Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОДНА ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В ЦЕЛОМ

Б. А. Ершов

(Ленинград)

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = f(\sigma) \qquad (\sigma = c_1 x - d_1 y) \tag{1.1}$$

где c_1 и d_1 — постоянные, не равные одновременно нулю, функции $F(x, y)$, $f(\sigma)$ — непрерывны и

$$F(0, 0) = 0, \qquad f(0) = 0 \tag{1.2}$$

Предполагается также выполнение условия единственности решения $x = 0$, $y = 0$.

Система (1.1) рассматривалась в работах [1, 2]. В работе [2] доказана теорема об асимптотической устойчивости решений системы при любых начальных отклонениях при следующих предположениях:

$$\sigma f(\sigma) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0 \tag{1.3}$$

$$\sigma [\varphi(\sigma, y) - \varphi(0, y)] < 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0 \tag{1.4}$$

$$y\varphi(0, y) < 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0 \tag{1.5}$$

где

$$\varphi(\sigma, y) = c_1 F\left(\frac{\sigma + d_1 y}{c_1}, y\right) - d_1 f(\sigma) \ldots \tag{1.6}$$

$$\left|\int_0^{\pm\infty} f(\sigma)\, d\sigma\right| = \infty, \qquad \left|\int_0^{\pm\infty} \varphi(0, y)\, dy\right| = \infty \tag{1.7}$$

Для доказательства этой теоремы Н. Н. Красовский [2] строит функцию Ляпунова в виде

$$v(\sigma, y) = \int_0^{\sigma} f(\sigma)\, d\sigma - \int_0^{y} \varphi(0, y)\, dy \tag{1.8}$$

Условия (1.7) требуются для того, чтобы кривые $v(\sigma, y) = \text{const}$ были замкнутыми при любых σ и y (см. Н. П. Еругин [3]).

Покажем, что факт асимптотической устойчивости решения системы (1.1) при любых начальных отклонениях можно установить, не используя условия (1.7).

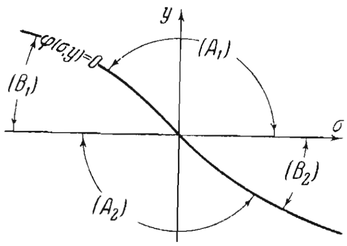
Заменим, следуя Красовскому, систему (1.1) эквивалентной системой

$$\frac{d\sigma}{dt} = \varphi(\sigma, y), \quad \frac{dy}{dt} = f(\sigma), \tag{1.9}$$

которую будем рассматривать при условиях (1.2), (1.3), (1.4) и (1.5). На плоскости

$\sigma\ y$, прямая $f(\sigma)=0$, представляющая левую часть второго уравнения (1.9), в силу условий (1.2) и (1.3) совпадает с осью y (фиг. 1).

Из (1.5) имеем, что на оси y будет $\varphi(\sigma, y)>0$ при $y<0$ и $\varphi(\sigma, y)<0$ при $y>0$.



Фиг. 1

На оси σ неравенство (1.4) принимает вид

$$\sigma\varphi(\sigma, 0)<0 \quad \text{при} \quad \sigma\neq 0$$

откуда следует, что на оси σ функция

$\varphi(\sigma, y)>0$ при $\sigma<0$; $\varphi(\sigma, y)<0$ при $\sigma>0$

Таким образом, $\varphi(\sigma, y)$ меняет знак во второй и четвертой четвертях.

Принимая также во внимание (1.2), получаем, что кривая $\varphi(\sigma, y)=0$ расположена во второй и четвертой четвертях.

Из услвий (1.3) и (1.5) следует, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\sigma}{dt}=\varphi(\sigma, y)>0 \quad &&\text{для точек, лежащих ниже кривой } \varphi(\sigma, y)=0\\
&\frac{d\sigma}{dt}=\varphi(\sigma, y)<0 \quad &&\text{для точек, лежащих выше кривой } \varphi(\sigma, y)=0\\
&\frac{dy}{dt}=f(\sigma)>0 \quad &&\text{для точек, лежащих правее оси } y\\
&\frac{dy}{dt}=f(\sigma)<0 \quad &&\text{для точек, лежащих левее оси } y
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Кривая $\varphi(\sigma, y)=0$ и ось σ разбивают плоскость σ, y на четыре области: (A_1). (A_2) и (B_1), (B_2), показанных на фиг. 1.

Введем полярные координаты $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда

$$\dot{r}=\dot{\sigma}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi, \qquad r\dot{\varphi}=-\dot{\sigma}\sin\varphi+\dot{y}\cos\varphi \tag{1.11}$$

Из (1.11) на основании (1.10) получаем, что $\dot{\varphi}>0$ в областях (A_ν).

