

О ПРЕДЕЛЬНЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ И ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

В предлагаемой работе рассматриваются автомодельные решения вида

$$e^{\alpha x_2} f(x_1 e^{\beta x_2}) \quad (x_1, x_2 \text{ — независимые переменные задачи}) \quad (0.1)$$

на примере уравнений одномерной нестационарной фильтрации газа в пористой среде и пограничного слоя в вязкой несжимаемой жидкости. Решения вида (0.1) давно появлялись в различных задачах, однако в то время как структура решений вида

$$x_2^\alpha f(x_1 x_2^\beta) \quad (0.2)$$

получалась, исходя из физической постановки задачи, при помощи общего метода теории размерности, развитого Л. И. Седовым^[1], структура решений вида (0.1) при помощи соображений теории размерности получена быть не могла.

Оказалось, что структура решений вида (0.1) может быть получена, исходя из физической постановки задачи, если воспользоваться инвариантностью постановки задачи, приводящей к этим решениям относительно некоторой группы непрерывных преобразований, помимо преобразований подобия.

Оказалось, далее, что решения (0.1) являются в некотором смысле предельными для решений вида (0.2) при безграничном возрастании показателя α .

Инвариантность постановки задач относительно непрерывной группы преобразований подобия, необходимо связанная с независимостью результата от выбора единиц измерения, приводит к уменьшению числа аргументов в математическом выражении закономерностей рассматриваемого явления на число определяющих параметров явления, имеющих независимую размерность. Это предложение (*II*-теорема) лежит в основе анализа размерностей. Инвариантность постановки задач относительно каких-либо других групп непрерывных преобразований также приводит к сокращению числа аргументов в математических формулировках закономерностей задачи. Отсюда следует, в частности, что исследование уравнений различных физических процессов с точки зрения их инвариантности относительно некоторых групп непрерывных преобразований помимо преобразований подобия должно привести к новым классам автомодельных движений. Это особенно относится к задачам с числом независимых переменных, большим двух.

Приведенные соображения тесно связаны с так называемым «инспекционным анализом», основные идеи которого изложены в книге Г. Биркгофа^[12].

§ 1. 1°. Уравнение для давления газа p при плоской изотермической фильтрации газа в пористой среде имеет вид^[2]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

Рассмотрим для этого уравнения следующую краевую задачу:

$$p(x, -\infty) \equiv 0, \quad p(0, t) = p_0 e^{\sigma t} \quad (1.2)$$

[движение рассматривается на промежутке времени $(-\infty, t)$]. Решение задачи зависит от величин x, t, a^2, σ, p_0 , размерности которых суть

$$[x] = L, \quad [t] = T, \quad [a^2] = [p]^{-1} L^2 T^{-1}, \quad [\sigma] = T^{-1}, \quad [p_0] = [p]. \quad (1.3)$$

Из анализа размерности следует, что решение задачи имеет вид:

$$p = p_0 \varphi \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 p_0 \sigma^{-1}}}, \sigma t \right) \quad (1.4)$$

где φ — некоторая безразмерная функция двух безразмерных комбинаций, которые можно составить из пяти переменных (1.3), последние три из которых имеют независимые размерности.

Положим $t = t' + \tau$, где τ — произвольная константа, при этом уравнение (1.1) и первое условие (1.2) не изменятся, а второе условие (1.2) примет вид: $p(0, t') = p_0 e^{\sigma \tau} e^{\sigma t'} = p_0' e^{\sigma t'}$, где $p_0' = p_0 e^{\sigma \tau}$. Таким образом, сдвиг во времени сказывается лишь на некотором преобразовании величины p_0 ; согласно (1.4) имеем

$$p(x, t') = p_0' \varphi \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 p_0' \sigma^{-1}}}, \sigma t' \right) = p_0 e^{\sigma \tau} \varphi \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 p_0 e^{\sigma \tau} \sigma^{-1}}}, \sigma t - \sigma \tau \right) \quad (1.5)$$

Но $p(x, t') = p(x, t)$, поэтому при любом τ

$$\varphi \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 p_0 \sigma^{-1}}}, \sigma t \right) = e^{\sigma \tau} \varphi \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 p_0 e^{\sigma \tau} \sigma^{-1}}}, \sigma t - \sigma \tau \right) \quad (1.6)$$

Полагая теперь $\tau = t$, получим

$$\varphi \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 p_0 \sigma^{-1}}}, \sigma t \right) = e^{\sigma t} \varphi \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 p_0 e^{\sigma t} \sigma^{-1}}}, 0 \right) = e^{\sigma t} f \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 p_0 e^{\sigma t} \sigma^{-1}}} \right)$$

