Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ С ЦИРКУЛЯЦИЕЙ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Я. И. Секерж-Зенькович

(Москва)

Метод А. И. Некрасова для решения плоских задач на обтекание тел газом при дозвуковых скоростях подробно изложен в его работе 1944 г. [1]. Настоящая статья посвящена применению этого метода к случаю обтекания с циркуляцией круглого цилиндра.

Напомним основное уравнение задачи. Рассмотрим окружность радиуса a, являющуюся сечением круглого цилиндра, обтекаемого при дозвуковых скоростях плоско-параллельным потоком газа, причем скорость на бесконечности равна $\mathbf{V}_\infty$.

Примем плоскость течения за плоскость x_1y_1 прямоугольных осей координат.

Начало координат O поместим в центре окружности. Ось x_1 направим по вектору $\mathbf{V}_\infty$; ось y_1 направим вертикально вверх.

Если $\varphi(x_1, y_1)$ есть потенциал скоростей, то компоненты u и v скорости $\mathbf{V}$ будут равны: $u = -\partial\varphi/\partial x_1$ и $v = -\partial\varphi/\partial y_1$. Потенциал скоростей $\varphi(x_1, y_1)$ установившегося движения газа удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\left[k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2-n^2\right]+\frac{4}{\gamma-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}+$$
$$+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2-n^2\right]=0 \qquad (0.1)$$

где γ — отношение теплоемкостей газа (для воздуха $\gamma = 1.408$) и

$$k^2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \qquad n^2=\frac{2}{\gamma-1}\,c_\infty^2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right) \qquad \left(M_\infty=\frac{V_\infty}{c_\infty}\right)$$

причем c_∞ — скорость звука на бесконечности; M_∞ — число M на бесконечности, по условию задачи меньшее единицы.

Выполняя преобразование Лежандра и переходя к плоскости годографа, А. И. Некрасов приводит уравнение (0,1) относительно новой искомой функции Φ к виду

$$\tau^2(\tau^2-1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}+\tau(k^2\tau^2-1)\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+(k^2\tau^2-1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=0 \qquad (0.2)$$

где

$$\Phi = x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}-\varphi(x_1, y_1), \qquad V = n\tau \qquad (0.3)$$

и количество θ есть угол вектора скорости $\mathbf{V}$ газа с осью x_1. Связь между координатами x_1, y_1 основной плоскости и координатами τ, θ соответствующих точек годографической плоскости имеет вид:

$$nx_1=-\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+\frac{\sin\theta}{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \qquad ny_1=-\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}-\frac{\cos\theta}{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \qquad (0.4)$$

или

$$\begin{aligned} n(x_1+iy_1)e^{-i\theta} &= nz_1e^{-i\theta}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}-\frac{i}{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \\ n(x_1-iy_1)e^{i\theta} &= n\bar{z}_1e^{i\theta}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+\frac{i}{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \end{aligned} \qquad (0.5)$$

Положим $\tau = \tau_\infty z$, где $\tau_\infty = V_\infty / n$; тогда уравнение (0.2) примет вид:

$$z^2 (\tau_\infty{}^2 z^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + z (k^2 \tau_\infty{}^2 z^2 - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + (k^2 \tau_\infty{}^2 z^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0$$

Введем обозначение

$$\triangle \Phi = z^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \tag{0.6}$$

тогда предыдущему уравнению можно придать вид:

$$\triangle \Phi - \tau_\infty{}^2 k^2 z^2 \triangle \Phi + \tau_\infty{}^2 (k^2 - 1) z^4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{0.7}$$

Полагая

$$\Phi (z, \theta) = \Phi_0 (z, \theta) + \tau_\infty{}^2 \Phi_2 (z, \theta) + \tau_\infty{}^4 \Phi_4 (z, \theta) + \cdots, \tag{0.8}$$

мы придем к основной системе уравнений в методе А. И. Некрасова:

$$\triangle \Phi_0 = 0, \qquad \triangle \Phi_2 = -(k^2 - 1) z^4 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} \tag{0.9}$$

$$\triangle \Phi_4 = k^2 z^2 \triangle \Phi_2 - (k^2 - 1) z^4 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} = -k^2 (k^2 - 1) z^6 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} - (k^2 - 1) z^4 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \text{ и т. д.}$$

Из этой системы видно, что первое приближение, удовлетворяя уравнению Лапласа в переменных z и θ, отвечает движению несжимаемой жидкости.

