Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СОЗДАВАЕМОЕ ВРАЩАЮЩИМСЯ ДИСКОМ

Д. Е. Долидзе

(Тбилиси)

Пусть плоская бесконечная пластинка, погруженная в вязкой несжимаемой жидкости, вращается вокруг оси, перпендикулярной к ее плоскости. Если вращение пластинки будет неравномерным, то оно вызовет неустановившееся движение жидкости, изучением которого мы займемся в настоящей статье. Установившееся движение, создаваемое равномерно вращающимся диском, изучалось другими авторами, и были найдены приближенные фурмулы для момента сил сопротивления вращению [1].

Обозначим ось вращения через z и применим цилиндрические координаты. Скорость жидкости будет иметь отличные от нуля компоненты по всем трем цилиндрическим осям r, θ, z, так как вращение пластинки действует в качестве центробежного вентилятора, создавая, кроме вращения, радиальное движение от центра, поэтому для сохранения неразрывности должна существовать скорость, параллельная оси z и направленная к диску. Обозначая компоненты скорости соответственно через v_r, v_θ, v_z, а угловую скорость вращения диска, зависящую от времени t, — через $\omega(t)$, будем иметь следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &v_r = 0, \quad v_\theta = r\omega(t), \quad v_z = 0 \quad \text{при } z = 0 \\ &v_r = 0, \quad v_\theta = 0 \quad \text{при } z = \infty \end{aligned} \tag{1}$$

Кроме того, будем иметь начальные условия, которые при отсутствии начальной скорости запишутся в следующем виде:

$$v_r = v_\theta = v_z = 0 \quad \text{при } t = 0 \tag{2}$$

Выпишем уравнения движения жидкости в векторной форме при отсутствии массовых сил, будем иметь

$$\nu \triangle \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{3}$$

где ρ — плотность жидкости, p — гидродинамическое давление, ν — кинематический коэффициент вязкости, $\triangle$ — оператор Лапласа относительно координат, $\mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v}$ — вектор с компонентами

$$\sum_k v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Задачу (1), (2), (3) можно решать подстановкой, аналогичной примененной Карманом[1] в случае установившегося движения,

Проектируя уравнения (3) на цилиндрические координатные оси, легко проверить, что полученным уравнениям можно удовлетворить подстановкой:

$$v_r = rf(z, t), \quad v_\theta = r\varphi(z, t), \quad v_z = 2\psi(z, t), \quad p = p(z, t), \tag{4}$$

где функции f, φ, ψ, p должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{gathered}
\nu\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - 2\psi\frac{\partial f}{\partial z} - f^2 + \varphi^2 = \frac{\partial f}{\partial t} \\
\nu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2\psi\frac{\partial \varphi}{\partial z} - 2f\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\
\nu\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2\psi\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \\
\frac{\partial \psi}{\partial z} + f = 0
\end{gathered} \tag{5}$$

При этом, в силу предельных условий (1), (2), будем иметь следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{array}{llll}
f = 0, & \varphi = 0, & \psi = 0 & \text{при } t = 0 \\
f = 0, & \varphi = \omega(t), & \psi = 0 & \text{при } z = 0 \\
f = 0, & \varphi = 0 & & \text{при } z = \infty
\end{array} \tag{6}$$

Из четвертого уравнения системы (5) можем написать

$$\psi = -\int_0^z f dz \tag{7}$$

Далее, построим решение уравнения

$$\nu\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}$$

удовлетворяющее предельным условиям (6) для φ. Легко проверить непосредственно, что φ_0 можно представить в следующем виде:

$$\varphi_0 = \frac{z}{2\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}\right)\frac{\omega(\tau)\,dt}{(t-\tau)^{3/2}} \tag{8}$$

Введем теперь функцию

$$H(z, \zeta, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4\nu t}\right) + \frac{z}{4\pi\nu}\int_0^t \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\nu\tau}\right)\exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} \tag{9}$$

Функция H при $z \neq \zeta$ удовлетворяет уравнению

$$\nu\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (t > 0)$$

и обращается в нуль в начальный момент. При $t > 0$ эта функция равна нулю для $z = 0$ и $z = \infty$.

