

## О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

§ 1. Введение. При плоской одномерной нестационарной изотермической фильтрации газа в пористой среде давление газа  $p$ , как показал Л. С. Лейбензон [1], удовлетворяет уравнению Буссинеска:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

где  $t$  — время,  $x$  — координата,  $a$  — константа, зависящая от свойств газа и пористой среды. Аналогичное уравнение имеет место для напора при нестационарном движении грунтовых вод. Для определенности будем говорить далее об изотермической фильтрации газа; все выводы будут относиться также к движению грунтовых вод.

Пласт в дальнейшем предполагается бесконечным, так что  $0 \leq x < \infty$ . Пусть  $p \rightarrow P = \text{const}$  при  $x \rightarrow \infty$ . Положим  $\zeta = P^2 - p^2$ . Уравнение (1.1) при этом приведет к виду:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 2a^2 \sqrt{P^2 - \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

Это уравнение совпадает<sup>1</sup> с уравнением теории пограничного слоя в форме Мизеса<sup>[2,3]</sup>, если вместо  $t$  подставить продольную координату  $x$ , вместо  $x$  — функцию тока  $\Psi$ , вместо  $2a^2$  — коэффициент вязкости жидкости  $\nu$ , вместо  $P$  — значение скорости на внешней границе пограничного слоя.

Краевые условия задачи теории фильтрации записываются в виде:

$$\zeta(0, t) = P^2 - p^2(0, t), \quad \zeta(x, 0) = 0, \quad \zeta(\infty) = 0 \quad (1.3)$$

если задается давление на границе пласта  $p(0, t)$  и начальное давление  $p(x, 0) \equiv P$ . Для течения в пограничном слое около плоской пластинки краевые условия задачи в тех же обозначениях выглядят следующим образом:

$$\zeta(0, t) = P^2, \quad \zeta(x, 0) = 0, \quad \zeta(\infty) = 0 \quad (1.4)$$

Если  $p(0, t) = 0$ , то имеет место формальная аналогия задачи теории фильтрации и задачи теории пограничного слоя. Именно эта аналогия

<sup>1</sup> Заметим, что скорость на внешней границе пограничного слоя зависит, вообще говоря, от продольной координаты. В наших переменных это соответствует тому, что  $P$  зависит от  $t$ . В теории фильтрации задачи, приводящие к таким уравнениям, не рассматривались.

дала возможность П. Я. Кочкиной использовать результаты теории пограничного слоя при решении соответствующей задачи теории фильтрации (задача опорожнения бассейна<sup>[4]</sup>).

Опираясь на близость уравнений теории пограничного слоя и одномерной нестационарной фильтрации, С. А. Христианович выдвинул идею создания приближенных методов решения нестационарных фильтрационных задач по образцу апробированных приближенных методов теории пограничного слоя.

В теории пограничного слоя большое значение имеют приближенные методы, использующие точные решения задачи, зависящие от некоторого параметра. При построении приближенного решения этот параметр варьируется таким образом, чтобы получающиеся функции удовлетворяли интегральным соотношениям теории пограничного слоя. Таковы методы Хауэрза<sup>[2,5]</sup>, Н. Е. Кочина — Л. Г. Лойцянского<sup>[2,6]</sup>. В методе Кочина — Лойцянского используются автомодельные решения Фокнера-Скэн<sup>[7]</sup>, затабулированные Хартри<sup>[8]</sup>.

В предлагаемой работе рассматриваются приближенные методы решения задач одномерной нестационарной фильтрации, использующие подобным образом имеющиеся точные решения этой задачи.

**§ 2. Приближенное решение задачи одномерной нестационарной фильтрации газа при нулевом начальном давлении газа в пространстве. Приближенное решение задачи одномерной фильтрации жидкости при упругом режиме.** 1°. При изотермической нестационарной одномерной фильтрации газа в пористой среде давление газа  $p$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{1}{x^s} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^s \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) \quad (2.1)$$

( $s = 0, 1, 2$  соответственно для плоских, осесимметричных и центральносимметричных движений). Если при  $x = 0$  (т. е. соответственно на границе пласта, на оси или в центре симметрии течения) задан поток газа, то имеем граничное условие:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^s \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) = -\Psi(t) \quad (2.2)$$

Если, далее, начальное давление газа в пространстве мало сравнительно с создаваемыми давлениями, то им можно пренебречь и считать начальное давление газа в пространстве равным нулю. В этом случае

$$p(x, 0) \equiv 0 \quad (2.3)$$

Отметим, что та же математическая задача (при  $s = 0, 1$ ) отвечает фильтрации грунтовых вод в сухой грунт.

