Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

БЕЗИНЕРЦИОННЫЕ ЛАМИНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ

И. В. Петухов

(Москва)

В работе даны точные решения для случая безинерционных ламинарных течений вязкого газа в плоских каналах. Уравнения движения и уравнение притока тепла для этого случая интегрируются в общем виде во всем диапазоне изменения приведенной скорости и при произвольной зависимости физических параметров газа (коэффициентов вязкости, коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости) от температуры.

1. Исходная система уравнений. Рассмотрим установившиеся течения газа при отсутствии массовых сил и притока тепла от излучения. Исходная система уравнений имеет вид:

уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0 \tag{1.1}$$

уравнение Навье-Стокса

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \operatorname{div} \Pi \tag{1.2}$$

уравнение притока тепла [1] (1.3)

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + Jc_v T\right) = \operatorname{div}\left(J\eta \operatorname{grad} T + \mu \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} + \mu \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nu \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V}\right)$$

Уравнение (1.3) справедливо как для несжимаемой жидкости, так и для газа. В случае газа к нему надо добавить уравнение состояния

$$\frac{p}{\rho} = J(c_p - c_v)\, T \tag{1.4}$$

В формулах (1.1)—(1.4) приняты следующие обозначения: t — время, Π — тензор напряжений, $\mathbf{V}$ — вектор скорости, v — модуль вектора скорости, ρ — плотность, p — давление, T — абсолютная температура, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, c_v — теплоемкость при постоянном объеме, μ — коэффициент вязкости, ν — второй коэффициент вязкости, J — механический эквивалент тепла.

Выпишем формулы для записи уравнений (1.1) — (1.3) в любой системе криволинейных ортогональных координат q_m $(m = 1, 2, 3)$.

---

[1] Уравнение притока тепла в форме (1.3) нетрудно получить, исходя из его обычного вида[1]:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} v^2 + Jc_v T\right) = \operatorname{div}(J\eta \operatorname{grad} T) + \frac{\partial \mathbf{P}_x \mathbf{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y \mathbf{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z \mathbf{V}}{\partial z}$$

используя уравнение неразрывности (1.1).

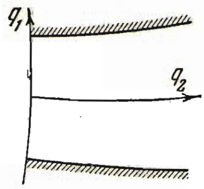
Для составляющих $d\mathbf{V}/dt$ и расхождения тензора напряжений $\mathrm{div}\,\Pi$ на координатные оси q_m имеем [1, 2]

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_m = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{v_k}{H_m H_k}\frac{\partial v_m H_m}{\partial q_k} - \frac{v_k^2}{H_m H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_m}\right) \tag{1.5}$$

$$\left(\mathrm{div}\,\Pi\right)_m = \frac{1}{H_m}\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(H_1H_2H_3\frac{H_m}{H_k}p_{mk}\right) - \frac{p_{kk}}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_m}\right] \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} p_{kk} = -p + \nu\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} + \frac{2\mu}{H_k}\left(\frac{\partial v_k}{\partial q_k} - \frac{v_k}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_k} + \sum_{m=1}^{3}\frac{v_m}{H_m}\frac{\partial H_k}{\partial q_m}\right) \\ p_{km} = \mu\left(\frac{1}{H_m}\frac{\partial v_k}{\partial q_m} + \frac{1}{H_k}\frac{\partial v_m}{\partial q_k} - \frac{v_k}{H_kH_m}\frac{\partial H_k}{\partial q_m} - \frac{v_m}{H_mH_k}\frac{\partial H_m}{\partial q_k}\right) \quad (m \neq k) \end{gathered} \tag{1.7}$$

где p_{km} — составляющие тензора направлений, v_m — составляющие вектора скорости, H_m — параметры Ламе.



Фиг. 1

Остальные дифференциальные выражения, входящие в уравнения (1.1), (1.3), определяются формулами

$$\mathrm{div}\,\mathrm{S} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_m}\left(H_1H_2H_3\frac{s_m}{H_m}\right)$$

$$(\mathrm{grad}\,\sigma)_m = \frac{1}{H_m}\frac{\partial\sigma}{\partial q_m}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = \sum_{m=1}^{3}\frac{v_m}{H_m}\frac{\partial\sigma}{\partial q_m} \tag{1.8}$$

где σ — любая скалярная, а S — векторная функции, а $(\mathrm{S})_m = s_m$ — физические составляющие вектора S.

Рассмотрим теперь течение в плоском канале (фиг. 1). За координатные линии q_2 возьмем прямые, нормальные к плоскости чертежа. Ограничимся случаем, когда все параметры течения не зависят от q_2. Тогда плоскую систему ортогональных криволинейных координат q_1, q_3 всегда можно выбрать так, чтобы проекция скорости на ось q_1 равнялась нулю. В выбранной таким образом координатной системе будем иметь

$$H_2 = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial q_2} = 0, \qquad v_1 = 0 \tag{1.9}$$

Исходная система уравнений для газа примет с учетом (1.5)—(1.9) следующий вид.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho v_3 H_1}{\partial q_3} = 0 \tag{1.10}$$

Уравнение притока тепла

$$\begin{gathered} \frac{\rho v_3}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{v^2}{2} + Jc_pT\right) = \frac{1}{H_1H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}H_3\left(\frac{J\eta}{H_1}\frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\mu}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{v^2}{2} - \right.\right. \\ \left.\left. - \mu\frac{v_3^2}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}H_1\left(\frac{J\eta}{H_3}\frac{\partial T}{\partial q_3} + \frac{\mu}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{v^2}{2} + \mu\frac{v^3}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial q_3} + \nu\frac{v_3}{H_1H_3}\frac{\partial v_3H_1}{\partial q_3}\right)\right] \end{gathered} \tag{1.11}$$

Уравнения движения

$$\rho\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_m = (\mathrm{div}\,\Pi)_m \qquad (m = 1, 2, 3) \tag{1.12}$$