Легко показать, что

$$\tau_\infty = \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)^{1/2} M_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty{}^2\right)^{-1/2}$$

Отсюда для воздуха $\tau_\infty < M_\infty$; следовательно, τ_∞ является малым параметром, по степеням которого удобно раскладывать в ряд.

Существенная особенность метода А. И. Некрасова заключается в эффективном нахождении потока, обтекающего профиль строго заданной формы, не зависящей от параметров, характеризующих течение, и в требовании выполнения этого условия для каждого приближения.

Задача обтекания окружности без циркуляции с точностью до членов с $\tau_\infty{}^2$, т. е. до членов второго порядка, решалась в упомянутой выше работе А. И. Некрасова при независимых переменных θ и z.

Для упрощения расчета, даваемого в данной работе, А. И. Некрасов предложил вместо действительных независимых переменных θ и z ввести два комплексных сопряженных переменных ζ и ζ_1. При этом в случае бесциркуляционного обтекания окружности эти комплексные переменные отличаются от тех, которые вводятся им для потока с циркуляцией.

§ 1. Постановка задачи для случая обтекания с циркуляцией круглого цилиндра. Для изучения обтекания окружности при наличии циркуляции А. И. Некрасов вводит сопряженные комплексные переменные ζ и ζ_1, положив

$$\begin{gathered} 1 - \lambda^2 - z \cos \theta = \xi, \qquad z \sin \theta = \eta \qquad \left(z = \frac{\tau}{\tau_\infty} = \frac{V}{V_\infty}\right) \\ 1 - \lambda^2 - z e^{-i\theta} = \xi + i\eta = \zeta, \qquad 1 - \lambda^2 - z e^{i\theta} = \xi - i\eta = \zeta_1 \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь, как и раньше, θ — угол вектора скорости с осью x_1; действительная положительная величина λ связана с циркуляцией Γ формулой

$$\frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty} = \frac{\Gamma}{4\pi a n \tau_\infty} = \lambda \tag{1.2}$$

Известно, что при $\lambda < 1$ критические точки потока будут находиться на контуре круга при его обтекании несжимаемой жидкостью.

Напомним, что критических точек две; в обеих $V = 0$; одна является точкой набегания потока, другая — точкой схода.

Как будет показано несколько ниже, в этих переменных просто выражается функция Φ_0, отвечающая течениям с циркуляцией в несжимаемой жидкости.

При $\Gamma = \lambda = 0$ рассматриваемые переменные совпадают с ζ и ζ_1, применяемыми в случае обтекания без циркуляции.

Оператор $\triangle\Phi$ в этих переменных имеет вид:

$$\triangle\Phi = 4z^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta\,\partial\zeta_1} = 4(1-\lambda^2-\zeta)(1-\lambda^2-\zeta_1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta\,\partial\zeta_1} \tag{1.3}$$

Функция Φ ищется в виде ряда (0.8) по степеням τ_∞^2. Система уравнений (0.9) примет вид:

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\zeta\,\partial\zeta_1} = 0, \qquad \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\zeta\,\partial\zeta_1} = -\frac{(k^2-1)}{4} z^2 \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_4}{\partial\zeta\,\partial\zeta_1} = -\frac{(k^2-1)}{4} z^2 \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2} - \frac{k^2(k^2-1)}{4} z^4 \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} \tag{1.5}$$

. . . .

При выражении правых частей (1.4), (1.5) через ζ и ζ_1 будем пользоваться формулой

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{(1-\lambda^2-\zeta)^2}{z^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta\,\partial\zeta_1} + \frac{(1-\lambda^2-\zeta_1)^2}{z^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta_1^2}$$

$$z^2 = (1-\lambda^2-\zeta)(1-\lambda^2-\zeta_1) \tag{1.6}$$

В переменных ζ и ζ_1 формулы (0.4) и (0.5) имеют вид:

$$x_1V_\infty = \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_1}, \qquad y_1V_\infty = i\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_1}\right) \qquad (V_\infty = n\tau_\infty)$$

$$z_1V_\infty = (x_1 + iy_1)V_\infty = 2\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}, \qquad \bar{z}_1V_\infty = (x_1 - iy_1)V_\infty = 2\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_1} \tag{1.7}$$

Обозначив через ω угол радиуса-вектора с осью x_1, рассматриваем параметрические уравнения окружности

$$x_1 = a\cos\omega, \quad y_1 = a\sin\omega, \quad \text{или} \quad x_1 + iy_1 = ae^{i\omega}, \; x_1 - iy_1 = ae^{-i\omega} \tag{1.8}$$

При обтекании окружности $\omega = \frac{1}{2}\pi + \theta$ на верхней полуокружности и $\omega = \frac{3}{2}\pi + \theta$ на нижней. Из этих формул и (1.8) получаем

$$x_1 + iy_1 = \pm aie^{i\theta}, \qquad x_1 - iy_1 = \mp aie^{-i\theta} \tag{1.9}$$

причем знак плюс отвечает верхней части окружности, а знак минус — нижней.