т. е. функция φ может быть представлена через функцию одного аргумента, так что

$$p = p_0 e^{\sigma t} f \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 p_0 e^{\sigma t} \sigma^{-1}}} \right) \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.1), получаем для f обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} - f = 0 \quad (1.8)$$

причем, поскольку давление и поток газа непрерывны, $f(\xi)$ должна быть непрерывна и иметь непрерывную производную от квадрата. Функция $f(\xi)$ удовлетворяет условиям

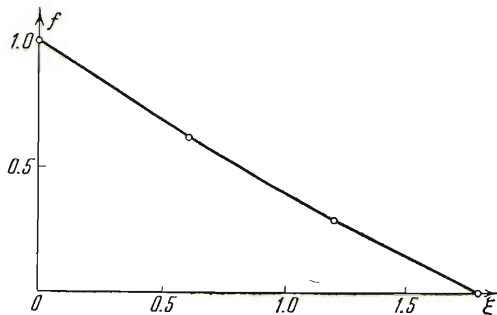
$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0 \quad (1.9)$$

которые получаются подстановкой (1.7) в условия (1.2).

2°. Функция $f(\xi)$ строится по способу, указанному в работах [3, 4]. Она тождественно равна нулю при $\xi > \xi_0 = 1,810$. График этой функции дан на фиг. 1. Передний фронт газа, т. е. поверхность, отделяющая часть пространства, в которой давление газа отлично от нуля, от части пространства, где $p \equiv 0$, распространяется с конечной скоростью; его координата в момент t дается формулой

$$x^*(t) = 1.810a \sqrt{\frac{p_0 e^{\sigma t}}{\sigma}} \quad (1.10)$$

Отметим, что график функции $f(\xi)$ получается весьма близким к прямой линии.



Фиг. 1

§ 2. 1°. Построенное в § 1 автомодельное решение является

предельным для автомодельных решений другого типа, рассмотренных ранее [3, 4] и отвечающих начальному и граничному условиям:

$$p(x, t_0) \equiv 0, \quad p(0, t) = \mu (t - t_0)^\alpha \quad (2.1)$$

Отметим, что в работах [3, 4] принималось, что $t_0 = 0$, но это не меняет строения решений, поскольку уравнение (1.1) однородно по времени. Полагаем

$$\mu = p_0 (\alpha \tau)^{-\alpha} \quad (2.2)$$

где p_0 — некоторая константа размерности давления, τ — некоторая константа размерности времени, причем, очевидно, эти константы определяются с точностью до постоянного множителя. Тогда решение уравнения (1.1) при условиях (2.1) имеет вид [3]:

$$p = p_0 \left(\frac{t - t_0}{\alpha \tau}\right)^\alpha f_\alpha \left(\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\alpha^\alpha (\alpha + 1)}{p_0 \tau} \left(\frac{t - t_0}{\tau}\right)^{-(\alpha + 1)}}\right) \quad (2.3)$$

где $f_\alpha(\xi)$ — интеграл уравнения

$$\frac{d^2 f_\alpha^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{d f_\alpha}{d\xi} - \frac{\alpha}{\alpha + 1} f_\alpha = 0 \quad (2.4)$$

удовлетворяющий условиям (1.9), непрерывный, с непрерывной величиной $d f_\alpha^2 / d\xi$. Эти интегралы подробно исследованы в работах [3, 4], они отличны от нуля на отрезке $(0, \xi_0(\alpha))$, где $\xi_0(\alpha)$ — некоторая функция, $f_\alpha(\xi) \equiv 0$ при $\xi > \xi_0$.

2°. В решениях, рассмотренных в п. 1°, будем стремиться α к бесконечности, отодвигая начальный момент t_0 к $-\infty$ по закону

$$t_0 = -\alpha \tau - \tau_0 \quad (2.5)$$

где τ_0 — произвольная константа. Раскрывая неопределенность, получаем, что при $\alpha \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{t-t_0}{\alpha\tau}\right)^\alpha \rightarrow \exp\left(\frac{t+\tau_0}{\tau}\right), \quad \frac{\alpha^{-\alpha}}{\alpha+1} \left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^{\alpha+1} \rightarrow \exp\left(\frac{t+\tau_0}{\tau}\right) \quad (2.6)$$

В силу того что p_0 определено лишь с точностью до множителя, можно положить $\tau_0 = 0$. Полагая далее $\tau = \sigma^{-1}$ и замечая, что при $\alpha \rightarrow \infty$ уравнение (2.4) стремится к уравнению (1.8), а граничные условия для обоих уравнений совпадают, получим, что при $\alpha \rightarrow \infty$ решение (2.3) стремится к (1.7), т. е. решение (1.7) является предельным для автомодельных решений обычного типа (2.3).