Для плоских движений представляет интерес задача, когда задается давление газа на границе пласта, что соответствует граничному условию

$$p(0, t) = \Phi(t) \quad (2.4)$$

При рассмотрении движения с осевой и центральной симметрией задание величины давления на оси или в центре симметрии приводит, вообще говоря, к задаче, лишенной физического смысла, так как можно

показать, что при отличном от нуля потоке газа через ось, или центр симметрии течения давление на оси, или в центре симметрии течения обязательно должно быть бесконечно большим.

Относительно функций  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$ , входящих в граничные условия, будем в этом параграфе предполагать, что  $\Phi(t)$  — монотонно неубывающая,  $\Psi(t)$  — неотрицательная функции.

2°. В работах<sup>[9,10]</sup> построены точные решения задачи для частного вида функции  $\Psi(t)$  в условии (2.2), именно  $\Psi(t) = \tau t^\beta$ ;  $\tau, \beta$  — некоторые константы. В плоском случае это решение дает

$$p(x, t) = a^{1/2} (\tau t^\beta)^{1/2} t^{1/2} f_0 \left[ \frac{x}{a^{1/2} (\tau t^\beta)^{1/2} t^{1/2}}, \beta \right] \quad (2.5)$$

где  $f_0(\xi, \beta)$  — интеграл уравнения

$$\frac{d^2 f_0^2}{d\xi^2} + \frac{\beta + 2}{2} \xi \frac{df_0}{d\xi} - \frac{2\beta + 1}{3} f_0 = 0 \quad (2.6)$$

при условиях

$$\left[ \frac{df_0^2}{d\xi} \right]_{\xi=0} = -1, \quad f_0(\infty) = 0 \quad (2.7)$$

В случае осесимметричных движений имеем:

$$p(x, t) = (\tau t^\beta)^{1/2} f_1 \left[ \frac{x}{a (\tau t^\beta)^{1/2} t^{1/2}}, \beta \right], \quad (2.8)$$

где  $f_1(\xi, \beta)$  — интеграл уравнения

$$\frac{d^2 f_1^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{df_1^2}{d\xi} + \frac{\beta + 2}{4} \xi \frac{df_1}{d\xi} - \frac{\beta}{2} f_1 = 0 \quad (2.9)$$

при условиях

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{df_1^2}{d\xi} = -1, \quad f_1(\infty) = 0 \quad (2.10)$$

В случае центрально-симметричных движений решение имеет вид:

$$p(x, t) = a^{-1/2} (\tau t^\beta)^{1/2} t^{-1/2} f_2 \left[ \frac{x}{a^{1/2} (\tau t^\beta)^{1/2} t^{1/2}}, \beta \right] \quad (2.11)$$

где  $f_2(\xi, \beta)$  — интеграл уравнения

$$\frac{d^2 f_2^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{df_2^2}{d\xi} + \frac{\beta + 2}{5} \xi \frac{df_2}{d\xi} - \frac{2\beta - 1}{5} f_2 = 0 \quad (2.12)$$

при условиях

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \frac{df_2^2}{d\xi} = -1, \quad f_2(\infty) = 0 \quad (2.13)$$

причем функции  $f_s(\xi)$  должны быть непрерывными и иметь непрерывную величину  $d(f_s^2)/d\xi$ .

В работах<sup>[9,10]</sup> было показано, что на самом деле функции  $f_s(\xi)$  отличны от нуля лишь на некотором конечном отрезке  $(0, \xi_s)$ , где  $\xi_s(\beta)$  — некоторые, вполне определенные функции от  $\beta$ . Там же показано, что условие  $f_s(\infty) = 0$  можно во всех случаях заменить на

$$M_s(\beta) = \int_0^{\xi_s} f_s(\xi, \beta) \xi^s d\xi = \frac{1}{1 + \beta} \quad (2.14)$$

а также дан способ эффективного вычисления функций  $f_s(\xi)$ .



3°. Отличительной чертой рассматриваемой общей задачи является наличие конечной скорости распространения возмущения [11, 9, 10], т. е. наличие некоторого фронта, передвигающегося с конечной скоростью и отделяющего область, в которой давление газа отлично от нуля, от области, где давление газа равно нулю.

