

О КЛАССЕ СЛОЖНЫХ НАГРУЖЕНИЙ, КОТОРЫЙ ХАРАКТЕРИЗУЕТСЯ СОХРАНЕНИЕМ НАПРАВЛЕНИЙ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ

В. В. Новожилов

(Ленинград)

В последнее время все чаще применяются следующие соотношения между напряжениями и деформациями в первоначально изотропной упруго-пластической среде^[1,2]:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [d\sigma_{xx} - \mu (d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz})] + \left[\sigma_{xx} - \frac{1}{2} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] d\Phi \\ d\varepsilon_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} d\sigma_{xy} + 3\sigma_{xy} d\Phi \end{aligned} \quad (0.1)$$

Преимущество этой дифференциальной формы соотношений между напряжениями и деформациями состоит в том, что она позволяет более точно подойти к описанию процесса сложного нагружения, нежели формулы Генки-Ильюшина^[3] или какие-либо другие формулы^[4,5], непосредственно выражающие напряжения через деформации.

При сложном нагружении наиболее общего типа имеет место как изменение отношений главных напряжений, так и поворот главных осей по отношению к материальным частицам. Предметом внимания в настоящей работе будет, однако, более узкий класс сложных нагружений, а именно такой, который характеризуется сохранением направлений главных осей в течение всего процесса деформации. Специальное исследование этого класса сложных нагружений представляется целесообразным, поскольку он сравнительно легко поддается экспериментальному изучению. Кроме того, как будет показано ниже, для него может быть построена достаточно простая теория интегрирования соотношений (0.1). Следует указать, что данная задача уже рассматривалась^[6], однако в менее общей постановке и путем иных рассуждений.

§ 1. Дифференциальные соотношения между инвариантами напряжения и деформации, имеющие место, когда главные оси сохраняют свои направления в процессе деформирования. Если предположить, что в процессе деформирования главные оси напряжения сохраняют свои направления, то из (0.1) следует, что в этом частном случае главные оси деформации также будут оставаться неизменными, совпадая с главными осями напряжения. Для этого класса сложных нагружений (и только для него) шесть формул (0.1), будучи отнесены к главным осям напряжения, сводятся к трем формулам:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [d\sigma_1 - \mu (d\sigma_2 + d\sigma_3)] + \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] d\Phi \\ d\varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [d\sigma_2 - \mu (d\sigma_3 + d\sigma_1)] + \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right] d\Phi \\ d\varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [d\sigma_3 - \mu (d\sigma_1 + d\sigma_2)] + \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] d\Phi \end{aligned} \quad (1.1)$$

Складывая эти три равенства, получаем

$$de = \frac{3(1-2\mu)}{E} d\sigma = \frac{1}{K_0} d\sigma \quad (1.2)$$

где $K_0 = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ — модуль объемного расширения,

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (1.3)$$

Из (1.2) следует, что

$$\sigma = K_0 e \quad (1.4)$$

т. е. что рассматриваемая среда следует закону Гука в отношении изменений объема. Вычтем далее (последовательно) из первого равенства (1.4) два других равенства:

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) &= \frac{1+\mu}{E} d(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) d\Phi \\ d(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) &= \frac{1+\mu}{E} d(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) d\Phi \end{aligned} \quad (1.5)$$

Исключая отсюда $d\Phi$, приходим к выражению

$$\frac{d(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{d(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1+\mu}{E} d \left(\ln \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \right) \quad (1.6)$$

для преобразования которого воспользуемся формулами В. Розенберг^[5, 7, 8]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} e_i \sin \left(\psi + \frac{2}{3} \pi \right) + \frac{1}{3} e \\ \varepsilon_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} e_i \sin \psi + \frac{1}{3} e \\ \varepsilon_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} e_i \sin \left(\psi + \frac{4}{3} \pi \right) + \frac{1}{3} e \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \sin \left(\xi + \frac{2}{3} \pi \right) + \sigma \\ \sigma_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \sin \xi + \sigma \\ \sigma_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \sin \left(\xi + \frac{4}{3} \pi \right) + \sigma \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \\ \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} \psi = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \quad \sqrt{3} \operatorname{tg} \xi = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (1.10)$$

В работах^[5, 8] изменение углов ψ и ξ ограничивалось интервалами

$$-\frac{1}{6} \pi \leq \psi \leq \frac{1}{6} \pi, \quad -\frac{1}{6} \pi \leq \xi \leq \frac{1}{6} \pi$$