3°. Уравнение (1.1) инвариантно также по отношению к преобразованию вида $x = x' + \xi$. Аналогично предыдущему можно, используя эту инвариантность, построить решение вида $e^{\alpha x} f(te^{\beta x})$, причем это решение будет предельным для автомодельных решений задач Коши уравнения (1.1), отвечающих следующему начальному распределению давления газа в пространстве:

$$p(x, 0) = \begin{cases} x(x-x_0)^\alpha & (x > x_0) \\ 0 & (x < x_0) \end{cases}$$

при стремлении α к бесконечности и соответствующем удалении x_0 к $-\infty$.

§ 3. Рассмотрим предельное автомодельное решение уравнения ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.

Пусть $-\infty < x < \infty$ и пусть скорость на внешней границе пограничного слоя равна

$$U(x) = U_0 e^{\lambda x} \quad (3.1)$$

Тогда уравнение для функции тока $\psi(x, y)$ в пограничном слое примет вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + U_0^2 \lambda e^{2\lambda x} \quad (3.2)$$

где x, y — соответственно продольная и поперечная координаты, а ν — кинематическая вязкость жидкости. Граничные условия имеют вид:

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, +\infty) = U_0 \lambda e^{\lambda x} \quad (3.3)$$

Решение ψ зависит от величин x, y, U_0, λ, ν . Целесообразно ввести разные размерности продольной и поперечной координат L_x и L_y . Тогда имеем размерности

$$[x] = L_x, \quad [y] = L_y, \quad [U_0] = [\psi] L_y^{-1}, \quad [\lambda] = L_x^{-1}, \quad [\nu] = [\psi] L_y L_x^{-1} \quad (3.4)$$

Анализ размерности дает

$$\psi = \sqrt{\frac{2U_0 \nu}{\lambda}} \varphi\left(y \sqrt{\frac{U_0 \lambda}{2\nu}}, \lambda x\right) \quad (3.5)$$

где постоянные множители введены для удобства последующего изложе-

ния. Положим теперь $x = x' + \xi$, где ξ — некоторая константа. Подставляя это в уравнение (3.2) и граничные условия (3.3), получим ту же самую задачу в переменных x' , y , если введем $U_0' = U_0 e^{\lambda \xi}$. Формула (3.5) дает поэтому соотношение

$$\psi = \sqrt{\frac{2U_0'v}{\lambda}} \varphi\left(\lambda \sqrt{\frac{U_0'\lambda}{2v}}, \lambda x'\right) = \sqrt{\frac{2U_0 v e^{\lambda \xi}}{\lambda}} \varphi\left(y \sqrt{\frac{U_0 e^{\lambda \xi} \lambda}{2v}}, \lambda x - \lambda \xi\right) \quad (3.6)$$

справедливое при произвольном ξ . Положим теперь $\xi = x$, имеем

$$\varphi\left(y \sqrt{\frac{U_0 \lambda}{2v}}, \lambda x\right) = e^{\frac{1}{2} \lambda x} \varphi\left(y \sqrt{\frac{U_0 \lambda e^{\lambda x}}{2v}}, 0\right) = e^{\frac{1}{2} \lambda x} \Phi\left(y \sqrt{\frac{U_0 \lambda e^{\lambda x}}{2v}}\right) \quad (3.7)$$

т. е. функция φ представляется через функцию одного аргумента. Отсюда и из (3.5) получаем

$$\psi = \sqrt{\frac{2U_0 v e^{\lambda x}}{\lambda}} \Phi\left(y \sqrt{\frac{U_0 \lambda e^{\lambda x}}{2v}}\right) \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.2) и (3.3), получаем для функции Φ граничную задачу

$$\Phi'' + \Phi \Phi' = 2(\Phi^{12} - 1), \quad \Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad \Phi'(\infty) = 1 \quad (3.9)$$

Функция Φ (точнее Φ') затабулирована Хартри [5], таблица значений Φ' имеется также в монографии Л. Г. Лойцянского [6]. Решение (3.8) было получено С. Гольдштейном [7] другим методом как исключительный случай при исследовании автомодельных движений в пограничном слое.