Обозначим координату переднего фронта газа через  $x^*(t)$  и выведем некоторое интегральное соотношение, существенное для дальнейшего. Умножая (2.1) на  $x^s$  и интегрируя от  $x=0$  до  $x=x^*(t)$ , получаем:

$$\int_0^{x^*(t)} x^s \frac{\partial p}{\partial t} dx = a^2 [x^*(t)]^s \frac{\partial p^2 [x^*(t), t]}{\partial x} - a^2 \lim_{x \rightarrow 0} x^s \frac{\partial p^2}{\partial x} \quad (2.15)$$

Имеем

$$\int_0^{x^*(t)} x^s \frac{\partial p}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int_0^{x^*(t)} p(x, t) x^s dx - [x^*(t)]^s p [x^*, t] \frac{dx^*}{dt} \quad (2.16)$$

На переднем фронте давление и поток газа непрерывны; откуда:

$$p [x^*(t), t] = 0, \quad \frac{\partial p^2 [x^*(t), t]}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

поскольку по другую сторону фронта газ отсутствует. Подставляя (2.17) и используя (2.16), приведем (2.15) к виду:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{x^*(t)} p(x, t) x^s dx = - a^2 \lim_{x \rightarrow 0} x^s \frac{\partial p^2(x, t)}{\partial x} \quad (2.18)$$

Это интегральное соотношение выражает тот факт, что производная по времени от полной массы газа в пространстве равна притоку газа соответственно через границу пласта, ось, или центр симметрии.

4°. Предлагаемый приближенный метод решения рассматриваемой задачи состоит в следующем. Решения берутся в виде:

в плоском случае;

$$p(x, t) = a^{2/3} [\Psi(t)]^{2/3} t^{1/3} f_0 \left[ \frac{x}{a^{2/3} [\Psi(t)]^{1/3} t^{1/3}}, \beta(t) \right] \quad (2.19)$$

в осесимметричном случае:

$$p(x, t) = [\Psi(t)]^{1/2} f_1 \left[ \frac{x}{a [\Psi(t)]^{1/2} t^{1/2}}, \beta(t) \right] \quad (2.20)$$

в центральносимметричном случае:

$$p(x, t) = a^{-1/2} [\Psi(t)]^{1/2} t^{-1/2} f_2 \left[ \frac{x}{a^{1/2} [\Psi(t)]^{1/2} t^{1/2}}, \beta(t) \right] \quad (2.21)$$

где функции  $f_0, f_1, f_2$  имеют прежние значения. Легко видеть, что при любой  $\beta(t)$  выражения (2.19) — (2.21) удовлетворяют начальным и граничным условиям задачи. Распорядимся функцией  $\beta(t)$  так, чтобы получающиеся функции  $p(x, t)$  удовлетворяли интегральному соотношению (2.18). Выражения (2.19) — (2.21) дают для всех случаев

$$\int_0^{x^*(t)} p(x, t) x^s dx = a^2 \Psi(t) t \int_0^{\xi_s} f_s(\xi, \beta) \xi^s d\xi = a^2 \Psi(t) t M_s(\beta) \quad (2.22)$$

Подставляя (2.22) в интегральное соотношение (2.18) и интегрируя по времени, получим последовательно:

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) t M_s(\beta) = \Psi(t), \quad M_s(\beta) = \frac{1}{\Psi(t) t} \int_0^t \Psi(t) dt \quad (2.23)$$

Используя (2.14), получим выражение для  $\beta(t)$ :

$$\beta(t) = t \Psi(t) \left( \int_0^t \Psi(t) dt \right)^{-1} - 1 \quad (2.24)$$

Для  $x^*(t)$  — координаты переднего фронта — получаем формулы в плоском случае:

$$x^*(t) = a^{1/2} \xi_0 [\beta(t)] [\Psi(t)]^{1/2} t^{1/2} \quad (2.25)$$

в осесимметричном случае:

$$x^*(t) = a \xi_1 [\beta(t)] [\Psi(t)]^{1/2} t^{1/2} \quad (2.26)$$

в центральносимметричном случае:

$$x^*(t) = a^{1/2} \xi_2 [\beta(t)] [\Psi(t)]^{1/2} t^{3/2} \quad (2.27)$$

*Пример.* Пусть  $\Psi(t) = \tau_m t^m + \tau_n t^n$ , причем  $m < n$ . По формуле (2.24)

$$\beta(t) = \frac{\tau_m t^{m+1} + \tau_n t^{n+1}}{\frac{1}{m+1} \tau_m t^{m+1} + \frac{1}{n+1} \tau_n t^{n+1}} - 1$$

При малых  $t$  вторые члены числителя и знаменателя малы сравнительно с первыми, так что  $\beta \approx m + 1 - 1 = m$ . При больших  $t$ , наоборот, вторые члены числителя и знаменателя велики сравнительно с первыми, так что  $\beta \approx n + 1 - 1 = n$ , т. е. в процессе движения происходит переход от одного автотомодельного режима к другому.