Из соотношений (1.7) и (1.9) найдем граничные условия задачи, из которых сохраним только первое, отбрасывая второе, как комплексно сопряженное первому:

$$\pm aV_\infty ie^{i\theta} = 2\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \tag{1.10}$$

Функция Φ должна быть такой, чтобы из (1.10) величина z определялась как действительная и единственная функция от θ.

Граничное условие (1.10) определяет функцию Φ не прямо, а только при выполнении требования его разрешимости относительно действительной функции z от θ и параметра τ_∞.

Поэтому (1.10) будем в дальнейшем называть *условием разрешимости* на границе.

Ниже будет показано, что при обтекании несжимаемым газом с циркуляцией бесконечно удаленная точка плоскости течения отвечает точке $\zeta = \zeta_1 = -\lambda^2$ плоскости годографа и что относительно выражений $i\lambda + \sqrt{\zeta_1}$ и $-i\lambda + \sqrt{\zeta}$ функции $\partial\Phi / \partial\zeta$ и $\partial\Phi / \partial\zeta_1$ не должны иметь других особенностей, кроме логарифмических и полюсов первого порядка.

Из предыдущего вытекает, что коэффициенты ряда (0.8) и соответствующие приближения для функции Φ должны быть определены так, чтобы выполнялись следующие условия:

во-первых, функции Φ_0, Φ_2, Φ_4 были бы действительными функциями двух сопряженных комплексных переменных ζ и ζ_1;

во-вторых, функция Φ_0 отвечала бы циркуляционному обтеканию окружности несжимаемой жидкостью или, что равносильно, эта функция удовлетворяла бы первому уравнению из системы (1.4) и условиям разрешимости на границе (1.10);

в-третьих, функции $\Phi_2(\zeta, \zeta_1)$, $\Phi_4(\zeta, \zeta_1), \ldots$ удовлетворяли бы уравнениям системы (1.4) и (1.5); соответствующее приближение для Φ удовлетворяло бы условиям разрешимости на границе (1.10);

в-четвертых, первые частные производные от функций $\Phi_0, \Phi_2, \Phi_4, \ldots$ по ζ и по ζ_1 имели бы относительно выражений $-i\lambda + \sqrt{\zeta}$ и $i\lambda + \sqrt{\zeta_1}$ только логарифмические особенности и полюсы первого порядка; обращаясь в бесконечность при $\zeta = \zeta_1 = -\lambda^2$, эти производные были бы ограниченными при всех других значениях ζ и ζ_1, отвечающих области течения;

в-пятых, величины Γ и, следовательно, λ считались бы заданными константами; заданными постоянными были бы скорость V_∞ и ее направление;

в-шестых, во всех приближениях бесконечно удаленной точке плоскости течения отвечали бы одни и те же значения $\zeta = \zeta_1 = -\lambda^2$ и при всех $z_1, \overline{z_1}$ в области течения ζ и ζ_1 были бы голоморфными функциями τ_∞; кроме того, очевидно, скорости течения были бы конечными всюду на и вне цилиндра (условие регулярности потока).

Как уже сказано, из условия (1.10) величину z надо иметь возможность определить как действительную функцию θ. Будет показано, что в соответствующем приближении это всегда можно единственным образом сделать, добавляя соответствующие решения однородного уравнения из (1.4). При этом будем искать $z(\tau_\infty, \theta)$ в виде следующего ряда по степеням τ_∞:

$$z(\tau_\infty, \theta) = z(0, \theta) + \tau_\infty \left(\frac{\partial z}{\partial \tau_\infty}\right)_0 + \frac{\tau_\infty^2}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \tau_\infty^2}\right)_0 + \cdots \tag{1.11}$$

Здесь индекс «нуль» у скобок указывает значение производных при $\tau_\infty = 0$.

§ 2. Вычисление исходного приближения и о допустимых особенностях для функции Ф. 1 *Определение функции* $\Phi_0(\zeta, \zeta_1)$. Функцию Φ_0 определяем наиболее простым способом, указанным Л. К. Кудряшовым [2]. Согласно этому способу, наряду с функцией Φ_0, удовлетворяющей соотношению

$$\Phi_0 = -\varphi_0 - x_1 u_0 - y_1 v_0$$

рассмотрим функцию Ψ_0, определяемую формулой

$$\Psi_0 = -\psi_0 - y_1 u_0 + x_1 v_0$$

Здесь u_0 и v_0 являются проекциями на оси координат скорости несжимаемой жидкости, ψ_0 — соответствующая функция тока.

