$$

$$R \approx A \left(1 - \omega^2 + \frac{3}{2} B^2 \right), \quad (3\omega)^2 \approx 1 + \frac{3}{4} B^2, \quad A^3 \sin \gamma = 12k\omega B \quad (2.25)$$

Третье уравнение опять показывает, что колебания близки к свободным, имеющим частоту 3ω . Для определения области существования колебаний подставим A и B из четвертого и третьего уравнений (2.20) во второе. Получим

$$R = \sqrt[3]{\frac{k}{\sin \gamma}} [2(17\omega^2 - 1) \sqrt[6]{3\omega^2(9\omega^2 - 1)}] \quad (2.26)$$

В квадратных скобках стоит возрастающая функция от ω . При данных R и k она может принять наибольшее значение, когда $\gamma = 1/2\pi$. Это максимальное значение, а значит, и величина ω для границы области существования рассматриваемых колебаний зависит от отношения R^3/k .

Назовем колебаниями s -й степени такие колебания, область существования которых (а стало быть и положение резонансных вершущек) при достаточно малых R и k определяется величиной R^s/k . Колебания, представляемые приближенным решением (1.2), — первой степени, тогда как только что рассмотренные колебания вида $(1/3)$ — третьей степени.

3. Колебания вида $(1/3)$ ($m = 3, n = 1$). Ищем приближенное решение уравнения

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x + x^3 = R \sin 3\omega t \quad (3.1)$$

имеющее вид:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) + B \sin(3\omega t + \psi) \quad (3.2)$$

(при этом в формулах раздела 1 нужно заменить A и φ на B и ψ , и наоборот). Аналогично тому, как были получены формулы (2.3), находим

$$A [1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 + \frac{3}{2} B^2 - \frac{3}{4} AB \cos(3\varphi - \psi)] = 0$$

$$A [k\omega + \frac{3}{4} AB \sin(3\varphi - \psi)] = 0$$

$$B (1 - 9\omega^2 + \frac{3}{2} A^2 + \frac{3}{4} B^2) - \frac{1}{4} A^3 \cos(3\varphi - \psi) = R \cos \psi$$

$$3k\omega B - \frac{1}{4} A^3 \sin(3\varphi - \psi) = -R \sin \psi \quad (3.3)$$

Прежде всего видно, что искомое решение разбивается на два. Одно из них есть

$$A = 0, \quad B (1 - 9\omega^2 + \frac{3}{4} B^2) = R \cos \psi, \quad 3k\omega B = -R \sin \psi \quad (3.4)$$

Это не что иное, как синусоидальное приближение [ср. формулы (1.8)]. Другое решение получим, если сократим первые два уравнения (3.3) на множитель A . Сделаем это и введем обозначения

$$\beta = \frac{B}{A}, \quad \gamma = \psi - 3\varphi \quad (3.5)$$

Тогда уравнения (3.3) переписутся так:

$$1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 (1 - \beta \cos \gamma + 2\beta^2) = 0$$

$$k\omega - \frac{3}{4} A^2 \beta \sin \gamma = 0$$

$$A\beta (1 - 9\omega^2) - \frac{1}{4} A^3 (\cos \gamma - 6\beta - 3\beta^3) = R \cos \psi$$

$$3k\omega A\beta + \frac{1}{4} A^3 \sin \gamma = -R \sin \psi \quad (3.6)$$

Рассмотрим сперва систему без трения ($k = 0$). Тогда

$$\sin \gamma = \sin \psi = 0 \quad (3.7)$$

Как и в разделе 2, полагаем $\gamma = \psi = 0$, но считаем, что A и B могут быть как положительными, так и отрицательными. Получаем

$$1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 (1 - \beta + 2\beta^2) = 0$$

$$A [\beta (1 - 9\omega^2) - \frac{1}{4} A^2 (1 - 6\beta - 3\beta^3)] = R \quad (3.8)$$

Из этих уравнений получаем окончательные расчетные формулы:

$$B^3 = -\frac{\beta^2}{N(\beta)} \left(B + \frac{1}{8} R \right), \quad \omega^2 = 1 + \frac{3}{4} B^2 \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta} + 2 \right) \quad (3.9)$$

Значения B могут быть найдены при помощи графического приема, аналогичного тому, который был указан в предыдущем параграфе.

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1. Оно невозможно, если $\omega < 1$, т. е. если частота возмущающей силы ниже, чем утроенная собственная частота малых колебаний системы. Это следует из того, что при любом β

$$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta} + 2 = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \quad (3.10)$$

2. Оно имеет одну общую точку с синусоидальным решением, которая, таким образом, является точкой разветвления. Из (3.8) при $A = 0$ получаем

$$1 - \omega^2 + \frac{3}{2} B^2 = 0, \\ B(1 - 9\omega^2 + \frac{3}{4} B^2) = R \quad (3.11)$$

Но второе уравнение как раз есть уравнение кривой $B(\omega)$ для синусоидального решения (ср. (3.4), где надо положить $A = 0$). Оба уравнения (3.11) вместе определяют одну точку, которая и будет искомым точкой разветвления.