где

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_1 = -\frac{v_3^2}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}, \qquad \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_2 = \frac{v_3}{H_3}\frac{\partial v_2}{\partial q_3}, \qquad \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_3 = \frac{v_3}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial q_3} \tag{1.13}$$

$$(\operatorname{div}\Pi)_1 = \frac{1}{H_1}\left[\frac{1}{H_1H_3}\left(\frac{\partial H_1H_3p_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial H_1^2 p_{13}}{\partial q_3}\right) - \frac{p_{11}}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_1} - \frac{p_{33}}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right]$$

$$(\operatorname{div}\Pi)_2 = \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial H_3 p_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial H_1 p_{23}}{\partial q_3}\right) \tag{1.14}$$

$$\ldots \frac{1}{H_3}\left[\frac{1}{H_1H_3}\left(\frac{\partial H_3^2 p_{31}}{\partial q_1} + \frac{\partial H_1H_3p_{33}}{\partial q_3}\right) - \frac{p_{11}}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{p_{33}}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_3}\right]$$

$$\ldots + \frac{\nu}{H_1H_3}\frac{\partial v_3H_1}{\partial q_3} + \frac{2\mu}{H_1H_3} v_3 \frac{\partial H_1}{\partial q_3}, \qquad p_{12} = \frac{\mu}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}$$

$$\ldots_{22} = -p + \frac{\nu}{H_1H_3}\frac{\partial v_3H_1}{\partial q_3}, \qquad p_{23} = \frac{\mu}{H_3}\frac{\partial v_2}{\partial q_3} \tag{1.15}$$

$$\ldots \frac{\nu}{H_1H_3}\frac{\partial v_3H_1}{\partial q_3} + \frac{2\mu}{H_3}\frac{\partial v_3}{\partial q_3}, \qquad p_{31} = \mu\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial q_1} - \frac{v_3}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right)$$

…но, что такие безинерционные течения, если они суще-…ть двух типов:

$$v_2 = 0, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial q_3} = 0, \qquad \frac{\partial H_3}{\partial q_1} = 0 \tag{1.16}$$

$$v_3 = 0 \tag{1.17}$$

Так как линии тока в безинерционном течении могут быть только прямыми, то течения первого типа — безинерционные осевые течения — могут существовать лишь в каналах с прямолинейными стенками. Можно показать, что течения вида (1.9), (1.6) существуют только в цилиндрических координатах. Течения второго вида — безинерционные окружные течения — могут существовать в каналах произвольной формы.

2. Осевые безинерционные течения. Рассмотрим осевые течения (фиг. 2а, 2б) в цилиндрической системе координат

$$q_1 = \varphi, \qquad q_2 = y, \qquad q_3 = R + \zeta, \qquad H_1 = R + \zeta, \qquad H_3 = 1$$

Исходная система (1.10)—(1.15) примет с учетом (1.16) вид:

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial \rho (R+\zeta)}{\partial \zeta} = 0 \tag{2.1}$$

$$(R+\zeta)\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[(R+\zeta)^2 p_{\zeta\varphi}\right] = 0, \quad \frac{\partial p_{\zeta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}[(R+\zeta)p_{\zeta\zeta}] - p_{\varphi\varphi} = 0 \tag{2.2}$$

$$p_{\varphi\varphi} = -p + (\nu + 2\mu)\frac{v_\zeta}{R+\zeta}, \qquad p_{\zeta\varphi} = \frac{\mu}{R+\zeta}\frac{dv_\xi}{d\varphi} \tag{2.3}$$

$$p_{\zeta\zeta} = p_{yy} = -p + \nu\frac{v_\zeta}{R+\zeta}, \qquad p_{\varphi y} = p_{y\zeta} = 0$$

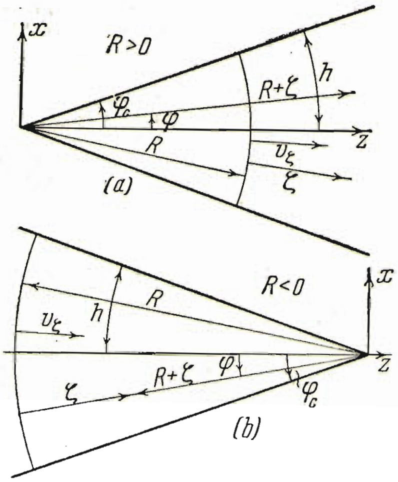
$$\rho v_\zeta \frac{\partial J c_p T}{\partial \zeta} = \frac{1}{R+\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{R+\zeta}\left(J\eta\frac{\partial T}{\partial\varphi} + \mu\frac{d}{d\varphi}\frac{v_\zeta^2}{2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(R+\zeta)J\eta\frac{\partial T}{\partial\zeta} + \nu v_\zeta^2\right]\right\} \tag{2.4}$$

Задача состоит в интегрировании этой системы уравнений при краевом условии на стенках канала

$$v_\zeta(\varphi_c) = v_\zeta(-\varphi_c) = 0 \qquad (2.5)$$

Можно показать, что при постоянных физических параметров газа

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0 \qquad (2.6)$$



Фиг. 2

Примем условие (2.6) за исходное и в случае, когда физические параметры газа (μ, ν, η, c_p) являются функциями температуры. Тогда будем иметь с учетом (2.1), (2.3), (1.4)

$$\rho = \frac{\rho_R}{1+\zeta/R}, \qquad p = \frac{p_R}{1+\zeta/R} \qquad (2.7)$$

$$p_{\varphi\varphi} = \frac{p_{\varphi\varphi R}}{1+\zeta/R}, \qquad p_{\zeta\varphi} = \frac{p_{\zeta\varphi R}}{1+\zeta/R}$$

$$p_{\zeta\zeta} = p_{yy} = \frac{p_{\zeta\zeta R}}{1+\zeta/R}$$

где индекс R внизу обозначает значение функции в сечении $\zeta = 0$. Система (2.2) принимает вид

$$\frac{dp_{\varphi\varphi R}}{d\varphi} = -p_{\zeta\varphi R}, \qquad p_{\varphi\varphi R} = \frac{dp_{\zeta\varphi R}}{d\varphi}$$