5°. Рассмотрим решение уравнения (1.1) при условиях (2.3), (2.4), отвечающих нулевому начальному давлению газа в пространстве и возрастанию давления на границе пласта по некоторому закону. Ранее [9,10] были построены точные решения этой задачи в частных предположениях о функции  $\Phi(t)$ , именно  $\Phi(t) = \sigma t^\alpha$ , где  $\sigma, \alpha$  — положительные константы.

Решение имеет вид:

$$p(x, t) = \sigma t^\alpha f \left[ \frac{x}{a \sqrt{(\sigma t^\alpha) t}}, \alpha \right] \quad (2.28)$$

где  $f(\xi, \alpha)$  — интеграл уравнения

$$\frac{d^2 f^2}{d\xi^2} + \frac{\alpha + 1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} - \alpha f = 0 \quad (2.29)$$

при условиях

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0 \quad (2.30)$$

причем функция  $f$  должна быть непрерывной и иметь непрерывную величину  $d(f^2)/d\xi$ . В работах [9,10] было показано, что функция  $f(\xi, \alpha)$  отлична от нуля лишь на конечном отрезке  $(0, \xi^*)$ , где  $\xi^*(\alpha)$  — некоторая функция от  $\alpha$ , и может быть получена из функции  $f_0(\xi, \beta)$  предыдущих пунктов при помощи некоторого преобразования из группы

преобразований  $\Phi(\xi) = \mu^{-2} f(\mu\xi)$ , относительно которой уравнение (2.29) инвариантно. В работе [10] приведены таблицы и графики для функций  $f(\xi, \alpha)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 3$  и для функции  $\xi^*(\alpha)$ . Наконец, показано [9], что условие  $f(\infty) = 0$  можно заменить эквивалентным условием:

$$N(\alpha) = \int_0^{\xi^*(\alpha)} \xi f(\xi, \alpha) d\xi = \frac{1}{2\alpha + 1} \quad (2.31)$$

6°. Выведем второе интегральное соотношение. Умножим обе части (1.1) на  $x$ , проинтегрируем от  $x = 0$  до  $x = x^*(t)$ , имеем:

$$\int_0^{x^*(t)} x \frac{\partial p}{\partial t} dx = a^2 \int_0^{x^*(t)} x \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} dx \quad (2.32)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^{x^*(t)} x \frac{\partial p}{\partial t} dx &= \frac{d}{dt} \int_0^{x^*(t)} x p(x, t) dx - x^*(t) p[x^*(t), t] \frac{dx^*}{dt} \\ \int_0^{x^*(t)} x \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} dx &= x \frac{\partial p^2}{\partial x} \Big|_0^{x^*(t)} - \int_0^{x^*(t)} \frac{\partial p^2(x, t)}{\partial x} dx = \\ &= x \frac{\partial p^2}{\partial x} \Big|_0^{x^*(t)} - p^2[x^*(t), t] + p^2[0, t] \end{aligned}$$

Вспоминая (2.17) и используя последние соотношения, приведем (2.32) к виду:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{x^*(t)} x p(x, t) dx = a^2 p^2(0, t) \quad (2.33)$$

Это интегральное соотношение выражает собой закон сохранения в пространстве диполей [12], отвечающих уравнению параболического типа (1.1). Отметим, что интегральные соотношения (2.33) и (2.18) являются частными случаями весьма общего интегрального соотношения, которое получается умножением обеих частей уравнения (1.1) на  $x^k$  ( $k$  — некоторое неотрицательное целое число) и последующим интегрированием от  $x = 0$  до  $x = x^*(t)$ .