3. Рассматриваемые колебания при достаточно малом R близки к свободным с частотой ω .

На фиг. 9 и 10 изображены кривые $A(\omega)$ и $B(\omega)$, полученные в результате вычислений для двух примеров, в которых $R = 0.5$ и $R = 1.5$. При этом верхним ветвям на фиг. 9 соответствуют нижние на фиг. 10.

На графике $B(\omega)$ штрихпунктиром нанесены линии для синусоидальных решений, которым на диаграмме $A(\omega)$ отвечает ось абсцисс ($A = 0$). Интересно отметить, что для тех значений ω , для которых $B = 0$, полученное решение является точным. Действительно,

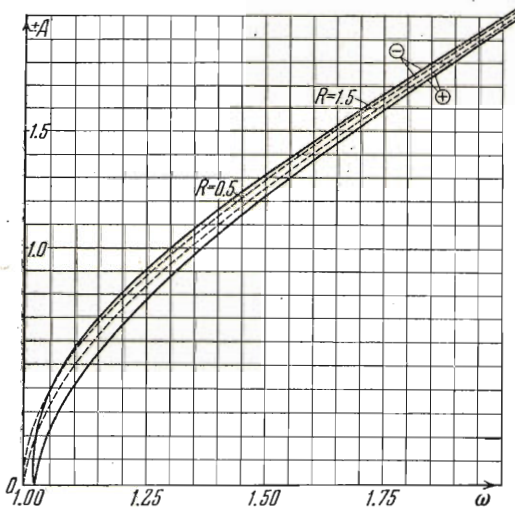
$$x = A \sin \omega t$$

есть точное решение уравнения

$$\ddot{x} + x + x^3 = -\frac{1}{4} A^3 \sin 3\omega t$$

при значении ω , равном

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{3}{4} A^2}$$



Фиг. 9

Перейдем к рассмотрению системы с трением ($k > 0$).

Преобразуя систему уравнений (3.6) аналогично тому, как мы преобразовали систему (2.5), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{k\omega}{\omega^2 - 1} & (0 < \delta < \frac{1}{2} \pi) \\ \sin(\gamma + \delta) &= \frac{1 + 2\beta^2}{\beta} \sin \delta & (0 < \gamma < \pi) \\ A^2 &= \frac{4k\omega}{3\beta \sin \gamma} \\ R \cos \psi &= A\beta(1 - 9\omega^2) - \frac{1}{4} A^3 (\cos \gamma - 3\beta - 6\beta^3) \\ -R \sin \psi &= k\omega A \frac{1 + 9\omega^2}{3\beta} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Отметим некоторые свойства этой системы.

1. Система не может быть удовлетворена при $A = 0$, т. е. решение (3.12) не имеет общих точек с синусоидальным. Это следует из второго уравнения (3.12), которое можно написать в таком виде:

$$A = \frac{4k\omega}{3B \sin \gamma} \quad (3.13)$$

2. Для каждого k существует предельное значение ω , ниже которого система (3.12) не имеет решений. Действительно, выражение $(1 + 2\beta^2)/\beta$ имеет при $\beta = 1/2 \sqrt{2}$ минимум, равный $2\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sin(\gamma + \delta) &\geq 2\sqrt{2} \sin \delta \\ \sin \delta &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{k\omega}{\omega^2 - 1} = \operatorname{tg} \delta \leq \frac{1}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} \omega^2 - \sqrt{7} k\omega - 1 &\geq 0 \\ \omega &\geq \frac{\sqrt{7}}{2} k + \sqrt{1 + \frac{7}{4} k^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

3. Пусть R и k стремятся к нулю так, что

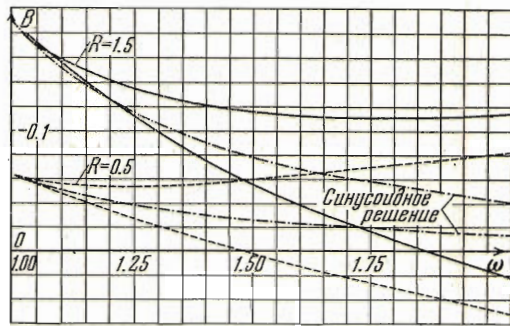
$$\frac{R}{k} = \text{const}$$

Тогда $\delta \rightarrow 0$ и при любом фиксированном $\beta \neq 0$

$$\sin \gamma \rightarrow 0, \quad \cos \gamma \rightarrow \pm 1$$

Первое и третье уравнения (3.6) переходят в следующие.

$$\begin{aligned} 1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2(1 - \beta^* + 2\beta^{*2}) &= 0 \\ \beta^*(1 - 9\omega^2) - \frac{1}{4} A^2(1 - 6\beta^* - 3\beta^{*3}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$



Фиг. 10

В уравнении (3.15) введено обозначение

$$\beta^* = \pm \beta \quad (3.16)$$

Это не что иное, как уравнения второго приближения вида (3.2) для свободных колебаний с частотой ω .