ввиду чего имели место неравенства

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (1.11)$$

Рассматривая сложное нагружение, т. е. полагая, что в процессе деформации отношения между ε_j , а также между σ_j изменяются, следует

отказаться от неравенств (1.11), поскольку они ограничивают свободу взаимного изменения ϵ_j (а также σ_j). На фиг. 1 показано, в каком интервале надлежит рассматривать ξ в зависимости от тех или иных соотношений между σ_j . Аналогично определяется и интервал изменения ψ в зависимости от соотношений между ϵ_j .

Подставив в формулу (1.6) вместо ϵ_j и σ_j их выражения согласно (1.7), (1.8), после элементарных преобразований получаем

$$\sin \omega de_i - e_i \cos \omega d\psi = -\frac{1+\mu}{E} \sigma_i d\xi \quad (1.12)$$

Здесь ω — фаза подобия девиаторов [8].

$$\omega = \xi - \psi \quad (1.13)$$

Выразим далее $d\Phi$ через приращения инвариантов напряжения и деформации. Проще всего это можно сделать путем следующих рассуждений. Рассмотрим формулу для приращения работы деформации (отнесенной к единице объема)

$$dA = \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\epsilon_{yy} + \dots + \sigma_{yz} d\epsilon_{yz} \quad (1.14)$$

Вводя сюда значения $d\epsilon_{ij}$ согласно (0.1), будем иметь

$$dA = \frac{1}{K_0} \sigma d\sigma + \frac{1}{G_0} \sigma_i d\sigma_i + 3\sigma_i^2 d\Phi \quad (1.15)$$

где

$$G_0 = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (1.16)$$

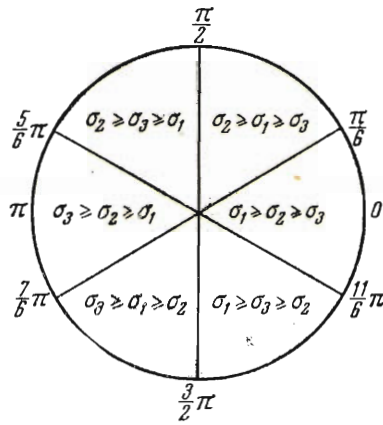
С другой стороны, приращение удельной работы деформации (в том случае, когда в процессе этого приращения главные оси напряжения и деформации совпадают) может быть представлено в виде [18] формулы (2.9) и (2.10)]

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{3} s_1 de_1 + 2\sqrt{s_2} [\cos \omega d(\sqrt{e_2}) + \sqrt{e_2} \sin \omega d\psi] = \\ &= \sigma de + 2\sigma_i [\cos \omega de_i + e_i \sin \omega d\psi] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Сопоставляя формулы (1.15) и (1.17) и учитывая (1.4), видим, что при законе связи между напряжениями и деформациями (0.1) и при рассматриваемом типе сложного нагружения должно иметь место равенство

$$\frac{3}{2} \sigma_i d\Phi + \frac{1+\mu}{E} d\sigma_i = \cos \omega de_i + e_i \sin \omega d\psi \quad (1.18)$$

Это и есть искомая зависимость между $d\Phi$ и приращениями инвариантов напряжения и деформации. Таким образом, теперь вместо (1.5) имеются два дифференциальных соотношения (1.12) и (1.18), связывающих между собой пять величин: инварианты напряжения σ_i , ξ , инварианты деформации e_i , ψ и функцию Φ .



Фиг. 1

Чтобы из данных соотношений можно было определить перечисленные величины, выразив четыре из них через пятую, надо иметь еще два, не вытекающих из (1.1) соотношения между теми же величинами. Одно из этих дополнительных соотношений должно фиксировать «путь» нагружения. Оно может быть задано в форме зависимости

$$\xi = \xi(\sigma_i) \quad (1.19)$$

Вместо пути нагружения (1.19) можно задать путь деформирования

$$\psi = \psi(e_i) \quad (1.20)$$

Что касается второго дополнительного соотношения, то оно должно выражать тот основной физический закон, который характеризует пластические свойства рассматриваемого материала. Как известно, в теории простого нагружения этот основной закон формулируется в виде

$$\sigma_i = f(e_i) \quad (1.21)$$

где $f(\)$ — функция, одинаковая для всех видов напряженного состояния.