Легко проверить, что решение f_0 первого уравнения системы (5) при отсутствии нелинейных членов, удовлетворяющее предельным условиям (6), тождественно равно нулю, поэтому при помощи функции H искомые решения f, φ, удовлетворяющие уравнениям (5) и предельным условиям (6), можно представить в следующем виде [2]:

$$
\begin{aligned}
f(z, t) &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2\psi \frac{\partial f}{\partial \zeta} + f^2 - \varphi^2\right) H(z, \zeta, t-\tau)\, d\zeta \\
\varphi(z, t) &= \varphi_0(z, t) + \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + 2f\varphi\right) H(z, \zeta, t-\tau)\, d\zeta
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Уравнения (10) образуют систему интегродифференциальных уравнений относительно f и φ, эти уравнения перепишем в другом виде. Для этого введем новые функции

$$u = f + \varphi, \qquad w = f - \varphi$$

Сложением и вычитанием уравнений (10) получим

$$
\begin{aligned}
u(z, t) &= \varphi_0(z, t) + \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2\psi \frac{\partial u}{\partial \zeta} + uw + \tfrac{1}{2} u^2 - \tfrac{1}{2} w^2\right) H(z, \zeta, t-\tau)\, d\zeta \\
w(z, t) &= -\varphi_0(z, t) + \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2\psi \frac{\partial w}{\partial \zeta} + uw - \tfrac{1}{2} u^2 + \tfrac{1}{2} w^2\right) H(z, \zeta, t-\tau)\, d\zeta
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Заметим теперь, что интегралы в правых частях системы (11) можем дифференцировать по z под знаком интеграла и будем иметь

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2\psi \frac{\partial u}{\partial \zeta} + uw + \tfrac{1}{2} u^2 - \tfrac{1}{2} w^2\right) \frac{\partial H}{\partial z}\, d\zeta \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2\psi \frac{\partial w}{\partial \zeta} + uw - \tfrac{1}{2} u^2 + \tfrac{1}{2} w^2\right) \frac{\partial H}{\partial z}\, d\zeta
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Уравнения (11), (12) представляют систему интегральных уравнений для неизвестных u, w, $\partial u/\partial z$, $\partial w/\partial z$, причем, согласно формуле (7), ψ будет определяться из равенства

$$\psi = -\frac{1}{2} \int_0^z (u + w)\, dz \tag{13}$$

Решением системы (11), (12) определяются f, φ и ψ, а затем p находится из третьего уравнения системы (5).

Систему (11), (12) можем решать методом последовательных приближений. Введем обозначения

$$\frac{\partial u}{\partial z} = U, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = W$$

и вместо системы (11), (12) рассмотрим систему с параметром λ; искомые функции представим в виде рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n, \quad \ldots, \quad \sum \lambda_n \psi_n \tag{14}$$

Подставляя эти значения в уравнения (11), (12) и (13), для определения слагаемых получим рекуррентные формулы

$$u_0=\varphi_0,\quad w_0=-\varphi_0,\quad U_0=\frac{\partial\varphi_0}{\partial z},\quad W_0=-\frac{\partial\varphi_0}{\partial z},\quad \psi_0=0$$

$$u_{n+1}=\int_0^t d\tau\int_0^\infty\sum_{m=0}^{n}\left(2\psi_{n-m}U_m+u_{n-m}W_m+\tfrac{1}{2}u_{n-m}u_m-\tfrac{1}{2}w_{n-m}w_m\right)H\,d\zeta$$

$$w_{n+1}=\int_0^t d\tau\int_0^\infty\sum_m\left(2\psi_{n-m}W_m+u_{n-m}w_m-\tfrac{1}{2}u_{n-m}u_m+\tfrac{1}{2}w_{n-m}w_m\right)H\,d\zeta \tag{15}$$

$$U_{n+1}=\int_0^t d\tau\int_0^\infty\sum_m\left(2\psi_{n-m}U_m+u_{n-m}w_m+\tfrac{1}{2}u_{n-m}u_m-\tfrac{1}{2}w_{n-m}w_m\right)\frac{\partial H}{\partial z}\,d\zeta$$

$$W_{n+1}=\int_0^t d\tau\int_0^\infty\sum_m\left(2\psi_{n-m}W_m+u_{n-m}w_m-\tfrac{1}{2}u_{n-m}u_m+\tfrac{1}{2}w_{n-m}w_m\right)\frac{\partial H}{\partial z}\,d\zeta$$

$$\psi_{n+1}=-\frac{1}{2}\int_0^z(u_{n+1}+w_{n+1})dz$$

Сходимость процесса можем исследовать так же, как в статье[3]. Для этого заметим, что в результате несложных вычислений можно установить следующие равенства:

$$\int_0^\infty H\,d\zeta=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\chi e^{-x^2}dx\qquad\left(\chi=\frac{z}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}}\right)$$

$$\int_0^\infty\frac{\partial H}{\partial z}\,d\zeta=-\frac{1}{\sqrt{\nu\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}\right)$$

поэтому будет существовать положительное постоянное α, такое, что

$$\left|\int_0^\infty\sqrt{t}\,H\,d\zeta\right|,\qquad\left|\int_0^\infty\sqrt{t}\,\frac{\partial H}{\partial z}\,d\zeta\right|<\alpha\qquad(t<\infty)$$

Далее, согласно формуле (8), существует также такое положительное постоянное A, что

$$|\varphi_0|,\qquad\left|z\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\right|<A$$

во всем бесконечном интервале z.