Последнее уравнение (3.12) дает

$$-\frac{R}{k} \sin \psi = \omega A \frac{1 + 9\beta^2}{3\beta} \quad (3.17)$$

где A и β — функции ω , определяемые уравнениями (3.15) и (3.16). Наименьшее значение R/k , при котором еще возможны колебания рассматриваемого вида, есть

$$\frac{R}{k} = \omega A \frac{1 + 9\beta^2}{3\beta} \quad (3.18)$$

Следовательно, эти колебания — первой степени.

Перейдем к изложению результатов численных выкладок, произведенных по уравнениям (3.12) при значении $k = 0.05$. Как и в предыдущем разделе,

мы задавались значениями ω (от $\omega_{\min} = 1.0685$, определенного по формуле (3.14), до $\omega = 1.75$) и β и определяли последовательно δ , γ , A , B и R . Подсчеты были произведены для 50 различных режимов колебаний. По результатам подсчетов были построены кривые $A(R)$ и $B(R)$ при различных постоянных значениях ω , изображенные на фиг. 11 и 12. Так как, однако, на этих графиках общий характер кривых не полностью выявлен, то рассмотрим его подробнее.

Из второго уравнения (3.12) видно, что при данных k и ω (а следовательно, при определенном δ) β может принимать значения, лежащие в ограниченной области, именно между корнями уравнения

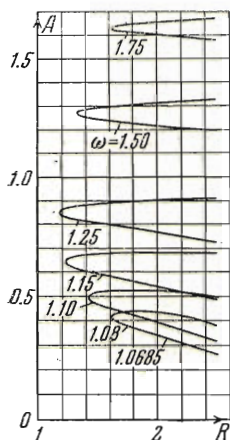
$$2\beta^2 - \frac{1}{\sin \delta} \beta + 1 = 0 \quad (3.19)$$

и не может равняться нулю. Из того же уравнения следует, что

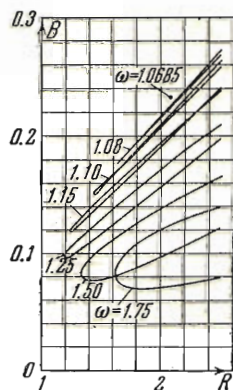
$$\sin \gamma \geq (2\sqrt{2} - \cos \gamma) \operatorname{tg} \delta > 0$$

Поэтому A , B и R конечны. Следовательно, кривые $A(R)$ и $B(R)$ занимают ограниченные области и потому замкнуты.

На фиг. 13 изображена схематически общая картина кривых $A(R)$ при $k = \text{const}$. Жирным прямоугольником выделена область, попавшая на фиг. 11. Мы видим, что при каждом значении ω колебания возможны, если R не больше и не меньше определенных предельных значений, т. е., выражаясь языком радиотехников, существуют «порог» и «потолок»



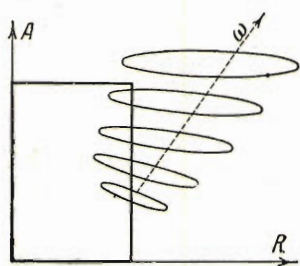
Фиг. 11



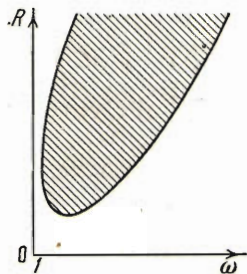
Фиг. 12

возбуждения. Зависимость предельных R от ω изображена схематически на фиг. 14.