А. Рейсс^[1], которым были предложены формулы (0.1), использовал в них закон пластичности именно в форме (1.21). Точнее говоря, А. Рейсс рассматривал только частный случай этого закона, полагая $\sigma_i = \sigma_0 = \text{const}$, т. е. считая материал идеально пластичным.

Однако в последнее время более часто (и, как выяснится из дальнейшего, с большими основаниями) принимают закон пластичности для формул (0.1) в виде

$$\Phi = F(\sigma_i) \quad (1.22)$$

где $F(\)$ — функция, одинаковая для всех видов сложного нагружения.

Следует отметить, что формула (1.22) допускает простое механическое истолкование. В самом деле, возвращаясь к выражению (1.15) и полагая, что Φ зависит только от σ_i , получаем, что в этом случае работа, затрачиваемая на изменение формы, будет зависеть только от начального и конечного напряженных состояний, являясь при этом функцией только σ_i .

Таким образом, если предположение, заключающееся в формуле (1.22), действительно справедливо, то для всех видов сложного нагружения мы должны получить одну и ту же экспериментальную кривую, выражающую зависимость σ_i от работы, затрачиваемой на изменение формы. В этом и следует видеть физическую гипотезу, лежащую в основе формулы (1.22)^[12]. Заметим, что из указанной выше гипотезы отнюдь не вытекает, что существует потенциал деформации: не завися от пути нагружения, работа деформации будет тем не менее зависеть от пути деформирования. Во избежание недоразумений следует, кроме того, отметить, что при простом нагружении различие между законами пластичности в формах (1.21) и (1.22) исчезает. Поэтому принятие закона пластичности в форме (1.22) для сложного нагружения отнюдь не означает необходимости ревизии закона (1.21) для простого нагружения.

§ 2. Вывод формул, связывающих тензоры напряжения и деформации. Если принять закон пластичности в форме (1.21) и задаться путем нагружения (1.19) или путем деформирования (1.20), то соотношение (1.12) превратится в дифференциальное уравнение первого порядка, связывающее e_i и ψ (или σ_i и ξ). Проинтегрировав это уравнение и определив постоянную из начальных данных (значения σ_i , ξ , e_i , ψ в момент, с которого начинается изучение деформации, предполагаются известными), можно получить

$$e_i = e_i(\psi) \tag{2.1}$$

Тем самым все инварианты деформации и напряжения будут связаны между собой [в силу (2.1), (1.21), (1.19) или (1.20)], т. е. будем иметь

$$\sigma_i = \sigma_i(e_i), \quad e_i = e_i(\sigma_i), \quad \xi = \xi(e_i), \quad \psi = \psi(\sigma_i) \tag{2.2}$$

Но тогда можно сразу написать формулы [8]:

$$\begin{aligned} D_\sigma &= \frac{\sigma_i}{e_i} \left[\frac{\cos(2\psi + \xi)}{\cos 3\psi} D_\epsilon - \frac{\sqrt{3}}{e_i} \frac{\sin(\xi - \psi)}{\cos 3\psi} \left(D_\epsilon^2 - \frac{2}{3} e_i^2 I \right) \right] \\ D_\epsilon &= \frac{e_i}{\sigma_i} \left[\frac{\cos(2\xi + \psi)}{\cos 3\xi} D_\sigma + \frac{\sqrt{3}}{\sigma_i} \frac{\sin(\xi - \psi)}{\cos 3\xi} \left(D_\sigma^2 - \frac{2}{3} \sigma_i^2 I \right) \right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь D_σ — девиатор тензора напряжения, D_ϵ — девиатор тензора деформации, I — единичный тензор.

В первой из формул (2.3) σ_i и ξ рассматриваются как функции от e_i , а во второй e_i и ψ — как функции от σ_i . Возможность использования формул (2.3) для рассматриваемого класса сложных нагружений определяется совпадением главных осей напряжения и деформации в течение всего процесса нагрузки. Тем самым задача интегрирования решена. При законе пластичности (1.21) она свелась к интегрированию дифференциального соотношения (1.12) вдоль заданного пути нагружения (1.20). Соотношение (1.18) использовать не пришлось, поскольку в этом не было необходимости. При желании из него можно определить Φ в функции от e_i (или σ_i), причем вид этой функции будет, очевидно, зависеть от пути нагружения.