Общий интеграл этой системы

$$p_{\varphi\varphi R} = -c_2\sin\varphi - c_1\cos\varphi, \qquad p_{\varphi\zeta R} = -c_1\sin\varphi + c_2\cos\varphi \qquad (2.8)$$

Найдем выражения для скорости и давления. Из (2.3) получим с учетом (2.8)

$$\frac{\mu}{R}\frac{dv_\zeta}{d\varphi} = -c_1\sin\varphi + c_2\cos\varphi, \qquad p_R = c_2\sin\varphi + c_1\cos\varphi + \frac{\nu+2\mu}{R}v_\zeta \qquad (2.9)$$

Заметим теперь, что в силу (2.1), (2.6) скорость можно считать функцией только температуры и обратно. Обозначим

$$v_\zeta^\times = \int_0^{v_\zeta} \mu^\circ(v_\zeta)\,dv_\zeta \qquad (2.10)$$

Здесь и в дальнейшем индексом $^\circ$ наверху будем обозначать отношение функции к ее значению на стенке при одинаковых ζ. Индексами c и m внизу будем обозначать значения функции на стенке и на оси симметрии канала соответственно. Функция $v_\zeta^\times$ должна в силу (2.5) удовлетворять условиям

$$v_\zeta^\times(\varphi_c) = v_\zeta^\times(-\varphi_c) = 0 \qquad (2.11)$$

Интеграл первого уравнения (2.9)

$$\frac{\mu_c}{R}v_\zeta^\times = c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi - c_3$$

и условия (2.11) дадут

$$c_1 = \frac{\mu_c}{R}\frac{v_{\zeta m}^\times}{1-\cos\varphi_c}, \qquad c_2 = 0, \; c_3 = c_1\cos\varphi_c \qquad (2.12)$$

Отсюда

$$\frac{v_\zeta^\times}{v_{\zeta m}^\times} = \frac{\cos\varphi - \cos\varphi_c}{1 - \cos\varphi_c} \tag{2.13}$$

Второе соотношение (2.9) можно теперь записать в виде

$$p_R = p_{Rc} + \frac{\mu_c}{R}\left[v_\zeta^\times + \left(\frac{\nu_c}{\mu_c}\nu^\circ + 2\mu^\circ\right)v_\zeta\right] \tag{2.14}$$

где

$$p_{Rc} = c_3 = \frac{\mu_c}{R} v_{\zeta m}^\times \frac{\cos\varphi_c}{1 - \cos\varphi_c} \tag{2.15}$$

Последнее соотношение представляет собой условие, необходимое для существования безинерционного течения. Так как давление в совершенном газе отрицательным быть не может, то из условия (2.15) ясно, что при $R > 0$ (случай диффузора) безинерционное течение осуществимо только в интервале

$$0 < \varphi_c < \tfrac{1}{2}\pi$$

При $R < 0$ (случай конфузора) безинерционное течение невозможно.

Действительно, если бы оно существовало, то только, как это видно из (2.15), в интервале $\frac{1}{2}\pi < \varphi_c < \pi$.

Однако [1] в силу неравенства $\nu + 2\mu > 0$ из (2.14), (2.15) следует

$$p_{Rm} < p_{Rc} + \frac{\mu_c}{R} v_{\zeta m}^\times = \frac{\mu_c}{R} v_{\zeta m}^\times \frac{1}{1 - \cos\varphi_c} < 0$$

что невозможно. Введем число Рейнольдса R_e:

$$R_e = \frac{p_c(R + \zeta)}{\mu_c v_{\zeta m}^\times} = \frac{p_{Rc} R}{\mu_c v_{\zeta m}^\times} \tag{2.16}$$

которое в силу (2.7) не зависит от ζ.

Соотношение (2.14) и условие (2.15) могут тогда быть записаны в виде

$$p^\circ = 1 + \frac{1}{R_e}\left[\frac{v_\zeta^\times}{v_{\zeta m}^\times} + \left(\frac{\nu_c}{\mu_c}\nu^\circ + 2\mu^\circ\right)\frac{v_\zeta}{v_{\zeta m}^\times}\right] \tag{2.17}$$

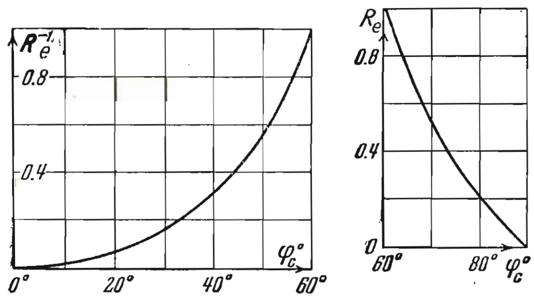
$$R_e = \frac{\cos\varphi_c}{1 - \cos\varphi_c} \tag{2.18}$$

Зависимость числа R_e от φ_c представлена на фиг. 3. Для касательного напряжения на стенке $p_{\zeta\varphi c}$ из (2.3) получим с учетом (2.9), (2.12), (2.16) (2.18) выражение

$$p_{\zeta\varphi c} = -p_c \operatorname{tg}\varphi_c$$

Перейдем к определению температуры и плотности. Уравнение (2.4) примет с учетом (2.6) вид:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(J\eta\frac{dT}{d\varphi} + \mu\frac{dv_\zeta^2/2}{d\varphi}\right) = 0$$