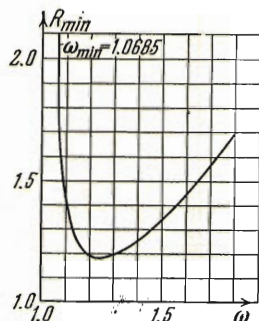
Область, в которой колебания рассматриваемого типа возможны, заштрихована. На фиг. 15 изображена уже в масштабе нижняя ветвь пре-



Фиг. 13



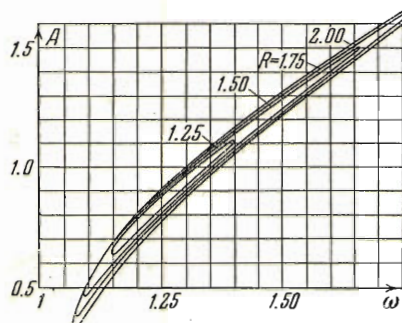
Фиг. 14



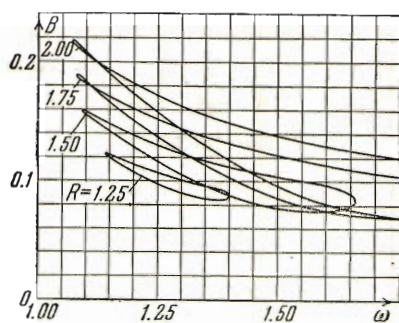
Фиг. 15

дельной кривой $R(\omega)$, построенная на основании фиг. 11 и 12, при $k = 0.05$.

На основании тех же графиков на фиг. 16 и 17 построены кривые $A(\omega)$ и $B(\omega)$ для различных постоянных значений R (от $R = 1.25$ до $R = 2.00$).



Фиг. 16



Фиг. 17

Значение $R = 1.18$ есть «абсолютный порог возбуждения», т. е. при меньших R колебания рассматриваемого типа не могут существовать ни при каких значениях ω .

Заметим, что кривые фиг. 16 и 17 для $R = 1.5$ лежат целиком внутри соответствующих кривых для системы без трения (фиг. 11 и 12).

4. Колебания вида $(2/1)$ ($m = 1, n = 2$). Ищем приближенное решение уравнения

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x + x^3 = R \sin \omega t \tag{4.1}$$

имеющее вид:

$$x = C + A \sin(\omega t + \varphi) + B \sin(2\omega t + \psi) \tag{4.2}$$

Подставляя в выражение (1.7) $m = 1$, $n = 2$ и приравнявая нулю коэффициенты гармоник с частотами 0, ω и 2ω , получаем пять уравнений:

$$\begin{aligned} C(1 + \frac{3}{2}A^2 + \frac{3}{2}B^2 + C^2) + \frac{3}{4}A^2B \sin(2\varphi - \psi) &= 0 \\ A[1 - \omega^2 + \frac{3}{4}A^2 + \frac{3}{2}B^2 + 3C^2 + 3BC \sin(2\varphi - \psi)] &= R \cos \varphi \\ A[k\omega + 3BC \cos(2\varphi - \psi)] &= -R \sin \varphi \\ B(1 - 4\omega^2 + \frac{3}{2}A^2 + \frac{3}{4}B^2 + 3C^2) + \frac{3}{2}A^2C \sin(2\varphi - \psi) &= 0 \\ 2k\omega B - \frac{3}{2}A^2C \cos(2\varphi - \psi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Заметим прежде всего, что уравнения (4.3) удовлетворяются, если положить

$$B = C = 0, \quad A(1 - \omega^2 + \frac{3}{4}A^2) = R \cos \varphi, \quad k\omega A = -R \sin \varphi \quad (4.4)$$

Это — уравнения синусоидального приближения, которые, таким образом, дают часть ветвей общего решения уравнений (4.3). Это решение имеет, однако, еще и ветви, на которых B и C не равны нулю.

Рассмотрим случай системы без трения ($k = 0$). Тогда из последнего уравнения (4.3) следует, что либо

$$C = 0 \quad (4.5)$$

либо

$$2\varphi - \psi = \pm \frac{1}{2} \pi \quad (4.6)$$

Рассмотрим поочередно эти два случая.

1. $C = 0$. Из первого и третьего уравнений (4.3) следует, что $\sin \varphi = \sin \psi = 0$. Примем, что $\varphi = \psi = 0$, но A и B могут быть положительными и отрицательными. Получаем из (4.3), считая, что $B \neq 0$:

$$A(1 - \omega^2 + \frac{3}{4}A^2 + \frac{3}{2}B^2) = R, \quad 1 - 4\omega^2 + \frac{3}{2}A^2 + \frac{3}{4}B^2 = 0 \quad (4.7)$$

Умножив второе уравнение на $1/2 A$ и вычтя из первого, получим

$$A(\frac{1}{2} + \omega^2 + \frac{9}{8}B^2) = R \quad (4.8)$$

Отсюда следует, что $A > 0$. Исключая B из уравнений (4.7), получим

$$A(7\omega^2 - 1 - \frac{9}{4}A^2) = R \quad (4.9)$$

Это уравнение показывает, что каждому значению A отвечает одно значение ω , т. е. уравнения (4.7) представляют одну ветвь решения, но ветвь двойную, так как B при данных R и A может иметь два значения, различающихся знаками.