Пусть теперь закон пластичности принимается в форме (1.22). Поскольку функция Φ предполагается одинаковой для всех видов нагружения, то она может быть определена из опыта на простое растяжение. Для последнего частного случая соотношение (1.18) принимает вид:

$$\frac{3}{2} \sigma_i d\Phi + \frac{1 + \mu}{E} d\sigma_i = de_i^x \tag{2.4}$$

Здесь

$$e_i^x = f(\sigma_i) \tag{2.5}$$

есть функция, выражающая зависимость интенсивности касательных деформаций от интенсивности касательных напряжений при растяжении. Следует подчеркнуть, что зависимость e_i от σ_i при сложном нагружении будет [если основной закон пластичности принять в форме (1.22)], вообще говоря, отличаться от (2.5). Вводя $d\Phi$ согласно (2.4) в (1.18) и присовокупляя к получающемуся после этого дифференциальному соотношению выражение (1.12), будем иметь систему

$$\sin \omega de_i - e_i \cos \omega d\psi = -\frac{1 + \mu}{E} \sigma_i d\xi, \quad \cos \omega de_i + e_i \sin \omega d\psi = \frac{de_i^x}{d\sigma_i} d\sigma_i \tag{2.6}$$

которая, если к ней добавить путь нагружения (1.19), превращается в систему из двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными e_i , ψ при аргументе σ_i (или ξ). Если же задать путь деформирования (1.20), то (2.6) превращается в систему из двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными σ_i и ξ при аргументе e_i (или ψ). И в том и в другом случае после интегрирования получим функциональную связь (2.2). Используя далее формулы (2.3), можно сразу написать соотношения, связывающие напряжения и деформации.

§ 3. Частный случай, когда путь нагружения Γ **состоит из ряда ступеней, в пределах каждой из которых изменяется либо только вид напряженного состояния, либо только интенсивность касательных напряжений.** Пусть первой ступенью нагружения является простое нагружение, в результате которого среда переходит из исходного ненапряженного состояния в напряженно-деформированное состояние, характеризующееся значениями инвариантов: $\sigma_i = \sigma_0$, $e_i = e_0$, $\xi = \psi = \xi_0 = \psi_0$.

Пусть далее начинается сложное нагружение, при котором значение интенсивности касательных напряжений остается неизменным ($\sigma_i = \sigma_0$), а угол вида напряжения изменяется от $\xi = \xi_0$ до $\xi = \xi_1$.

В этом частном случае система (2.6) принимает вид:

$$\sin \omega de_i - e_i \cos \omega d\psi = -a d\xi, \quad \cos \omega de_i + e_i \sin \omega d\psi = 0 \quad (3.1)$$

где

$$a = \frac{1+\mu}{E} \sigma_0 \quad (3.2)$$

Подставляя сюда вместо ω его значение согласно (1.13), получаем

$$\begin{aligned} (\sin \xi \cos \psi - \cos \xi \sin \psi) de_i - e_i (\cos \xi \cos \psi + \sin \xi \sin \psi) d\psi &= -a d\xi \\ (\cos \xi \cos \psi + \sin \xi \sin \psi) de_i + e_i (\sin \xi \cos \psi - \cos \xi \sin \psi) d\psi &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Эта система легко приводится к виду

$$\cos \psi de_i - e_i \sin \psi d\psi = -a \sin \xi d\xi, \quad \sin \psi de_i + e_i \cos \psi d\psi = a \cos \xi d\xi \quad (3.4)$$

Откуда

$$d[e_i \cos \psi - a \cos \xi] = 0, \quad d[e_i \sin \psi - a \sin \xi] = 0 \quad (3.5)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} e_i \cos \psi - a \cos \xi &= e_0 \cos \psi_0 - a \cos \xi_0 = (e_0 - a) \cos \xi_0 \\ e_i \sin \psi - a \sin \xi &= e_0 \sin \psi_0 - a \sin \xi_0 = (e_0 - a) \sin \xi_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из этих равенств имеем

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{(e_0 - a) \sin \xi_0 + a \sin \xi}{(e_0 - a) \cos \xi_0 + a \cos \xi}, \quad e_i^2 = (e_0 - a)^2 + a^2 + 2a(e_0 - a) \cos(\xi_0 - \xi) \quad (3.7)$$