Фиг. 3

Ограничимся случаем, когда теплопередача через стенки отсутствует:

$$J\eta\frac{dT}{d\varphi}+\mu\frac{dv_\zeta^2/2}{d\varphi}=0$$

Введя число Прандтля $P=\frac{\eta}{\mu c_p}$, найдем

$$\frac{v_\zeta^2}{2}+\int\limits_{T_c}^{T}\frac{Jc_p(T)}{P(T)}dT=0 \quad \text{или} \quad \Lambda^{\times 2}+\int\limits_{1}^{T^\circ}\frac{c_p^\circ(T^\circ)}{P^\circ(T^\circ)}dT^\circ=0 \tag{2.19}$$

где

$$\Lambda^\times=\frac{\sqrt{P_c}}{\sqrt{2Jc_{pc}T_c}}v_\zeta \tag{2.20}$$

Обозначим еще

$$\Omega(\Lambda^\times)=\frac{v_\zeta^\times}{v_\zeta}=\frac{1}{\Lambda^\times}\int\limits_0^{\Lambda^\times}\mu^\circ(\Lambda^\times)\,d\Lambda^\times \tag{2.21}$$

Функция $\Omega(\Lambda^\times)$ легко определяется при помощи (2.19), если известна зависимость физических параметров газа μ, η, c_p от температуры.

Формулы (2.13), (2.16) — (2.18) примут в новых обозначениях вид:

$$\frac{\Lambda^\times\Omega(\Lambda^\times)}{\Lambda_m^\times\Omega(\Lambda_m^\times)}=\frac{\cos\varphi-\cos\varphi_c}{1-\cos\varphi_c} \tag{2.22}$$

$$p^\circ=1+\frac{1}{R_e}\left[\frac{\Lambda^\times\;\Omega(\Lambda^\times)}{\Lambda_m^\times\;\Omega(\Lambda_m^\times)}+\left(\frac{\nu_c}{\mu_c}\nu^\circ+2\mu^\circ\right)\frac{\Lambda^\times}{\Lambda_m^\times}\frac{1}{\Omega(\Lambda_m^\times)}\right] \tag{2.23}$$

$$R_e=\frac{\sqrt{2Jc_{pc}T_c}}{\sqrt{P_c}}\,\frac{p_{Rc}R}{\mu_c\Lambda_m^\times\,\Omega(\Lambda_m^\times)}=\frac{\cos\varphi_c}{1-\cos\varphi_c} \tag{2.24}$$

Наконец, безразмерная плотность ρ° определится из уравнения состояния

$$\rho^\circ=\frac{p^\circ}{T^\circ} \tag{2.25}$$

Ход решения следующий. При заданных параметрах T_c, $p_{Rc}R_c$ $\Lambda_m^\times$ определяются из (2.19) температура, а из (2.21) величина Ω как функция $\Lambda^\times$. Затем из условия безинерционности (2.24) определяется угол φ_c, а из (2.22) величина $\Lambda^\times$ как функция φ. Наконец, по (2.19), (2.23), (2.25) находятся распределения температуры, давления и плотности по углу φ.

В качестве примера найденного решения рассмотрим случай, когда зависимость μ° от температуры дается формулой Сазерленда

$$\mu^\circ=\frac{\mu}{\mu_c}=\frac{1+T_i^\circ}{T^\circ+T_i^\circ}T^{\circ 3/2},\qquad T_i^\circ=\frac{122^\circ}{T_c}\qquad\begin{pmatrix}c_p=\mathrm{const}\\ P=\mathrm{const}\end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Формула (2.19) принимает в этом случае вид:

$$T^\circ=1-\Lambda^{\times 2} \tag{2.27}$$

Отсюда следует ограничение для $\Lambda^{\times}$:

$$\Lambda^{\times} < 1$$

Подставив μ° из (2.26) в (2.21), получим с учетом (2.27)

$$\Omega(\Lambda^{\times}) = a_1 \sqrt{1-\Lambda^{\times 2}} + \frac{a_2}{\Lambda^{\times}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\Lambda^{\times}}{\sqrt{1-\Lambda^{\times 2}}} + \frac{a_3}{\tau\Lambda^{\times}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\tau\Lambda^{\times}}{\sqrt{1-\Lambda^{\times 2}}} \qquad (2.28)$$

где

$$a_1 = \frac{1+T_i^{\circ}}{2}, \qquad a_2 = \frac{1-T_i^{\circ}}{2} - T_i^{\circ 2}, \qquad a_3 = T_i^{\circ 2}, \qquad \tau = \sqrt{\frac{T_i^{\circ}}{1+T_i^{\circ}}} \qquad (2.29)$$

Приведем значения функции $\Omega(\Lambda^{\times})$ при температуре стенки $T_c = 288°$

$\Lambda^{\times}=$	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\Omega=$	1	0.9993	0.9973	0.9940	0.9893	0.9832	0.9758
$\Lambda^{\times}=$	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65
$\Omega=$	0.9669	0.9565	0.9446	0.9311	0.9159	0.8990	0.8802
$\Lambda^{\times}=$	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1
$\Omega=$	0.8595	0.8367	0.8117	0.7843	0.7543	0.7219	0.6876

Найдем параметры адиабатического торможения. Обозначать их будем индексом 0 внизу. По определению имеем

$$\frac{v_{\zeta}^2}{2} + Jc_p T = Jc_p T_0$$

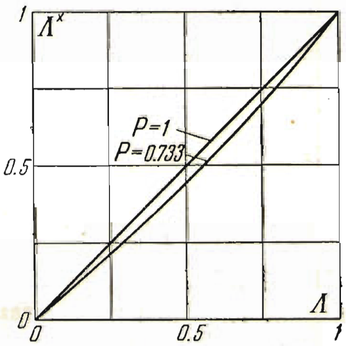
Отсюда с учетом (2.20), (2.27)

$$T_0^{\circ} = 1 + \frac{1-P}{P} \Lambda^{\times 2} \qquad (2.30)$$

Выразим приведенную скорость Λ через $\Lambda^{\times}$. Из (2.20) получим с учетом (2.30)

$$\Lambda = \frac{v_{\zeta}}{\sqrt{2Jc_p T_0}} = \frac{\Lambda^{\times}}{\sqrt{P + (1-P)\Lambda^{\times 2}}},$$

$$\Lambda^{\times} = \frac{\sqrt{P}\,\Lambda}{\sqrt{1-(1-P)\Lambda^2}} \qquad (2.31)$$



Фиг. 4

Из последних соотношений следует, что $\Lambda = 1$ при $\Lambda^{\times} = 1$. Вид зависимости функции $\Lambda^{\times}(\Lambda)$ при числе $P = 0.733$ изображен на фиг. 4.