Следовательно, движения в областях (A_ν) не могут иметь ограниченный полярный угол φ, соответствующий этим областям, и движения, попадающие в области (A_ν) либо начинающиеся там, выходят из областей (A_ν), пересекая кривую $\varphi(\sigma, y)=0$.

Для областей (B_ν) из (1.11) на основании (1.10) получаем, что $\dot{r}<0$, т. е. движения, попадающие в области (B_ν) либо начинающиеся там, могут только или входить в точку равновесия (0, 0) в областях (B_ν) при $t\to\infty$ или выходить из областей (B_ν), пересекая ось σ.

Таким образом движения системы (1.9), имеющие ограниченный полярный угол, ограничены.

Обратимся теперь к теореме (1.3) Н. П. Еругина [4]. В рассматриваемом случае:

1) точка (0, 0) является единственной точкой равновесия;

2) невозмущенное движение $x=0$, $y=0$ асимптотически устойчивое, так как для системы (1.9) построена функция Ляпунова;

3) в качестве прямой $L(0, \infty)$ можно взять ось y;

4) было установлено, что движения, имеющие ограниченный полярный угол, ограничены;

5) периодических решений нет, так как для системы (1.1) построена функция Ляпунова.

Таким образом, все условия теоремы Н. П. Еругина выполнены и, следовательно, получаем теорему.

Теорема 1. Если выполнены условия (1.2), (1.3), (1.4) и (1.5), то решение системы (1.1) асимптотически устойчиво при любых начальных отклонениях.

Примечание. Теорема имеет место, если условия (1.3) и (1.5) заменить неравенствами

$$\sigma f(\sigma) < 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0 \tag{1.3a}$$

$$y\,\varphi(0,\ y) > 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0 \tag{1.5a}$$

Из теоремы, приведенной выше, следует, что достаточное условие устойчивости в целом решения $x = 0$ уравнения [2]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)$$

записывается в виде неравенств

$$xF(x,\ 0) < 0 \qquad \text{при} \quad x \neq 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)\left[F\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right) - F(x,\ 0)\right] < 0 \quad \text{при} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right) \neq 0$$

2. Отметим, что полученная здесь теорема 1 и тем более теорема 2.1 работы [2] не являются более общими, чем наши теоремы работы [1].

Действительно, возьмем случай, рассмотренный в § 4 работы [1], где c_1 и d_1 — положительные постоянны, а условия, которым подчинены функции $F(x,\ y)$ и $f(\sigma)$, таковы, что при $y = y_1 > 0$ $F(x,\ y)$ и $f(\sigma)$ увеличиваются с возрастанием x.

Из условия (1.4) теоремы 1 следует, что при $y = y_1 > 0$ и $\sigma_1 = c_1 x + d_1 y_1 > 0$, т. е. для точек, расположенных ниже прямой $f(\sigma) = 0$ (фиг. 3 работы [1])

$$\varphi(\sigma,\ y_1) < \varphi(0,\ y_1)$$

Или подробнее

$$c_1 F(x,\ y_1) - d_1 f(\sigma_1) < c_1 F\left(x = \frac{d_1 y_1}{c_1},\ y_1\right) \tag{2.1}$$

Запишем (2.1) для точки $(x_1,\ y_1)$, расположенной на кривой $F(x,\ y) = 0$,

$$-d_1 f(\sigma^*) < c_1 F\left(x = \frac{d_1 y_1}{c_1},\ y_1\right) \tag{2.2}$$

где

$$\sigma^* = c_1 x_1 - d_1 y_1$$

Неравенство (2.2) получено из условия (1.4) теоремы 1, причем

$$f(\sigma^*) > 0 \qquad \text{значение } f(\sigma), \text{ взятое на кривой } F(x,\ y) = 0$$

$$F\left(x = \frac{d_1 y_1}{c_1},\ y_1\right) < 0 \qquad \text{значение } F(x,\ y), \text{ взятое на прямой } f(\sigma) = 0$$

Следовательно функции $F(x,\ y)$, $f(\sigma)$ и постоянные c_1, d_1 могут, удовлетворяя условиям, приведенным в § 4 [1], нарушать неравенство (2.2), т. е. не отвечать требованиям теоремы 1 и теоремы 2.1 работы [2].

Поступила 23 III 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Б. А. Об устойчивости в целом некоторой системы автоматического регулирования. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
2. Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
3. Еругин Н. П. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
4. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950.