Формулы (3.7) определяют ψ и e_i в зависимости от ξ при рассматриваемом типе сложного нагружения. Заметим, что a есть значение интенсивности упругих касательных деформаций. Для достаточно разившейся пластической деформации эта величина будет мала по сравнению с e_0 . Пренебрегая ею в формулах (3.7), будем иметь

$$\psi \approx \xi_0, \quad e_i \approx e_0 \quad (3.8)$$

т. е. в первом приближении можно считать, что среда рассматриваемого типа вообще не реагирует на изменение угла ξ (при постоянном значении σ_i). Некоторые изменения ψ и e_i , имеющие все же место, должны быть отнесены за счет изменения упругих деформаций. Пусть сложное нагружение рассматриваемого типа заканчивается при значениях $\sigma_i = \sigma_0$, $\xi = \xi_1$, которым соответствуют значения $e_i = e_1$, $\psi = \psi_1$, определяемые формулами (3.6) и (3.7).

В качестве следующей (третьей) ступени нагружения примем такое нагружение, когда будет изменяться только σ_i , при постоянном $\xi = \xi_1$.

Для этого случая дифференциальная система (2.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \sin(\xi_1 - \psi) de_i - e_i \cos(\xi_1 - \psi) d\psi &= 0 \\ \cos(\xi_1 - \psi) de_i + e_i \sin(\xi_1 - \psi) d\psi &= de_i^{\times} \end{aligned} \quad (3.9)$$

или

$$d[e_i \sin(\xi_1 - \psi)] = 0, \quad d[e_i \cos(\xi_1 - \psi) - e_i^{\times}] = 0 \quad (3.10)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} e_i \sin(\xi_1 - \psi) &= e_1 \sin(\xi_1 - \psi_1) = C_1 \\ e_i \cos(\xi_1 - \psi) - e_i^{\times}(\sigma_i) &= e_1 \cos(\xi_1 - \psi_1) - e_1^{\times}(\sigma_0) = C_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из этих формул имеем

$$\operatorname{tg}(\xi_1 - \psi) = \frac{C_1}{C_2 + e_i^{\times}(\sigma_i)}, \quad e_i = \sqrt{C_1^2 + [C_2 + e_i^{\times}(\sigma_i)]^2} \quad (3.12)$$

Из первой формулы (3.12) видно, что с увеличением σ_i (при достаточно больших значениях этого параметра) угол ψ будет стремиться к ξ_1 , т. е. первоначальное различие между видами деформированного и напряженного состояний ($\psi = \psi_1$, $\xi = \xi_1$) будет постепенно устраняться.

Заметим, что практическая реализация рассмотренных выше трех ступеней нагружения трудно осуществима за счет в основном второй ступени, поскольку весьма затруднительно создать такую механическую установку, которая позволила бы изменять ξ при поддержании постоянного значения σ_i . Отсюда на первый взгляд полученные выше формулы бесполезны с точки зрения возможности их сопоставления с результатами опытов. Можно, однако, полагать, что условия деформации пластической среды, близкие к тем, которые были выше теоретически исследованы, могут быть практически осуществлены, если после первого этапа нагружения (простое нагружение до значения $\sigma_i = \sigma_0$ при $\xi = \xi_0$) образец разгрузить и затем вновь подвергнуть пропорциональному нагружению, но уже при другом значении $\xi = \xi_1$. В последнем случае до значения $\sigma_i = \sigma_0$ образец будет деформироваться упругим образом (если пренебречь явлениями типа эффекта Баушингера), причем при достижении интенсивностью касательных деформаций указанной выше величины напряженно-деформированное состояние образца будет близко к тому, которое соответствует началу третьего этапа нагружения. Продолжая затем пропорциональное нагружение за значение $\sigma_i = \sigma_0$, мы будем находиться в условиях применимости формул (3.12) как приближенных. Указанная выше возможность практического осуществления напряженно-деформирован-

ных состояний, близких к тем, которые описываются изложенными в этом параграфе формулами, может быть легко реализована.