Параметры адиабатического торможения выражаются через найденную из (2.31) приведенную скорость Λ по известным формулам:

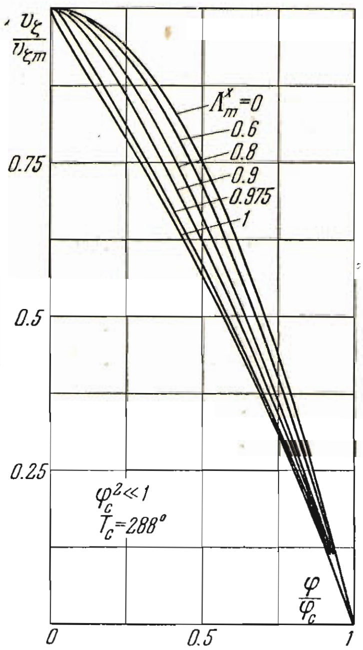
$$p_0^{\circ}(1-\Lambda^2)^{\frac{\varkappa}{1-\varkappa}} = p^{\circ}, \qquad \rho_0^{\circ}(1-\Lambda^2)^{\frac{1}{1-\varkappa}} = \rho^{\circ}, \qquad T_0^{\circ}(1-\Lambda^2) = T^{\circ}$$

где $\varkappa = c_p / c_v$ — показатель адиабаты.

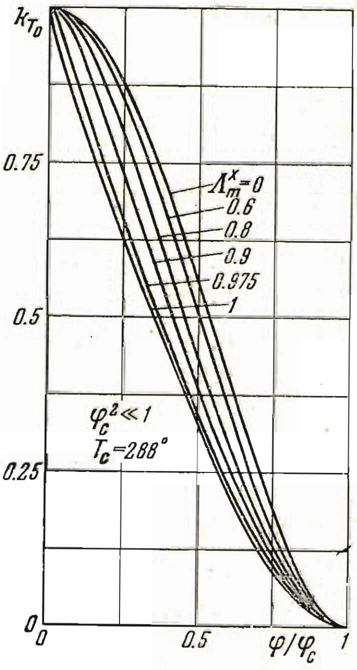
На фиг. 5—9 даны результаты расчета при значении $T_c = 288°$ для случая малых углов φ_c, когда величиной φ_c^2 можно пренебречь по сравнению с единицей. В этом случае формулы (2.22) — (2.24) упрощаются:

$$\frac{\Lambda^\times\ \Omega(\Lambda^\times)}{\Lambda_m^\times\ \Omega(\Lambda_m^\times)} = 1 - \varphi^{\circ 2}, \qquad p^\circ = 1, \qquad R_e = \frac{2}{\varphi_c^2}$$

и распределение скорости не зависит от угла φ_c.



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 6, 7 приняты обозначения

$$k_T = \frac{T - T_c}{T_m - T_c}, \qquad k_{T_0} = \frac{T_0 - T_c}{T_{0m} - T_c}, \qquad -k_T = k_{T_0}, \qquad k_\rho = \frac{\rho - \rho_c}{\rho_m - \rho_c}$$

В табл. 1 приведены значения φ_c в зависимости от $\Lambda_m^\times$ и произведения $p_c h$, где давление выражено в единицах стандартной атмосферы, а

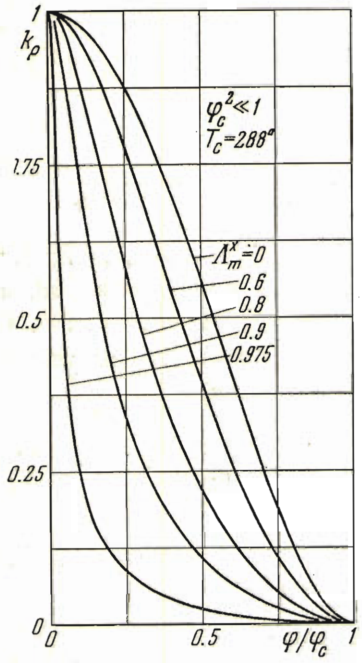
Таблица 1

$p_c h$	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$\Lambda_m^\times = 0.0$	0	0	0	0	0
0.2	0″0127	0″127	1″27	12″7	2′12
0.4	0″0236	0″236	2″36	23″6	3′94
0.6	0″0345	0″345	3″45	34″5	5′75
0.8	0″0415	0″415	4″15	41″5	6′92
1	0″0449	0″499	4″99	49″9	7′48

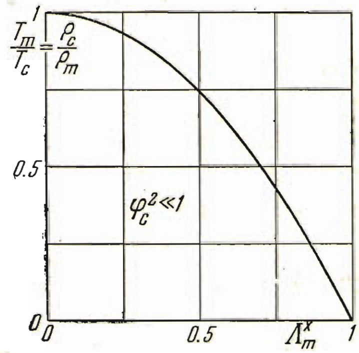
длина дуги раствора диффузора $2h$ в метрах. Значения φ_c подсчитаны из условия безинерционности (2.24) по формуле

$$\varphi_c = 3.10 \times 10^{-7} \frac{\Lambda_m^\times\ \Omega(\Lambda_m^\times)}{p^\circ\,[ATA]\,h\,[M]}$$

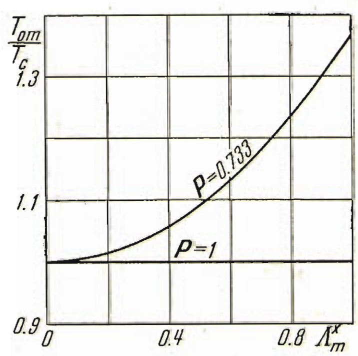
Из таблицы видно, что если давление на выходе из диффузора порядка атмосферного, а высота выходной части диффузора порядка сантиметра — метра, то угол φ_c ничтожно мал. Угол φ_c может стать заметным лишь при давлении на выходе, в несколько десятков раз меньшем атмосферного.