§ 4. 1°. Покажем, что решение, приведенное в § 3, является предельным для автомодельных решений Фокнера-Скэн [8, 9]. Решения Фокнера-Скэн отвечают степенной зависимости скорости на внешней границе пограничного слоя от продольной координаты $U(x) = c(x - x_0)^m$, где x_0 — точка начала отсчета продольной координаты. Обычно полагают $x_0 = 0$, однако предположение $x_0 \neq 0$ ничего не меняет в строении решений в силу однородности основного уравнения (3.2) относительно x . Покажем, что решение § 3 получается из решений Фокнера-Скэн, если устремить показатель m к бесконечности и соответствующим образом отодвигать x_0 к $-\infty$.

В самом деле, положим

$$c = U_0 L^{-m} (m + 1)^{-m} \quad (4.1)$$

где U_0 — некоторая константа размерности $[\psi] L_y^{-1}$, а L — некоторая константа размерности L_x . Тогда решения Фокнера-Скэн могут быть записаны в виде

$$\psi = \sqrt{\frac{2U_0 v L}{(m + 1)^{m+1}} \left(\frac{x - x_0}{L}\right)^{m+1}} \Phi_m\left(y \sqrt{\frac{U_0 (m + 1)^{1-m}}{2v L} \left(\frac{x - x_0}{L}\right)^{m-1}}\right) \quad (4.2)$$

где функция Φ_m является решением граничной задачи

$$\Phi_m''' + \Phi_m \Phi_m'' = \frac{2m}{m + 1} (\Phi_m^{12} - 1), \quad \Phi_m(0) = \Phi_m'(0) = 0, \quad \Phi_m'(\infty) = 1 \quad (4.3)$$

Положим $x_0 = -(m+1)L - a$, где a — некоторая константа, не зависящая от m , и устремим m к бесконечности; получаем

$$\frac{1}{(m+1)^{m+1}} \left(\frac{x-x_0}{L} \right)^{m+1} \rightarrow \exp\left(\frac{x+a}{L}\right), \quad \frac{1}{(m+1)^{m-1}} \left(\frac{x-x_0}{L} \right)^{m-1} \rightarrow \exp\left(\frac{x+a}{L}\right) \quad (4.4)$$

В силу того, что U_0 определяется с точностью до множителя, можно положить $a = 0$. Обозначив $\lambda = L^{-1}$, видим, что при $m \rightarrow \infty$ уравнение (4.3) стремится к уравнению (3.9), а граничные условия в задачах (3.9) и (4.3) совпадают. Таким образом, решение (4.2) стремится к решению (3.9).

2°. Решения предельного типа существуют всегда, когда уравнение рассматриваемой задачи имеет автомодельные решения обычного степенного типа с произвольным показателем степени. В частности, полученные Л. И. Седовым автомодельные решения уравнений движения сжимаемой жидкости, содержащие степенные функции времени [10], при соответствующем предельном переходе, вполне аналогичном проделанному в предлагаемой работе, переходят в автомодельные решения, содержащие показательные функции времени. Эти решения были получены путем подстановки К. П. Станюковичем [11], обратившим внимание автора на существование аналогичных решений в задаче о неустановившейся фильтрации газа.

Повторением рассуждений § 1—2 можно построить решения предельного типа также и для уравнений движения газа в пористой среде при цилиндрической и сферической симметрии движения.

Поступила 26 IV 1954

Институт нефти АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, М. — Л., 1951.
2. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ГИТТЛ, М. — Л., 1947.
3. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, т. XVI, вып. 4, 1952.
4. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, т. XVI, вып. 6, 1952.
5. Hartree D. R. On an equation occurring in Falkner and Skan approximate treatment of the boundary layer. Proc. Cambr. Ph. Soc., vol. 33, part I, 1937.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. ГИТТЛ, М. — Л., 1950.
7. Goldstein S. A note on the boundary layer equations. Proc. Cambr. Ph. Soc., vol. 35, 1939.
8. Falkner V. M. and Skan Sylvia W. Some approximate solutions of the boundary layer equations. Aeron. Res. Comm. Rep. and Mem., № 1314, 1930.
9. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. II, ГИТТЛ, М. — Л., 1948.
10. Седов Л. И. О неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ДАН СССР, т. XLVIII, вып. 2, 1945.
11. Станюкович К. П. Об автомодельных решениях уравнений гидродинамики, обладающих центральной симметрией. ДАН СССР, т. XLVIII, вып. 5, 1945.
12. Биркгоф Г. Гидродинамика, И. Л., М. — Л., 1953.