Предлагаемые испытания позволяют исследовать сложные нагружения, достаточно сильно отличающиеся от простого нагружения, чего нельзя сказать о тех опытах [6, 9, 10], для которых характерно непрерывное и относительно плавное изменение ξ при увеличении σ_i . При такого рода опытах различные варианты теории сложного нагружения дают результаты, довольно близкие друг к другу и не очень отличающиеся от результатов теории простого нагружения Генки — Ильюшина. Иначе будет обстоять при испытаниях предложенного выше типа, каковым присуще ступенчатое изменение ξ в зависимости от σ_i и для которых расчет по формулам теории простого нагружения должен давать результаты, далекие от истины. Чтобы это показать, рассмотрим, основываясь на приведенных выше формулах, несколько вариантов сложного нагружения.

В качестве первого этапа для всех этих нагружений примем простое растяжение ($\psi_0 = \xi_0 = \frac{11}{6}\pi$) до некоторого значения интенсивности касательных напряжений $\sigma_i = \sigma_0$.

Во втором этапе нагружения пусть изменяется только угол ξ при сохранении значения $\sigma_i = \sigma_0$. При этом будут рассмотрены три варианта:

(а) $\xi_1 = 0$ — чистый сдвиг;

(б) $\xi_1 = \frac{1}{2}\pi$ — растяжение в направлении, перпендикулярном направлению первоначального растяжения;

(в) $\xi_1 = \frac{5}{6}\pi$ — сжатие в том же направлении, в каком первоначально имело место растяжение.

Третьими этапами нагружений пусть будут пропорциональные нагружения ($\sigma_i \geq \sigma_0$) с углами ξ , соответствующими значениям (а), (б), (в). Материал будем считать линейно упрочняющим при простом нагружении, полагая, что в этом случае

$$e_i = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_i \quad (0 \leq \sigma_i \leq s), \quad e_i = \frac{1 + \mu}{E} [k(\sigma_i - s) + s] \quad (\sigma_i \geq s) \quad (3.13)$$

Входящие в (3.13) постоянные принимались при вычислении кривых равными

$$\frac{E}{1 + \mu} = 1.6 \times 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

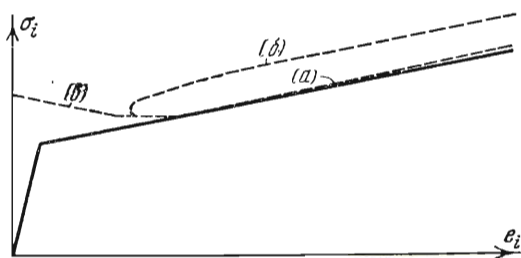
$$s = 3000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad k = 20$$

Кроме того, принималось, что $\sigma_0 = 1.25 s$.

На фиг. 2 показаны кривые изменения σ_i в зависимости от e_i для всех трех

рассматриваемых вариантов сложного нагружения, построенные на основании формул (3.7), (3.12), (3.13).

Из этих кривых прежде всего следует, что зависимость σ_i от e_i , вычисленная для различных сложных нагружений, исходя из формул (0.1)

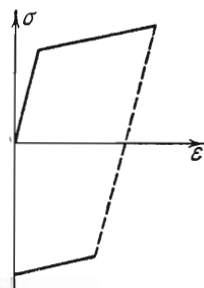


Фиг. 2

при законе пластичности в форме (1.22), вообще говоря, значительно отличается от таковой для простого нагружения, откуда следует, что существует альтернатива — либо формулы (0.1), (1.22) неверны, либо теория малых пластических деформаций не пригодна для условий нагружения, достаточно существенно отличающихся от условий простого нагружения. Справедливо, конечно, второе, так как ход кривых (а), (б), (в) представляется физически правдоподобным. Последнее видно хотя бы из кривой (б), согласно которой растяжение в поперечном направлении сопровождается сначала некоторым убыванием интенсивности касательных деформаций (при непрерывном росте σ_i) и лишь затем (начиная с некоторого значения $\sigma_i > \sigma_0$) e_i начинает опять возрастать. Причина такого убывания e_i можно легко объяснить: поперечное растяжение должно прежде всего превратить пластическую деформацию поперечного сжатия (возникшую за счет первоначального растяжения) в деформацию растяжения, и лишь после этого начнется возрастание интенсивности касательных деформаций. Заметим, что испытание типа (б) было проведено Р. Шмидтом [11], который и получил экспериментально для этого случая кривую такого же вида, какая выше была получена расчетным путем. Подобного рода S-образные (по выражению Р. Шмидта [11], стр. 249) кривые представились ему слишком необычными, ввиду чего он прибег к другой графической интерпретации результатов своих опытов, а именно стал изображать эти результаты на плоскости σ_i, \sqrt{A} (где A — удельная работа, затрачиваемая на изменение формы образца). Соответствующий график, имеющийся в цитированной работе, представляет значительный интерес, поскольку (как было указано в § 1) предположение, что Φ есть функция только σ_i , эквивалентно предположению, что для всех видов сложного нагружения должна существовать единая кривая $\sigma_i = f(\sqrt{A})$. Если данное предположение является правильным, то все точки Р. Шмидта, относящиеся к сложному нагружению, должны были лечь на ту же кривую, что и при простом нагружении. Однако, как видно из [11] фиг. 8, стр. 250, этого не получалось, хотя, надо сказать, отступления кривой, соответствующей сложному нагружению от кривой, соответствующей простому нагружению, не слишком велики (кривые сходны по виду, но несколько сдвинуты одна относительно другой).