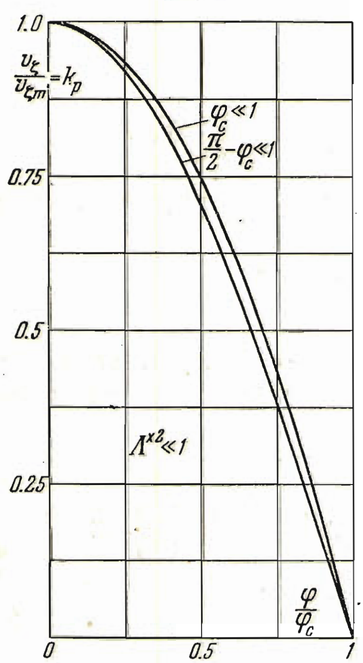
Фиг. 7



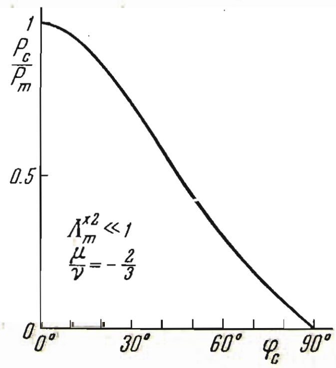
Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

На фиг. 10—11 представлены результаты расчета при малых $\Lambda^{\times}$, когда величиной $\Lambda^{\times 2}$ можно пренебречь по сравнению с единицей.

В этом случае из (2.27)—(2.29) следует

$$\Omega = 1, \qquad T^\circ = 1, \qquad \mu^\circ = \nu^\circ = 1$$

и формулы (2.22) — (2.25) принимают вид:

$$\frac{v_\zeta}{v_{\zeta m}} = \frac{\cos\varphi - \cos\varphi_c}{1 - \cos\varphi_c}$$

$$p^\circ = \rho^\circ = 1 + \frac{1}{Re}\left(\frac{\nu}{\mu} + 3\right)\frac{v_\zeta}{v_{\zeta m}}, \qquad Re = \frac{p_{Rc}\,R}{\mu v_{\zeta m}} = \frac{\cos\varphi_c}{1 - \cos\varphi_c}$$

Из графика фиг. 10, где обозначено $k_p = (p - p_c)/(p_m - p_c)$, видно, что распределение скорости слабо зависит от φ_c. От φ_c существенно зависит изменение давления вдоль оси φ (фиг. 11). Заметим в заключение, что, если стенки диффузора убрать и считать все величины не зависящими от φ, получим плоский безинерционный источник (сток)

$$v_\zeta = v_{\zeta R}, \quad T = T_R, \quad p = \frac{p_R}{1 + \zeta / R}, \quad \rho = \frac{\rho_R}{1 + \zeta / R}, \quad \frac{p_R}{\rho_R} = J\,(c_p - c_v)\,T_R$$

где все величины σ_R — константы.

3. Окружные безинерционные течения. Напишем исходную систему уравнений. Из (1.10) — (1.15) получим с учетом (1.17)

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = -\,p = \mathrm{const}$$

$$p_{12} = \frac{\mu}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}, \qquad p_{23} = \frac{\mu}{H_3}\frac{\partial v_2}{\partial q_3}, \qquad p_{31} = 0$$

$$\frac{\partial H_3\, p_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial H_1\, p_{23}}{\partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{H_3}{H_1}\left(J\eta\,\frac{\partial T}{\partial q_1} + \mu\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{v_2^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\frac{H_1}{H_3}\left(J\eta\,\frac{\partial T}{\partial q_3} + \mu\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{v_2^2}{2}\right) = 0$$

Ограничимся случаем, когда решением уравнения притока тепла является интеграл:

$$\frac{v_2^2}{2} + \int\limits_{T_c}^{T}\frac{Jc_p(T)}{P(T)}\,dT = 0$$

В этом случае теплопередача через стенки отсутствует, температура на стенках T_c постоянна и скорость v_2 является функцией только температуры.

Решение примет вид:

$$p = \mathrm{const}, \qquad \rho_c = \mathrm{const}, \qquad \rho^\circ = \frac{1}{T^\circ}, \qquad \Lambda^{\times 2} + \int\limits_{1}^{T^\circ}\frac{c_p^\circ(T^\circ)}{P^\circ(T^\circ)}\,dT^\circ$$

$$p_{12} = \frac{\mu_c}{H_1}\frac{\partial v_2^\times}{\partial q_1}, \qquad p_{23} = \frac{\mu_c}{H_3}\frac{\partial v_2^\times}{\partial q_3} \tag{3.1}$$

Здесь функция

$$v_2^\times = \int\limits_0^{v_2}\mu^\circ(v_2)\,dv_2$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_3}{H_1}\frac{\partial v_2^{\times}}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1}{H_3}\frac{\partial v_2^{\times}}{\partial q_3}\right)=0 \tag{3.2}$$

при наличии граничных условий на стенках

$$v_{2c}^{\times}=0 \tag{3.3}$$

Условие (3.3) недостаточно для определения (единственного) решения уравнения (3.2). Поэтому окружное течение следует рассматривать лишь в некоторой части канала