Точка этой ветви, для которой $B = 0$, лежит на кривой $A(\omega)$ для синусоидального решения. Действительно, полагая в (4.7) $B = 0$, имеем

$$A(1 - \omega^2 + \frac{3}{4}A^2) = R, \quad 1 - 4\omega^2 + \frac{3}{2}A^2 = 0 \quad (4.10)$$

Эти уравнения определяют точку разветвления, принадлежащую одновременно решению (4.7) и синусоидальному.

2. $2\varphi - \psi = \pm 1/2\pi$. Из третьего уравнения (4.7) следует, что $\sin \varphi = 0$. Примем, что $\varphi = 0$, $\psi = 1/2\pi$, но A и B могут быть положительными и отрицательными. Тогда из (4.7) получаем

$$\begin{aligned} C(1 + \frac{3}{2}A^2 + \frac{3}{2}B^2 + C^2) - \frac{3}{4}A^2B &= 0 \\ A(1 - \omega^2 + \frac{3}{4}A^2 + \frac{3}{2}B^2 + 3C^2 - 3BC) &= R \\ B(1 - 4\omega^2 + \frac{3}{2}A^2 + \frac{3}{4}B^2 + 3C^2) - \frac{3}{2}A^2C &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из первого уравнения следует, что B и C всегда имеют одинаковые знаки и

$$\frac{C}{B} < \frac{1}{2}$$

Умножив третье уравнение на $A/2B$ и вычтя его из второго, получим

$$A\left(\frac{1}{2} + \omega^2 + \frac{9}{8}B^2 + \frac{3}{2}C^2 - 3BC + \frac{3A^2C}{4B}\right) = R \quad (4.12)$$

Замечая, что

$$\frac{9}{8}B^2 + \frac{3}{2}C^2 - 3BC = \frac{3}{2}[(B-C)^2 - (\frac{1}{2}B)^2] > 0$$

убеждаемся в том, что всегда $A > 0$.

Числовые вычисления показывают, что уравнения (4.11) также дают одну ветвь решения. Эта ветвь также двойная, так как уравнения (4.11) не меняются при одновременной замене B на $-B$ и C на $-C$.

Точка этой ветви, для которой $B = C = 0$, лежит на кривой $A(\omega)$ для синусоидального решения. Действительно, полагая в (4.11) $B \rightarrow 0$, $C \rightarrow 0$, имеем из первого уравнения

$$\lim \frac{C}{B} = \frac{3/4 A^2}{1 + 3/2 A^2} \quad \text{при } B \rightarrow 0, C \rightarrow 0 \quad (4.13)$$

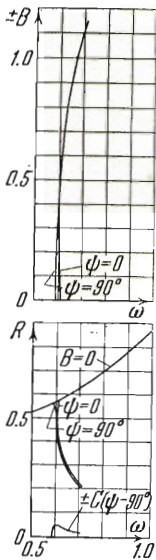
Разделив третье уравнение на B и переходя к пределу, получим

$$\begin{aligned} A(1 - \omega^2 + \frac{3}{4}A^2) &= R \\ 1 - 4\omega^2 + \frac{3}{2}A^2 \frac{1 + 3/4 A^2}{1 + 3/2 A^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Эти уравнения определяют точку разветвления, принадлежащую одновременно решению (4.11) и синусоидальному.

Для выяснения характера решений (4.7) и (4.11) были проделаны численные расчеты (для значения $R = 0.5$). Определение величин ω и B по заданным R и A из уравнений (4.7) весьма просто. Напротив, уравнения (4.11) представляют некоторую трудность для решения. Они были решены подбором числовых значений, несколько облегчавшимся благодаря малости C . Результаты вычислений изображены на фиг. 18, построенной в том же масштабе, что и фиг. 6. Как мы видим, полученные «резонансные кривые» $A(\omega)$ и $B(\omega)$ очень похожи на те, которые мы имели для «резонанса третьей гармоники» (фиг. 6 и 7), с той лишь разницей, что в рассматриваемом случае обе ветви кривой $B(\omega)$ начинаются на границах «области возбуждения» данного вида колебаний от значения $B = 0$.

Исследование колебаний системы с трением ($k > 0$) по уравнениям (4.3) гораздо сложнее, чем приведенное в предыдущих разделах, так как при данных R и ω число неизвестных здесь уже не четыре, а пять (A, φ, B, ψ, C). Поэтому ограничимся рассмотрением случая, когда k и A малы и $B \gg A$. В этом случае C также мало, и из (4.3) получаем