Комплексный потенциал скоростей $w_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ и комплексная функция преобразования Лежандра

$$W_0 = \Phi_0 + i\Psi_0 \tag{2.1}$$

связаны, очевидно, соотношением

$$W_0 = -w_0 + z_1 \frac{dw_0}{dz_1} \tag{2.2}$$

Зная w_0 и разделяя в равенстве (2.2) действительную и мнимую части, мы и сможем получить функции Φ_0 и Ψ_0. Применим этот прием к определению функции Φ_0 в нашем случае.

Для обтекания окружности в несжимаемой жидкости с циркуляцией имеем

$$w_0 = -V_\infty\left(z_1 + \frac{a^2}{z_1}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{z_1}{a}\right)$$

где Γ, как уже указано, есть постоянная циркуляция. Так как $dw_0/dz_1 = -Ve^{-i\theta}$, то получим

$$V_\infty\left(1 - \frac{a^2}{z_1^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z_1} = Ve^{-i\theta}$$

или, полагая $z = \tau/\tau_\infty = V/V_\infty$, еще иначе

$$1 - \left(\frac{a}{z_1}\right)^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi a V_\infty}\left(\frac{a}{z_1}\right) = ze^{-i\theta}$$

В силу (1.2) находим

$$\left(\frac{a}{z_1}\right)^2 + 2i\lambda\left(\frac{a}{z_1}\right) - (1 - ze^{-i\theta}) = 0$$

Отсюда

$$\frac{a}{z_1} = -i\lambda \pm \sqrt{1 - ze^{-i\theta} - \lambda^2} \tag{2.3}$$

Здесь перед радикалом взят знак плюс, так как $z \to 1$, $\theta \to 0$ при $z_1 \to \infty$. После этого уже нетрудно найти выражение для W_0 через переменные z и θ. В самом деле, согласно (2.2) имеем

$$W_0 = 2V_\infty a\left(\frac{a}{z_1}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{z_1}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}$$

Отсюда, пользуясь формулой (2.3), получим

$$W_0 = 2V_\infty(-i\lambda + \sqrt{1 - ze^{-i\theta} - \lambda^2}) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(-i\lambda + \sqrt{1 - ze^{-i\theta} - \lambda^2}) + \frac{i\Gamma}{2\pi}$$

Чтобы найти функцию Φ_0, достаточно составить полусумму W_0 и сопряженной с нею функции $\overline{W}_0$.

Таким образом, будет

$$\Phi_0 = V_\infty a \left(\sqrt{1 - ze^{-i\theta} - \lambda^2} + \sqrt{1 - ze^{i\theta} - \lambda^2}\right) +$$
$$+ \frac{i\Gamma}{4\pi} \ln\left(-i\lambda + \sqrt{1 - ze^{-i\theta} - \lambda^2}\right) - \frac{i\Gamma}{4\pi} \ln\left(i\lambda + \sqrt{1 - ze^{i\theta} - \lambda^2}\right) \quad (2.4)$$

Введя ζ и ζ_1 согласно (1.1) и так как в силу (1.2) $\Gamma = 4\pi a\lambda V_\infty$, то из (2.4) получим

$$\Phi_0 = V_\infty a \left[\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta_1} + i\lambda \ln\left(-i\lambda + \sqrt{\zeta}\right) - i\lambda \ln\left(i\lambda + \sqrt{\zeta_1}\right)\right] \quad (2.5)$$

Чтобы найти распределение скоростей, вычисляем

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} = \frac{V_\infty a}{2} \frac{1}{-i\lambda + \sqrt{\zeta}} \quad (2.6)$$

Отсюда и из выражения $\partial\Phi_0 / \partial\zeta_1$ согласно (1.7) следует, что $z_1 \to \infty$ при $\zeta = \zeta_1 = -\lambda^2$. Подставив (2.6) в (1.10), определяем:

$$\zeta = -\left(e^{-2i\theta} \mp 2\lambda e^{-i\theta} + \lambda^2\right).$$

Пользуясь выражением (1.1) для ζ, находим

$$z = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \mp 2\lambda = 2\left(\cos\theta \mp \lambda\right) \quad (2.7)$$

Это есть известное распределение скоростей на круге при его обтекании с циркуляцией несжимаемой жидкостью.