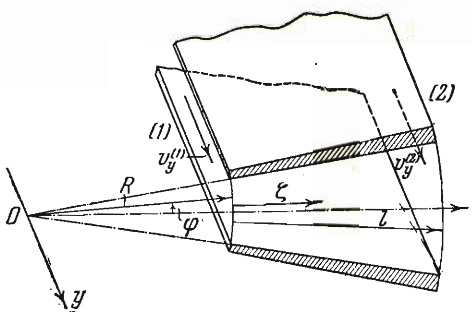
$$q_{30}\leqslant q_3\leqslant q_{30}+l$$

и присоединить к (3.3) условия

$$v_2^{\times}=\psi_{q_{30}} \quad \text{при } q_3=q_{30}, \qquad v_2^{\times}=\psi_{q_{30}+l} \quad \text{при } q_3=q_{30}+l \tag{3.4}$$

Здесь $\psi_{q_{30}}$, $\psi_{q_{30}+l}$ — некоторые (произвольные) функции от q_1, заданные в сечениях $q_3=q_{30}$ и $q_3=q_{30}+l$ соответственно.

Если функция $v_2^{\times}$ найдена, то определение остальных параметров течения производится совершенно аналогично случаю, рассмотренному в предыдущем разделе. Заметим еще, что в отличие от предыдущего рассмотренного случая как скорость, так и температура будут функциями двух независимых переменных q_1, q_3. В качестве примера рассмотрим окружное течение в канале с прямолинейными стенками (фиг. 2а, 2б). Обозначения возьмем те же, что и в предыдущем разделе:



Фиг. 12

$$p_{12}=p_{\varphi y}, \qquad p_{23}=p_{y\zeta}, \qquad v_2=v_y;\ldots$$

Течение будем рассматривать в области (фиг. 12) $0<\zeta<l$. Уравнение (3.2) примет вид:

$$\frac{\partial^2 v_y^{\times}}{\partial\varphi^2}+(R+\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(R+\zeta)\frac{\partial v_y^{\times}}{\partial\zeta}\right]=0 \tag{3.5}$$

Краевые условия (3.3), (3.4) запишутся

$$v_y^{\times}(\varphi_c)=v_y^{\times}(-\varphi_c)=0 \tag{3.6}$$

$$v_{yR}^{\times}=\psi_R(\varphi), \quad v_{y,\,R+l}^{\times}=\psi_{R+l}(\varphi) \tag{3.7}$$

Здесь ψ_R, ψ_{R+l} — некоторые функции от φ, заданные в сечениях $\zeta=0$, $\zeta=l$ соответственно.

Общим решением уравнения (3.5) при условиях (3.6) является

$$v_y^{\times}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{B_n v_n(\varphi^\circ)}{(1+\zeta/R)^{k_nR/h_R}} \qquad \left(\varphi^\circ=\frac{\varphi}{\varphi_c}\right) \tag{3.8}$$

где $v_n(\varphi^\circ)$ — собственные функции, k_n — собственные значения бесконечной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 v_n}{d\varphi^2} + k_n^2 v_n = 0 \qquad (n = \pm, \pm 2, \ldots) \tag{3.9}$$

при наличии граничных условий

$$v_n(1) = v_n(-1) = 0 \tag{3.10}$$

а B_n — постоянные коэффициенты. Собственные функции и собственные значения уравнений (3.9) при условиях (3.10)

$$v_{2m+1} = v_{-(2m+1)} = \cos\left[(2m+1)\frac{1}{2}\pi\varphi^\circ\right] \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$k_{2m+1} = -k_{-(2m+1)} = (2m+1)\frac{1}{2}\pi \tag{3.11}$$

$$v_{2m} = -v_{-2m} = \sin\left[2m\frac{1}{2}\pi\varphi^\circ\right], \quad k_{2m} = -k_{-2m} = 2m\frac{1}{2}\pi \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

не зависят от геометрии прямолинейного канала и образуют (при индексах одного знака) ортогональную систему функции в интервале

$$-1 \leqslant \varphi^\circ \leqslant 1 \tag{3.12}$$

Условие (3.7) можно записать с учетом (3.8), (3.11)

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[B_{2m+1} + B_{-(2m+1)}\right] v_{2m+1} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[B_{2m} - B_{-2m}\right] v_{2m} = \psi_R$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{B_{2m+1}}{(1+l/R)^{\varkappa_{2m+1}}} + \frac{B_{-(2m+1)}}{(1+l/R)^{-\varkappa_{2m+1}}}\right] v_{2m+1} + {}$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{B_{2m}}{(1+l/R)^{\varkappa_{2m}}} - \frac{B_{-2m}}{(1+l/R)^{-\varkappa_{2m}}}\right] v_{2m} = \psi_{R+l}$$

где

$$\varkappa_n = \frac{k_n R}{h_R}$$

Откуда, пользуясь ортогональностью системы собственных функций в интервале (3.12), получим для определения коэффициентов B_n выражения

$$B_{2m+1} + B_{-(2m+1)} = \int_{-1}^{1} \psi_R(\varphi^\circ)\, v_{2m+1}(\varphi^\circ)\, d\varphi^\circ$$

$$B_{2m} - B_{-2m} = \int_{-1}^{1} \psi_R(\varphi^\circ)\, v_{2m}(\varphi^\circ)\, d\varphi^\circ$$

$$\frac{B_{2m+1}}{(1+l/R)^{\varkappa_{2m+1}}} + \frac{B_{-(2m+1)}}{(1+l/R)^{-\varkappa_{2m+1}}} = \int_{-1}^{1} \psi_{R+l}(\varphi^\circ)\, v_{2m+1}(\varphi^\circ)\, d\varphi^\circ \tag{3.13}$$

$$\frac{B_{2m}}{(1+l/R)^{\varkappa_{2m}}} - \frac{B_{-2m}}{(1+l/R)^{-\varkappa_{2m}}} = \int_{-1}^{1} \psi_{R+l}(\varphi^\circ)\, v_{2m}(\varphi^\circ)\, d\varphi^\circ$$

Во всех приведенных формулах R может быть как положительным (случай диффузора), так и отрицательным (случай конфузора).