Почувительно проанализировать кривую (в). Легко видеть, что если эту кривую перестроить в форме зависимости σ от ε , где σ — напряжение (с присущим ему знаком), а ε — удлинение (с присущим ему знаком), то получится график, показанный на фиг. 3. Иными словами, получится кривая испытания на растяжение и последующее сжатие (но без эффекта Баушингера).

Таким образом, даже в этом, казалось бы, совершенно не подходящем для использования формул (0.1) случае (поскольку они утрачивают силу при убывании σ_i) данные формулы позволяют тем не менее, получить качественно правильный результат.



Фиг. 3

Затруднение в связи с невозможностью убывания σ_i в формулах (0.1) обходится при этом путем предположения, что превращение пластического растяжения в пластическое сжатие осуществляется не путем уменьшения σ_i при внезапном изменении ξ , а путем непрерывного изменения ξ при постоянном σ_i , т. е. минуя стадию разгрузки.

Наконец, следует сказать несколько слов и о кривой a . В отличие от двух других кривых данная кривая оказывается довольно близкой к кривой, соответствующей простому нагружению, откуда следует, что даже при резком, но относительно небольшом по величине изменении вида напряженного состояния не должно наблюдаться существенного различия между кривыми $\sigma_i = f(e_i)$, полученными при простом и при сложном нагружениях. Тем более не следует ожидать значительного различия между этими кривыми в тех случаях, когда сложное нагружение характеризуется достаточно плавным изменением ξ в зависимости от σ_i (как это обычно имеет место при испытаниях на сложное нагружение).

В заключение отметим, что закон пластичности в форме (1.21) следует считать неприемлемым для сложных нагружений. В самом деле, приняв этот закон, мы должны были бы получить на фиг. 2 вместо трех кривых a , b , c одну кривую, что не соответствует действительности даже в качественном отношении. Что же касается закона пластичности в форме (1.22), то он приводит к более правильному описанию закономерностей деформации при сложном нагружении и может рассматриваться как удовлетворительное первое приближение.

Поступила 12 V 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Reuss A. Berücksichtigung der elastischen Formänderungen in der Plastizitätstheorie. Z. a. M. M., Bd. 10, 1930.
2. Handelman G. H., Lin C. C., Prager W. On the mechanical behavior of metals in the strain gardening range. Quart. of Appl. Math., vol. 4, 1947.
3. Ильюшин А. А. Пластичность, ч. 1, Гостехиздат, 1948.
4. Prager W. Strain hardening under combined stresses. Journal of Appl. Phys., vol. 16, № 12, 1945.
5. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругой среде. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
6. Гу Л., Мэрин Дж. Нахождение теоретической зависимости между напряжениями и деформациями в пластической области. Сб. переводов «Механика», № 5, 1953.
7. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическим деформациям. Машгиз, 1949.
8. Новожилов В. В. О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
9. Morrison J. and Shepherd A. An experimental investigation of plastic stress strain relations. Proc. the Inst. of Mech. Eng., 163, № 55, 1950.
10. Hill R. and Siebel M. On combined bending and twisting of thin tubes in the plastic range. Phil. Mag., vol. 42, 1951.
11. Schmidt R. Über die Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet. Ing. Arch., Bd. III, h. 3, 1932 (Цитируется по переводу в сборнике «Теория пластичности», 1948 г.).
12. Hill R. The mathematical theory of Plasticity, Oxford, 1950.