Фиг. 18

$$C \approx \frac{3/4 B}{1 + 3/2 B^2} A^2 \sin(\psi - 2\varphi)$$

$$A(1 - \omega^2 + \frac{3}{2} B^2) \approx R \cos \varphi$$

$$A \left[k\omega + \frac{9/8 B^2}{1 + 3/2 B^2} A^2 \sin 2(\psi - 2\varphi) \right] \approx -R \sin \varphi$$

$$1 - 4\omega^2 + \frac{3}{4} B^2 \approx 0 \quad ((4.15))$$

$$2k\omega \approx \frac{9/16}{1 + 3/2 B^2} A^4 \sin 2(\psi - 2\varphi)$$

Из четвертого уравнения видим, что рассматриваемые колебания близки к свободным с частотой 2ω [см. формулу (1.9)]. Из сопоставления второго и третьего уравнений (4.3) видим, что $\sin \varphi = 0$ и

$$R \approx A(1 - \omega^2 + \frac{3}{2} B^2) \quad (4.16)$$

Подставляя сюда значения B из четвертого и A из пятого уравнений (4.15), получаем

$$R = \sqrt[4]{\frac{k}{\sin 2\psi}} \left[2(7\omega^2 - 1) \sqrt[4]{\frac{2}{9} \omega (8\omega^2 - 1)} \right] \quad (4.17)$$

В квадратных скобках стоит возрастающая функция ω . При данных R и k она может принять максимальное значение, когда $\sin 2\psi = 1$. Это максимальное значение, а значит и величина ω для границы области существования рассматриваемых колебаний зависят от отношения R^4/k . Следовательно, эти колебания — четвертой степени.

В заключение отметим своеобразные свойства колебаний, рассмотренных в этом разделе: 1) существование в определенной узкой области колебаний со значительной второй гармоникой, тогда как вне этой области вторая гармоника совершенно отсутствует; 2) для той из ветвей решения, на которой $C \neq 0$, несовпадение средней линии графика колебаний $x(t)$ с осью t .

5. Колебания вида $(1/2)$ ($m = 2, n = 1$). Ищем приближенное решение уравнения

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x + x^3 = R \sin 2\omega t \quad (5.1)$$

имеющее вид:

$$x = C + A \sin(\omega t + \varphi) + B \sin(2\omega t + \psi) \quad (5.2)$$

(при этом в формулах 1 раздела нужно заменить A и φ на B и ψ и наоборот).

Аналогично тому, как мы получили формулы (4.3), находим

$$\begin{aligned}
 C \left(1 + \frac{3}{2} A^2 + \frac{3}{2} B^2 + C^2 \right) + \frac{3}{4} A^2 B \sin(2\varphi - \psi) &= 0 \\
 A \left[1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 + \frac{3}{2} B^2 + 3C^2 + 3BC \sin(2\varphi - \psi) \right] &= 0 \\
 A [k\omega + 3BC \cos(2\varphi - \psi)] &= 0 \\
 B \left(1 - 4\omega^2 + \frac{3}{2} A^2 + \frac{3}{4} B^2 + 3C^2 \right) + \frac{3}{2} A^2 C \sin(2\varphi - \psi) &= R \cos \psi \\
 2k\omega B - \frac{3}{2} A^2 C \cos(2\varphi - \psi) &= -R \sin \psi
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Как и в разделах 3 и 4, одним из частных решений системы (5.3) является синусоидальное:

$$\begin{aligned}
 A = C = 0 \\
 B \left(1 - 4\omega^2 + \frac{3}{4} B^2 \right) = R \cos \psi \\
 2k\omega B = -R \sin \psi
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

но существуют и решения, в которых A и C не равны нулю.

Рассмотрим случай системы без трения ($k = 0$). Тогда из третьего уравнения (5.3) следует, что либо

$$C = 0 \tag{5.5}$$

либо

$$2\varphi - \psi = \pm \frac{1}{2} \pi \tag{5.6}$$

Рассмотрим поочередно эти два случая.

1. $C = 0$. Получаем $\psi = 0$ или $\psi = \frac{1}{2}\pi$ (считая, что A и B могут быть положительными и отрицательными). Тогда уравнения (5.3) переходят в следующие:

$$1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 + \frac{3}{2} B^2 = 0, \quad B \left(1 - 4\omega^2 + \frac{3}{2} A^2 + \frac{3}{4} B^2 \right) = R \tag{5.7}$$

Как и в разделе 4, легко можно показать, что эти уравнения определяют одну ветвь решения, притом четверную, так как они не меняются при изменении фазы первой гармоники на $\frac{1}{2}\pi$, π или $\frac{3}{2}\pi$.