Напомним, что знак плюс отвечает точкам, лежащим под осью x_1, и знак минус соответствует точкам, лежащим над осью x_1.

2. *О допустимых особенностях для Φ как функции ζ и ζ_1.* Мы определили функцию Φ_0 и показали, что ее первые производные по ζ и ζ_1 имеют полюсы первого порядка относительно $-i\lambda + \sqrt{\zeta}$ и $i\lambda + \sqrt{\zeta_1}$.

Покажем, что и в следующих приближениях первые производные от функции Φ по ζ и ζ_1 не должны иметь полюсов порядка выше первого относительно тех же выражений; допустимы, однако, логарифмические особенности.

Пусть во втором приближении $\partial\Phi / \partial\zeta$ имеет вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = \frac{aV_\infty}{2\left(-i\lambda + \sqrt{\zeta}\right)} + \frac{\tau_\infty^2}{2} \frac{aV_\infty \alpha}{\left(-i\lambda + \sqrt{\zeta}\right)^2} \qquad (\alpha = \mathrm{const})$$

Подставив это выражение в (1.7), после очевидных преобразований найдем

$$-i\lambda + \sqrt{\zeta} = \frac{a}{z_1}\left(1 + \frac{\tau_\infty^2 \alpha}{-i\lambda + \sqrt{\zeta}}\right).$$

Это уравнение применим для определения на плоскости ζ точки, отвечающей $z_1 = \infty$.

Из него в первом приближении $-i\lambda + \sqrt{\zeta} = 0$ или $\zeta = -\lambda^2$, во втором приближении $-i\lambda + \sqrt{\zeta} = \tau_\infty^2 \alpha$ или $\zeta = -\lambda^2 + 2i\lambda\alpha\tau_\infty^2$. Это соотношение показывает, что мы пришли к противоречию с шестым условием задачи.

Наличие полюсов более высокого порядка также приведет нас к противоречию. Только наличие полюсов первого порядка и логарифмических особенностей вида $N \ln(-i\lambda + \sqrt{\zeta})$ и $N_1 \ln(i\lambda + \sqrt{\zeta_1})$ оказывается допустимым (N и N_1 — постоянные или голоморфные функции).

Обращаясь к исследованию поля скоростей, укажем только следующее. Можно показать, что наличие у первых производных функции Φ полюсов второго порядка приводит к нарушению пятого условия задачи: V_∞ будет зависеть от τ_∞. Полюсы же порядка выше второго приведут к бесконечно большим скоростям в бесконечности. Наличие логарифмических особенностей у тех же производных не нарушает регулярности потока.

Не приводя этого исследования, укажем только, что проще всего воспользоваться следующим выражением для потенциала скоростей:

$$\varphi = x_1 V_\infty\left(1 - \lambda^2 - \frac{\zeta + \zeta_1}{2}\right) + y_1 V_\infty \frac{i(\zeta - \zeta_1)}{2} - \Phi \tag{2.8}$$

Эта формула легко получается из (0.3), если перейти в ней к переменным ζ и ζ_1.

§ 3. Определение функции $\Phi_2(\zeta, \zeta_1)$ и соответствующего распределения скоростей. Вычисляем правую часть второго уравнения (1.4), пользуясь (2.5) и (1.6). В результате для Φ_2 получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial\zeta\, \partial\zeta_1} = \frac{k^2 - 1}{16} V_\infty a \left[(1 - \lambda^2 - \zeta)^2 \frac{\zeta^{-1/2}}{(-i\lambda + \sqrt{\zeta})^2} + (1 - \lambda^2 - \zeta_1)^2 \frac{\zeta_1^{-1/2}}{(i\lambda + \sqrt{\zeta_1})^2}\right] \tag{3.1}$$

Производя интеграции, находим $\Phi_{21}(\zeta, \zeta_1)$ — частное решение неоднородного уравнения (3.1), обращающееся в нуль при $\zeta = \zeta_1 = 0$:

$$\begin{aligned}\Phi_{21}(\zeta, \zeta_1) = {} & \frac{k^2 - 1}{16} V_\infty a \zeta_1 \Big\{2\left[\tfrac{1}{3}\zeta^{3/2} + i\lambda\zeta - (\lambda^2 + 2)\zeta^{1/2}\right] - \\ & - \frac{2}{-i\lambda + \sqrt{\zeta}} - 8i\lambda \ln(-i\lambda + \sqrt{\zeta})\Big\} + \\ & + \frac{k^2 - 1}{16} V_\infty a \zeta \Big\{2\left[\tfrac{1}{3}\zeta_1^{3/2} - i\lambda\zeta_1 - (\lambda^2 + 2)\zeta_1^{1/2}\right] - \\ & - \frac{2}{i\lambda + \sqrt{\zeta_1}} + 8i\lambda \ln(i\lambda + \sqrt{\zeta_1})\Big\}\end{aligned} \tag{3.2}$$

Далее, представляя решение уравнения (3.1) в виде $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$, где Φ_{22} — решение однородного уравнения (3.1), удовлетворим граничному условию (1.10).