Из формул (15) теперь будем иметь

$$|u_1|<A^2\alpha\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}=2A^2\alpha\sqrt{t}=\frac{A^2\alpha\sqrt{t}}{\Gamma(^3/_2)}\,\Gamma(^1/_2)$$

$$|\psi_1|<\frac{A^2\alpha z\sqrt{t}}{\Gamma(^3/_2)}\,\Gamma(^1/_2)$$

где Γ — гамма-функция. Для следующего приближения получим

$$|u_2|<\frac{2\cdot3A^3\alpha^2}{\Gamma(^3/_2)}\,\Gamma(^1/_2)\int_0^t\frac{\sqrt{\tau}\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}=\frac{2\cdot3A^3\alpha^2t}{\Gamma(2)}\,\Gamma^2(^1/_2)$$

Продолжая этот процесс оценки, будем иметь следующую общую оценку:

$$|u_n| < \frac{2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) A^{n+1} \alpha^n t^{n/2}}{\Gamma(^1/_2 n + 1)}$$

и аналогично для w_n, U_n, W_n

Таким образом, отношение последовательных членов мажорант рассматриваемых рядов будет

$$\frac{2(2n+1) A\alpha\lambda\sqrt{t}}{\Gamma(^1/_2(n+1)+1)} \Gamma(^1/_2) \Gamma(^1/_2 n + 1)$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma(^1/_2) = \sqrt{\pi}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n\Gamma(^1/_2 n+1)}{(\Gamma\, ^1/_2(n+1)+1)}$$

получим достаточное условие абсолютной и равномерной сходимости рядов (14) при $\lambda = 1$

$$4A\alpha\sqrt{\pi t} < 1 \tag{16}$$

Соблюдение последнего условия обеспечивает также единственность решения системы уравнений (11), (12).

Из приведенных оценок трудно установить характер поведения v_z на бесконечности. Этот вопрос рассмотрим для первых двух приближений.

В первом приближении $f_0 = \psi_0 = 0$ и, согласно формулам (4) и (8), получим

$$v_r = v_z = 0, \qquad p = p_0(t) \tag{17}$$

$$v_\theta = \frac{rz}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}\right) \frac{\omega(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}$$

Отсюда видно, что первым приближением можно характреизовать только вращательное движение при отсутствии эффекта центробежных сил.

Полученное решение, строго говоря, приложимо только к бесконечной пластинке. Однако при достаточно большом радиусе a можно пренебречь влиянием кромки и вычислить приближенное значение момента сопротивления вращению диска.

Напряжение, дающее момент вращения, будет

$$p_{\theta z} = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

где μ — динамический коэффициент вязкости. Момент сил сопротивления, действующих на одной стороне диска, будет

$$M_0 = 2\pi \int_0^a p_{\theta z} r^2 dr = 2\pi\mu \int_0^a \frac{\partial v_\theta}{\partial z} r^2 dr$$

Подставляя сюда значение $\partial v_0/\partial z$ из формулы (17) и вычисляя интеграл при $z=0$, получим

$$M_0 = -\frac{\rho a^4 \omega(t) \sqrt{\pi\nu}}{2\sqrt{t}} \tag{17a}$$

Во втором приближении из формул (15) будем иметь

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(u_0 w_0 + \tfrac{1}{2} u_0^2 - \tfrac{1}{2} w_0^2\right) H d\zeta \\ w_1 &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(u_0 w_0 - \tfrac{1}{2} u_0^2 + \tfrac{1}{2} w_0^2\right) H d\zeta \end{aligned} \tag{18}$$

Отсюда получим

$$\varphi_1 = \int_0^t d\tau \int_0^\infty (u_0^2 - w_0^2) H d\zeta = 0$$

$$f_1 = \int_0^t d\tau \int_0^\infty u_0 w_0 H d\zeta = -\int_0^t d\tau \int_0^\infty \varphi_0^2 H d\zeta$$

и формула (7) даст

$$\varphi_1 = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \varphi^2(\zeta, \tau) d\zeta \int_0^z H(z, \zeta, t-\tau) dz$$

Следовательно, уже во втором приближении появляется эффект центробежных сил. При этом момент сопротивления вращению диска опять будет выражаться формулой (17a).