Оставляя h_R неизменным, устремим R к бесконечности. Имеем при любом фиксированном ζ

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{(1+\zeta/R)^{\varkappa_n}} = \exp\left(-\frac{k_n}{h_R}\zeta\right) \tag{3.17}$$

и решение (3.8), (3.13) перейдет при этом в решение для случая канала постоянной высоты h_R.

Поясним физический смысл полученного решения. Пусть зоны 1, 2 и соединяющий их канал заполняет покоящийся газ (фиг. 12). Сообщим газу в зоне *1* некоторую окружную скорость $v_y^{(1)}$. Тогда в канале установится некоторое окружное течение, затухающее, очевидно, вдоль оси канала.

Этому случаю будут соответствовать только положительные собственные значения k_n. Если сообщить окружную скорость $v_y^{(2)}$ только газу в зоне *2*, то окружное течение, которое установится в канале, будет возрастать (по модулю скорости) вдоль оси канала. Этому случаю будут соответствовать только отрицательные собственные значения k_n.

Наконец, если и в зоне *1* и в зоне *2* сообщить газу некоторую окружную скорость $v_y^{(1)}$ и $v_y^{(2)}$ соответственно, то окружному течению, которое в результате этого установится в канале, будут соответствовать как положительные, так и отрицательные собственные значения k_n. Заметим, что подобный механизм течения нетрудно осуществить в кольцевом канале, образованном двумя соосными осесимметрическими поверхностями вращения. В этом самом смысле термин «окружная скорость» оказывается удобным применить и для случая плоского канала, который можно, очевидно, рассматривать как предельный случай соответствующего кольцевого канала, далеко удаленного от оси симметрии.

В случае, когда окружное течение вызвано возмущением газа только перед каналом, формулы (3.8), (3.13) примут с учетом (3.11) вид:

$$v_y^\times = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m+1}\cos\left[(2m+1)\,{}^1/_2\,\pi\varphi^\circ\right]}{(1+\zeta/R)^{(2m+1)^1/_2\pi R/h_R}} + \frac{B_{2m}\sin\left[2m\,{}^1/_2\,\pi\varphi^\circ\right]}{(1+\zeta/R)^{2m^1/_2\pi R/h_R}}$$

$$B_{2m+1} = \int_{-1}^{1} \psi_R(\varphi^\circ)\cos\frac{(2m+1)\,\pi\varphi^\circ}{2}\,d\varphi^\circ \qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

$$B_{2m} = \int_{-1}^{1} \psi_R(\varphi^\circ)\sin\frac{2m\,\pi\varphi^\circ}{2}\,d\varphi^\circ \qquad (m=1,2,3,\ldots)$$

Приведем формулы для случая, когда окружное течение вызвано первой собственной функцией, которой соответствует наименьшее собственное значение k_1:

$$\frac{v_y^\times}{v_{ymR}^\times} = \frac{\cos({}^1/_2\,\pi\varphi^\circ)}{(1+\zeta/R)^{{}^1/_2\pi R/h_R}}$$

Такое течение будет затухать вдоль оси ζ наиболее медленно и является (в смысле потерь энергии по оси ζ) наивыгоднейшим.

Касательные напряжения (3.1) примут вид:

$$p_{\varphi y} = -{}^1/_2\, \pi\mu_c \frac{\overset{\times}{v}_{ym}}{h_R} \frac{\sin ({}^1/_2\, \pi\varphi^\circ)}{(1+\zeta/R)^{1+{}^1/_2\pi R/h_R}}$$

$$p_{y\zeta} = -{}^1/_2\, \pi\mu_c \frac{\overset{\times}{v}_{ym}}{h_R} \frac{\cos {}^1/_2\, \pi\varphi^\circ}{(1+\zeta/R)^{1+{}^1/_2\pi R/h_R}} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \zeta \leqslant \infty & \text{при } R>0 \\ 0 \leqslant \zeta \leqslant -R & \text{при } R<0 \end{pmatrix}$$

Для случая канала постоянной высоты $h_R = h$ будем иметь в соответствии с (3.17)

$$\frac{\overset{\times}{v}_y}{v_{yRm}} = \cos\frac{\pi\varphi^\circ}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\zeta}{h}\right)$$

$$p_{\varphi y} = -{}^1/_2\, \pi \frac{\mu_c v_{ym}}{h} \sin\frac{\pi\varphi^\circ}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\zeta}{h}\right)$$

$$p_{y\zeta} = -{}^1/_2\, \pi \frac{\mu_c v_{ym}}{h} \cos\frac{\pi\varphi^\circ}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\zeta}{h}\right)$$

Скорость и температура определяются, как и в предыдущем разделе

$$\frac{\Lambda^\times\, \Omega(\Lambda^\times)}{\overset{\times}{\Lambda}_{Rm}\, \Omega(\overset{\times}{\Lambda}_{Rm})} = \frac{\overset{\times}{v}_y}{\overset{\times}{v}_{yRm}}$$

$$\Lambda^{\times 2} + \int\limits_1^{T^\circ} \frac{c_p{}^\circ(T^\circ)}{P^\circ(T^\circ)}\, dT^\circ = 0$$

Поступила 12 IV 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель Л. А. и Розе М. В. Теоретическая гидромеханика, 3-е изд. ОГИЗ, Гос. изд-во технико-теорет. литературы, Л.—М., 1948.
2. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 7-е изд., Изд. АН СССР, М., 1951.