Для соответствующего приближенного значения Φ получим

$$\Phi = \Phi_0 + \tau_\infty^2 (\Phi_{21} + \Phi_{22}) \tag{3.3}$$

Подставляем эту величину в условие (1.10):

$$\pm a V_\infty i e^{i\theta} = 2\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta} + 2\tau_\infty^2\left(\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial\zeta}\right) \tag{3.4}$$

Отсюда в силу (2.5) после умножения на $-i\lambda + \sqrt{\zeta}$ имеем

$$\pm a V_\infty i e^{i\theta}(-i\lambda + \sqrt{\zeta}) = V_\infty a + 2\tau_\infty^2(-i\lambda + \sqrt{\zeta})\left(\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial\zeta}\right)$$

Выполнив очевидные преобразования, найдем

$$\sqrt{\zeta} = i\lambda \mp ie^{-i\theta} \mp \frac{2\tau_\infty^2}{aV_\infty} ie^{-i\theta}(-i\lambda + \sqrt{\zeta})\left(\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial\zeta}\right)$$

Обе части этого равенства возводим в квадрат, сохраняя только члены с τ_∞^2:

$$\zeta = -\lambda^2 \pm 2\lambda e^{-i\theta} - e^{-2i\theta} \pm \frac{4\tau_\infty^2}{aV_\infty}(\lambda \mp e^{-i\theta})e^{-i\theta}(-i\lambda + \sqrt{\zeta})\left(\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial\zeta}\right)$$

Подставляем только в левую часть этого соотношения явное выражение ζ из (1.1); в результате после простых вычислений получим

$$z = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \mp 2\lambda \mp \frac{4\tau_\infty{}^2}{aV_\infty}(\lambda \mp e^{-i\theta})(-i\lambda + \sqrt{\zeta})\left(\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial\zeta}\right)$$

Отсюда определяем коэффициенты ряда (1.11). Вычисляя производные и полагая $\tau_\infty = 0$, находим

$$z(0, \theta) = 2(\cos\theta \mp \lambda), \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial\tau_\infty}\right)_0 = 0 \tag{3.5}$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\tau_\infty{}^2}\right)_0 = \frac{8}{aV_\infty}(\lambda \mp e^{-i\theta})(-i\lambda + \sqrt{\zeta})_0\left[\left(\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial\zeta}\right)_0 + \left(\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial\zeta}\right)_0\right]$$

В этих формулах значок нуль, как и раньше, означает, что соответствующие величины надо взять при $\tau_\infty = 0$. Для этого подсчета нужно воспользоваться равенствами, содержащими ζ:

$$-i\lambda + (\sqrt{\zeta})_0 = \mp ie^{-i\theta}, \quad [-i\lambda + (\sqrt{\zeta})_0]^{-1} = \pm ie^{i\theta}, \quad [-i\lambda + (\sqrt{\zeta})_0]^{-2} = -e^{2i\theta}$$

$$(\sqrt{\zeta})_0 = i(\lambda \mp e^{-i\theta}), \quad (\zeta)_0 = -(\lambda^2 \mp 2\lambda e^{-i\theta} + e^{-2i\theta})$$

$$(\zeta^{3/2})_0 = -i(\lambda^3 \mp 3\lambda^2 e^{-i\theta} + 3\lambda e^{-2i\theta} \mp e^{-3i\theta}) \tag{3.6}$$

$$(\zeta^{-1/2})_0 = -i(\lambda \mp e^{-i\theta})^{-1}$$

и аналогичными комплексно сопряженными равенствами, содержащими ζ_1.

Функция $\Phi_{22}(\zeta, \zeta_1)$ определяется так, чтобы значение $\partial^2 z / \partial\tau_\infty{}^2$ было величиной действительной и функция Φ_2 удовлетворяла четвертому условию решаемой задачи (см. § 1).