Оценим значение v_z на бесконечности. В результате простых вычислений из формулы (9) получим

$$\int_0^z H(z, \zeta, t) dz = -\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_0^z \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4\nu t}\right) dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\nu\tau}\right) \frac{\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{\tau}} \left[1 - \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}\right)\right] d\tau$$

т. е.

$$\left|\int_0^z H(z, \zeta, t) dz\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\zeta/2\sqrt{\nu t}}^{\infty} e^{-x^2} dx + \frac{\sqrt{t}}{2\pi} \int_0^t \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\nu\tau}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

Интегралы в правой части последней формулы ограничены при всяком конечном значении t и при всяком значении z, поэтому будет существовать такое положительное постоянное β, что будет выполняться условие

$$\left|\int_0^z H(z, \zeta, t-\tau) dz\right| \leqslant \beta \tag{19}$$

В силу последнего неравенства из формулы (18) имеем

$$|\psi_1| \leqslant \beta \int_0^t d\tau \int_0^\infty \varphi_0^2(\zeta, \tau)\, d\zeta \tag{20}$$

Оценим теперь $\varphi_0^2(\zeta, t)$. Обозначим через ω_0 максимум абсолютного значения ω. Из формулы (8) получим

$$|\varphi_0(\zeta, t)| \leqslant \frac{\omega_0}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \exp\left(-\frac{\zeta}{4\nu(t-\tau)}\right) \frac{\zeta d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}$$

Подстановкой $t - \tau = \zeta^2/_4\nu\eta^2$ последнее неравенство приведем к виду

$$|\varphi_0(\zeta, t)| \leqslant \frac{2\omega_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\zeta/2\sqrt{\nu t}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta \tag{21}$$

Интеграл в правой части последнего неравенства обозначим через J. Для таких ζ, для которых $\zeta \geqslant 2\sqrt{\nu t}$, будем иметь

$$J \leqslant \int_{\zeta/2\sqrt{\nu t}}^\infty e^{-\eta^2} \eta d\eta = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\nu t}\right)$$

Если же $\zeta < 2\sqrt{\nu t}$, то J представим в виде суммы,

$$J = \int^1 e^{-\eta^2} d\eta + \int_1^\infty e^{-\eta^2} d\eta$$

или, интегрируя по частям первый интеграл в правой части, получим

$$J = e - \frac{\zeta}{2\sqrt{\nu t}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\nu t}\right) + 2\int_{\zeta/2\sqrt{\nu t}}^1 e^{-\eta^2} \eta^2 d\eta + \int_1^\infty e^{-\eta^2} d\eta$$

Отсюда можем написать

$$J < e - \frac{\zeta}{2\sqrt{\nu t}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\nu t}\right) + 4 \int_{\zeta/2\sqrt{\nu t}}^1 e^{-\eta^2} \eta d\eta + 2\int_1^\infty e^{-\eta^2} \eta d\eta =$$
$$= \left(2 - \frac{\zeta}{2\sqrt{\nu t}}\right) \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\nu t}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\nu t}\right)$$

Таким образом, из формулы (21) получим

$$|\varphi_0^2(\zeta, t)| < \frac{16\omega_0^2}{\pi} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\nu t}\right)$$

На основании последнего неравенства формулу (20) можем переписать в следующем виде:

$$|\psi_1| < \frac{16\beta\omega_0^2}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\nu\tau}\right) d\zeta = \frac{16\sqrt{2}}{3} \beta\omega_0^2 \sqrt{\frac{\nu t^3}{\pi}}$$

т. е.

$$|v_z| < \frac{32}{3} \beta\omega_0^2 \sqrt{\frac{2\nu t^3}{\pi}}$$

Следовательно, v_z остается ограниченной во всем бесконечном интервале z и не может превосходить значение (22).

Аналогично можно построить третье приближение и т. д. и каждый раз можно проверить, что v_z ограничена на бесконечности.

Легко проверить непосредственно, что построенное нами решение задачи (1), (2), (3) удовлетворяет также соответствующим уравнениям симметричного пограничного слоя около пластинки.

Поступила 23 II 1954

Тбилисский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под редакцией С. Гольдштейна, т. I, 1948 г., стр. 122.
2. Д. Е. Долидзе. Решение уравнения нестационарного пограничного слоя Прандтля. Сообщения Акад. наук Грузинской ССР (на груз. языке, с русск. рез.), т. V. № 9, 1944 г.
3. Д. Е. Долидзе. Нелинейная краевая задача неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, т. XII, вып. 2, 1948.