2. $2\varphi - \psi = \pm \frac{1}{2}\pi$. Получаем $\varphi = \pm \frac{1}{4}\pi$, $\psi = 0$ (также считая, что A и B могут быть положительными и отрицательными). Уравнения (5.3) переходят в следующие:

$$\begin{aligned}
 C \left(1 + \frac{3}{2} A^2 + \frac{3}{2} B^2 + C^2 \right) \pm \frac{3}{4} A^2 B &= 0 \\
 1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 + \frac{3}{2} B^2 + 3C^2 \pm 3BC &= 0 \\
 B \left(1 - 4\omega^2 + \frac{3}{2} A^2 + \frac{3}{4} B^2 + 3C^2 \right) \pm \frac{3}{2} A^2 C &= R
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

И эти уравнения дают одну ветвь решения, притом четверную, ибо они не меняются при замене A на $-A$, а смена верхних знаков на нижние равносильна перемене знака у C , причем одновременно меняется фаза первой гармоники на $\frac{1}{2}\pi$.

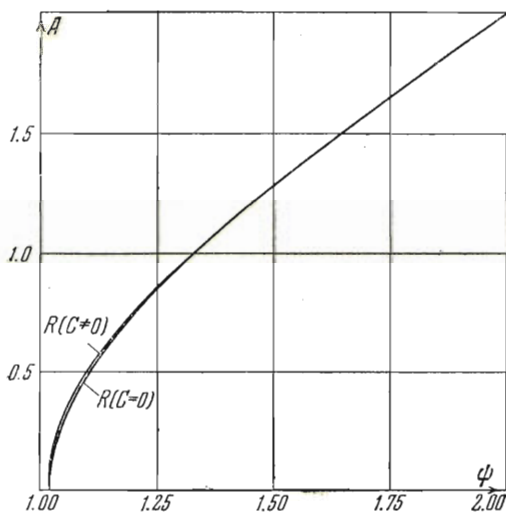
Заметим, впрочем, что из четырех получающихся решений в обоих случаях существенно различны лишь два, так как изменение знака A равносильно изменению начала отсчета времени на π/ω .

Покажем, что решения (5.7), (5.8) и синусоидальное имеют одну общую точку разветвления. Действительно, из (5.7) при $A=0$ получаем

$$1 - \omega^2 + \frac{3}{2}B^2 = 0, \quad B(1 - 4\omega^2 + \frac{3}{4}B^2) = R \quad (5.9)$$

Те же два уравнения получим (из 5.8) при $A=C=0$.

На фиг. 19 и 20 изображены зависимости $A(\omega)$, $B(\omega)$ и $C(\omega)$ для $R=0.5$, построенные по уравнениям (5.7) и (5.8). Штрихпунктиром нанесена кривая $B(\omega)$ для синусоидального решения.



Фиг. 19

Система (5.7) не представляет затруднения для вычислений, система же (5.8) решалась при помощи следующего приближенного приема.

Было принято, что

$$B = B_0 + b \quad (5.10)$$

где B_0 — отрицательный корень уравнения

$$B_0(1 - 4\omega^2 + \frac{3}{4}B_0^2) = R \quad (5.11)$$

а b — малая величина, высшими степенями которой, а также высшими степенями малой величины C можно пренебречь. Получилась следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{4}{3}(\omega^2 - 1) - 2B_0^2 \\ C &= -\frac{1 - 4\omega^2 + \frac{3}{4}B_0^2}{2\omega^2} b \\ C\left(1 + \frac{4\omega^2}{3A^2}\right) - b &= B_0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

При решении этой системы [с последующим уточнением A по второму уравнению (5.8)] оказалось, что b и C действительно малы и полученные значения хорошо удовлетворяют уравнениям (5.8). Как видно из фиг. 19 и 20, полученные кривые имеют почти совершенно тот же характер, что и в случае $(1/3)$ (фиг. 9 и 10).

Поэтому несомненно, что и в рассматриваемом случае при наличии трения резонансные кривые превратятся в замкнутые, не имеющие общих точек с синусоидальным решением.

При рассмотрении системы с трением ($k > 0$) ограничимся случаем, когда k и B малы, $A \gg B$. В этом случае и C мало и система (5.3) дает

$$C \approx \frac{3/4 A^2}{1 + 3/2 A^2} B \sin(\psi - 2\varphi),$$

$$1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 = 0,$$

$$k\omega + \frac{9/8 A^2}{1 + 3/2 A^2} B^2 \sin 2(\psi - 2\varphi) = 0$$

$$\frac{9/16 A^4}{1 + 3/2 A^2} B \sin 2(\psi - 2\varphi) = R \sin \psi \tag{5.13}$$

$$B \left[1 - 4\omega^2 + \frac{3}{2} A^2 - \frac{9/8 A^4}{1 + 3/2 A^2} \sin^2(\psi - 2\varphi) \right] = R \cos \psi$$

Второе уравнение показывает, что рассматриваемые колебания близки к свободным с частотой ω . Из третьего получаем

$$B = \sqrt{\frac{k}{\sin(2\varphi - \psi)}} \left[\frac{2\omega^2 - 1}{3(\omega^2 - 1)} \sqrt{\omega} \right] \tag{5.14}$$

Подставляя (5.14) в последние два уравнения (5.13), возводя их в квадрат, складывая и извлекая корень квадратный из их суммы, получим

$$\frac{R}{\sqrt{k}} = f(\omega, 2\varphi - \psi) \tag{5.15}$$

Отсюда видим, что рассматриваемые колебания — второй степени.

