Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХРАЗМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ НАПРАВЛЕНИЯ ЕЕ СКОРОСТИ

Г. Н. Пыхтеев

(Москва)

Пусть $\varphi(x, y)$ — потенциал скоростей искомого движения рассматриваемой жидкости и $\vartheta(x, y)$ — заданный угол направления ее скорости с осью x, так что

$$\triangle\varphi = 0, \qquad \frac{\partial\varphi / \partial y}{\partial\varphi / \partial x} = \operatorname{tg}\vartheta(x, y) \tag{1}$$

Имеем

$$\triangle\varphi^2 = 2\varphi\triangle\varphi + 2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] = 2\left[1 + \operatorname{tg}^2\vartheta(x, y)\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \tag{2}$$

Таким образом, рассматриваемая гидродинамическая задача приводится к определению гармонической функции, удовлетворяющей нелинейному уравнению

$$\triangle\varphi^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 q(x, y) \tag{3}$$

или к определению гармонической функции, квадрат φ^2 которой удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\Phi\triangle\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 q_0(x, y) \qquad \text{или} \qquad \triangle\Phi = \left(\frac{\partial\sqrt{\Phi}}{\partial x}\right)^2 q_1(x, y) \tag{4}$$

Пусть $\psi(x, y)$ — функция тока искомого движения жидкости; тогда

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = w(z) \qquad (z = x + iy)$$

где w — комплексный потенциал. Если $V = |v(x, y)|$ — модуль скорости жидкости то должно быть

$$-\frac{dw}{dz} = Ve^{-\vartheta i}, \qquad \ln\left(-\frac{dz}{dw}\right) = -\ln V + i\vartheta \tag{5}$$

Так как $-\ln V$ и ϑ — гармонические сопряженные функции, то

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{\partial\ln V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial y} = -\frac{\partial\ln V}{\partial x}$$

Отсюда

$$d\ln V = -\frac{\partial\vartheta}{\partial y}dx + \frac{\partial\vartheta}{\partial x}dy \tag{6}$$

Правая часть есть полная производная, следовательно, интегрируя (6), имеем

$$\ln V = \mu(x, y) \tag{7}$$

Подставляя (7) в формулу (5), получим

$$\ln\left(-\frac{dz}{dw}\right) = -\mu(x, y) + i\vartheta(x, y) = f(z)$$

или

$$w(z) = -\int e^{-f(z)}\,dz + \text{const}$$

Поставленная задача решена.

Заметим, что решение зависит только от одного произвольного действительного постоянного.

Задача об определении потока по заданному модулю скорости была рассмотрена А. И. Некрасовым[1].

Поступила 23 X 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов А. И. Определение двухразмерного потенциального движения несжимаемой жидкости по заданным значениям модуля ее скорости. ПММ. т. XVII, вып. 4, 1953.