Покажем, что $\partial\Phi_{21} / \partial\zeta$ имеет полюс второго порядка. Интегрируя первое слагаемое правой части (3.1) по ζ_1, имеем

$$\frac{k^2-1}{16}V_\infty a\zeta_1(1-\lambda^2-\zeta)^2\frac{\zeta^{-1/2}}{(-i\lambda+\sqrt{\zeta})^2}$$

Разлагая это выражение по степеням $-i\lambda + \sqrt{\zeta}$ и $i\lambda + \sqrt{\zeta_1}$, получим слагаемое с множителем вида

$$\frac{i\lambda}{(-i\lambda + \sqrt{\zeta})^2}$$

Следовательно, чтобы его уничтожить, надо как одно из слагаемых у функции Φ_{22} взять выражение

$$-\frac{k^2-1}{16}V_\infty a\int_0^\zeta \frac{i\lambda\, d\zeta}{(-i\lambda + \sqrt{\zeta})^2} \tag{3.7}$$

Для удовлетворения условию разрешимости на границе (1.10) и учитывая слагаемое (3.7), берем Φ_{22} в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{22}=\frac{(k^2-1)}{16}V_\infty a\Big\{&a_1\zeta\ln(-i\lambda+\sqrt{\zeta})+b\,[\sqrt{\zeta}+i\lambda\ln(-i\lambda+\sqrt{\zeta})]+c\zeta+d\zeta^{3/2}+\\
&+\bar a_1\zeta_1\ln(i\lambda+\sqrt{\zeta_1})+\bar b\,[\sqrt{\zeta_1}-i\lambda\ln(i\lambda+\sqrt{\zeta_1})]+\bar c\zeta_1+\bar d\zeta_1^{3/2}-\\
&-i\lambda\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{(-i\lambda+\sqrt{\zeta})^2}+i\lambda\int_0^{\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{(i\lambda+\sqrt{\zeta_1})^2}\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial\zeta}=\frac{(k^2-1)\,V_\infty a}{16}\Big\{&a_1\Big[\ln(-i\lambda+\sqrt{\zeta})+\frac{1}{2}\,\frac{\zeta^{1/2}}{-i\lambda+\sqrt{\zeta}}\Big]+\\
&+\frac{1}{2}\,\frac{b}{(-i\lambda+\sqrt{\zeta})}+c+\frac{3}{2}d\zeta^{1/2}-\frac{i\lambda}{(-i\lambda+\sqrt{\zeta})^2}\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Здесь a_1, b, c и d — постоянные коэффициенты, которые определятся из (1.10); черта над ними указывает комплексную сопряженность. Члены с этими коэффициентами удовлетворяют четвертому условию.

Подставляем в правую часть последней формулы (3.5) величину $\partial\Phi_{22}/\partial\zeta$ из (3.9) и $\partial\Phi_{21}/\partial\zeta$ из (3.2); воспользовавшись таблицей (3.6), получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(k^2-1)\Big\{\Big[(1-\lambda+\lambda^2)(\lambda^4-\lambda^3+9\lambda^2+2)-\lambda^2-\frac{2}{3}\Big]e^{i\theta}+\\
&+\Big(\frac{4}{3}\lambda^4-2\lambda^3-2\lambda^2-3\Big)e^{-i\theta}\mp4\lambda\Big(\lambda^4-\lambda^3+4\lambda^2-\lambda+\frac{7}{4}\Big)\mp\\
&\mp\Big[2\lambda(1-\lambda+\lambda^2)(3-\lambda+\lambda^2)-\frac{2}{3}\lambda\Big]e^{2i\theta}\pm\frac{2}{3}\lambda^3e^{-2i\theta}+\\
&+(1-\lambda+\lambda^2)e^{3i\theta}+(\lambda^2+2)e^{-3i\theta}-8\,[\ln(\pm i)+i\theta]\,\lambda(\lambda e^{-i\theta}\mp e^{-2i\theta})+\\
&+ia_1[-\ln(\pm i)-i\theta](\lambda e^{-i\theta}\mp e^{-2i\theta})\mp\frac{1}{2}ia_1(\lambda^2\mp\lambda e^{-i\theta})+\\
&+\frac{1}{2}ia_1(\lambda e^{-i\theta}\mp e^{-2i\theta})+\frac{1}{2}be^{-i\theta}\mp\frac{1}{2}\lambda b+ic\lambda e^{-i\theta}\mp ice^{-2i\theta}-\\
&-\frac{3}{2}d\lambda^2e^{-i\theta}\pm\frac{3}{2}d\lambda e^{-2i\theta}\pm\frac{3}{2}d\lambda e^{-2i\theta}-\frac{3}{2}de^{-3i\theta}\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Выделяя здесь действительные слагаемые и приравнивая нулю оставшиеся комплексные члены, приходим к уравнениям