6. Обзор полученных результатов. Мы исследовали приближенные решения уравнения

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x + x^3 = R \sin \Omega t$$

следующих четырех видов:

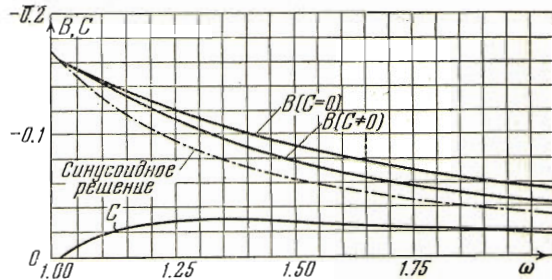
$$(3/1) \quad x = A \sin(\Omega t + \varphi) + B \sin(3\Omega t + \psi)$$

$$(1/3) \quad x = A \sin\left(\frac{1}{3} \Omega t + \varphi\right) + B \sin(\Omega t + \psi)$$

$$(2/1) \quad x = C + A \sin(\Omega t + \varphi) + B \sin(2\Omega t + \psi)$$

$$(1/2) \quad x = C + A \sin\left(\frac{1}{2} \Omega t + \varphi\right) + B \sin(\Omega t + \psi)$$

Оказалось, что решение (3/1) нигде не совпадает с синусоидальным приближением $x = A \sin(\Omega t + \varphi)$, но за исключением точек, лежащих на двух близких друг к другу особенных ветвях, дает лишь небольшую поправку к нему. Остальные три решения заключают в себе синусоидальное как частный случай, но каждое из них имеет еще по две особенных ветви, лежащие близко одна к другой.



Фиг. 20

Все полученные особенные ветви решений можно разделить на два вида:

1. Особенности ветви решений $(^3/1)$ и $(^2/1)$ ответвляются от основного решения, близкого к синусоидальному, при довольно низких частотах возмущающей силы [несколько более $\frac{1}{3}$ для решения $(^3/1)$ и $\frac{1}{2}$ для $(^2/1)$]. Вблизи этих частот соответственно третья и вторая гармоники колебания вырастают, как бы вступая в резонанс, при одновременном уменьшении амплитуды основной гармоники.

2. Особенности ветви решений $(^1/3)$ и $(^1/2)$ соответствуют режимам колебаний, возможным в некоторых ограниченных областях относительно высоких частот возмущающей силы: $\Omega > 3$ для $(^1/3)$ и $\Omega > 2$ для $(^1/2)$. В этих областях, кроме общеизвестных малых колебаний, имеющих частоту, равную частоте возмущающей силы Ω , могут еще существовать и близкие к свободным колебания со значительно большей амплитудой и меньшей частотой $\frac{1}{3}\Omega$ или $\frac{1}{2}\Omega$. Эти колебания не могут развиваться из малых при постепенном плавном изменении Ω , так как соответствующие решения не имеют общих точек с синусоидальным. Они, однако, могут возникнуть и продолжать существовать при надлежащих начальных условиях движения.

Нестрогость метода исследования, примененного в настоящей работе, не дает достаточных оснований утверждать, что найденные виды колебаний с их своеобразными свойствами действительно существуют. Такое утверждение может быть обосновано либо точными математическими доказательствами, либо экспериментальными данными.

Для колебаний вида $(^1/3)$ доказательство существования и условия устойчивости могут быть получены из общей теории вынужденных колебаний нелинейных систем, близких к консервативным, строго и подробно развитой И. Г. Малкиным^[3]. Отметим, что формулы И. Г. Малкина применимы только к колебаниям, названным здесь колебаниями первой степени. Распространение этой теории на колебания высших степеней, являющееся предметом другой работы автора, позволяет доказать существование и исследовать устойчивость и прочих рассмотренных здесь видов колебаний. При этом оказывается, что для колебаний каждого вида из числа ветвей резонансных кривых, близких к кривой амплитуд свободных колебаний (это число всегда четное), половина соответствует устойчивым движениям, а вторая половина — неустойчивым. ■

Поступила 25 III 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд. АН УССР, 1937.
2. Лурье А. И. и Чекмарев А. И. Вынужденные колебания в нелинейной системе. ПММ, т. 1, вып. 3, 1938.
3. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. ГТТИ, 1949.
4. Кац А. М. О вынужденных нелинейных колебаниях. Труды Ленинградского индустриального института, № 3, 1939.