$$
-ia_1-8\lambda=0,\qquad \lambda^2+2-1+\lambda-\lambda^2-\frac{3}{2}d=0
$$

$$
2\lambda(1-\lambda+\lambda^2)(3-\lambda+\lambda^2)-\frac{2}{3}\lambda+\frac{2}{3}\lambda^3-ic+3d\lambda-\frac{1}{2}ia_1=0
$$

$$
\begin{aligned}
&-(1-\lambda+\lambda^2)(\lambda^4-\lambda^3+9\lambda^2+2)+\lambda^2+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\lambda^4-\\
&\qquad-2\lambda^3-2\lambda^2-3+ia_1\lambda+\frac{1}{2}b+ic\lambda-\frac{3}{2}d\lambda^2=0
\end{aligned}
$$

Решая эту систему, находим для искомых коэффициентов:

$$
\begin{aligned}
&ia_1=-8\lambda,\quad d=\frac{2}{3}(\lambda+1),\quad ic=2\lambda(1-\lambda+\lambda^2)(3-\lambda+\lambda^2)+\frac{16}{3}\lambda+2\lambda^2+\frac{2}{3}\lambda^3\\
&\frac{1}{2}b=(1-\lambda+\lambda^2)(2+3\lambda^2+\lambda^3-\lambda^4)-2\lambda^4+\lambda^3+\frac{14}{3}\lambda^2+\frac{7}{3}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Подставив эти значения коэффициентов в (3.10), получим выделенную действительную величину, равную искомой $(\partial^2 z / \partial \tau_\infty^2)_0$. Учтя это значение и формулы (3.5), находим согласно (1.11) распределение скоростей на цилиндре:

$$z = 2\cos\theta \mp 2\lambda + \tfrac{1}{4}(k^2-1)\tau_\infty^2 \Big\{2(1-\lambda+\lambda^2)\cos 3\theta \mp$$
$$\mp 4\left[\lambda(1-\lambda+\lambda^2)(3-\lambda+\lambda^2)-\frac{\lambda}{3}\right]\cos 2\theta + 2\left[(1-\lambda+\lambda^2)(\lambda^4-\lambda^3+9\lambda^2+2)-\right.$$
$$\left.-\lambda^2-\tfrac{2}{3}\right]\cos\theta \mp 4\lambda\left(\lambda^4-\lambda^3+4\lambda^2-\lambda+\tfrac{7}{4}\right)\Big\} \qquad (3.12)$$

Отсюда при $\lambda = 0$ получим выражение, отвечающее обтеканию без циркуляции:

$$z = 2\cos\theta + (k^2-1)\tau_\infty^2\left(\tfrac{1}{2}\cos 3\theta + \tfrac{2}{3}\cos\theta\right) \qquad (3.13)$$

Из проделанных расчетов видно, что при взятой функции Φ_{22} из (3.8) для распределения скоростей получается единственное выражение (у Φ_{22} отброшена произвольная постоянная, не влияющая на распределение скоростей).

Если к функции Φ_{22} добавлять выражения с высшими степенями $q(\zeta^{1/2})^k + \bar{q}(\zeta_1^{1/2})^k$, например $d_1\zeta^2 + \bar{d}_1\zeta_1^2$ и т. д., то при удовлетворении условию (1.10) коэффициенты d_1 и т. д. все окажутся равными нулю, потому что в (1.10), в рассматриваемом приближении, нет членов, подобных тем, которые отвечают этим добавочным решениям.

Отсюда непосредственно вытекает единственность построенной функции Φ_2 и соответствующего распределения скоростей (3.12).

Естественным является вопрос о положении критических точек во втором приближении.

Для определения этих точек надо левую часть (3.12) приравнять нулю и из полученного уравнения найти θ при фиксированных λ и τ_∞. По теореме о неявных функциях это уравнение при малых $|\tau_\infty|$ будет иметь два действительных решения (благодаря слагаемым $\mp\lambda$), которые будут мало отличаться от корней исходного уравнения, получающегося при $\tau_\infty = 0$.

Следовательно, и во втором приближении критические точки остаются на цилиндре.

В заключение отметим, что методом, которым найдено Φ_2, можно получить и Φ_4.

Поступила 2 IV 1954

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов А. И. О плоско-параллельном движении газа при дозвуковых скоростях. ПММ, т. VIII, вып. 4, 1944.
2. Кудряшов Л. К. Обтекание эллипса плоско-параллельным потоком газа. ПММ, т. XI, вып. 1, 1947.