7°. Ищем приближенное решение уравнения (1.1) при условиях (2.3), (2.4) в виде:

$$p(x, t) = \Phi(t) f\left[\frac{x}{aV\Phi(t)t}, \alpha(t)\right] \quad (2.34)$$

При любой функции  $\alpha(t)$  выражение (2.34) удовлетворяет граничному и начальному условиям задачи. Функцию  $\alpha(t)$  выберем так, чтобы (2.34) удовлетворяло интегральному соотношению (2.33). Имеем:

$$\int_0^{x^*(t)} x p(x, t) dx = a^2 \Phi^2(t) t \int_0^{\xi^*} \xi f(\xi, \alpha) d\xi = a^2 \Phi^2(t) t N(\alpha) \quad (2.35)$$



Подставляя (2.35) в (2.33) и интегрируя, получим последовательно

$$\frac{d}{dt} \Phi^2(t) t N[\alpha(t)] = \Phi^2(t), \quad N[\alpha(t)] = \frac{1}{\Phi^2(t) t} \int_0^t \Phi^2(t) dt \quad (2.36)$$

Используя (2.31), получим для функции  $\alpha(t)$  выражение:

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \Phi^2(t) t \left( \int_0^t \Phi^2(t) t \right)^{-1} - \frac{1}{2} \quad (2.37)$$

Для величины координаты переднего фронта газа имеем:

$$x^*(t) = a \xi^*[\alpha(t)] \sqrt{\Phi(t) t} \quad (2.38)$$

Пример. Пусть  $\Phi(t) = \sigma_m t^m + \sigma_n t^n$ , причем  $m < n$ . Тогда по формуле (2.37) имеем

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_m^2 t^{2m+1} + 2\sigma_m \sigma_n t^{m+n+1} + \sigma_n^2 t^{2n+1}}{\frac{1}{2m+1} \sigma_m^2 t^{2m+1} + \frac{1}{m+n+1} 2\sigma_m \sigma_n t^{m+n+1} + \frac{1}{2n+1} \sigma_n^2 t^{2n+1}} - 1 \right\}$$

При малых  $t$  первые члены числителя и знаменателя велики сравнительно с остальными, так что

$$\alpha \approx \frac{1}{2} [2m + 1 - 1] = m$$

При больших  $t$ , наоборот, последние члены числителя и знаменателя велики сравнительно с остальными, так что

$$\alpha \approx \frac{1}{2} [2n + 1 - 1] = n$$

Таким образом, происходит переход от одного автомодельного режима к другому.

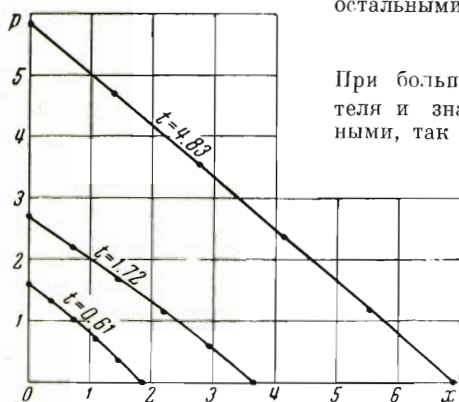
Для числовых расчетов положим

$$a = 1, \quad m = 0, \quad \sigma_m = \sigma_n = 1, \quad n = 1$$

Тогда

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + 2t + t^2}{1 + t + \frac{1}{3} t^2} - 1 \right),$$

$$p(x, t) = (1 + t) f \left[ \frac{x}{\sqrt{t + t^2}}, \alpha(t) \right]$$



Фиг. 1

Пользуясь таблицами функций  $f(\xi, \alpha)$ , данными в работе [10] можно рассчитать  $p(x, t)$  в разных точках в разные моменты времени. Результаты вычислений представлены на графике фиг. 1.

8°. Предложенный в этом параграфе приближенный метод может быть применен к задачам фильтрации жидкости при упругом режиме. Для плоских и сферически-симметричных движений можно получить сравнительно эффективные точные решения. Поэтому приближенный метод будет излагаться применительно к случаю осесимметричного движения.

Уравнение для давления  $p$  имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (2.39)$$

Решение краевой задачи для этого уравнения с условиями

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = -\tau a^2, \quad p(r, 0) \equiv P \quad (2.40)$$

автомодельно и равно

$$p = \tau t^a f(\xi, q) + P, \quad \xi = \frac{r}{a\sqrt{t}} \quad (2.41)$$

где  $f(\xi, q)$  — интеграл уравнения

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} - qf = 0 \quad (2.42)$$

удовлетворяющий условиям:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{df}{d\xi} = -1, \quad f(\infty) = 0 \quad (2.43)$$

Можно показать, что функция  $f(\xi, q)$  удовлетворяет соотношению

$$\int_0^{\infty} \xi f(\xi, q) d\xi = \frac{1}{1+q} \quad (2.44)$$

Если поток жидкости на бесконечности равен нулю, то имеет место интегральное соотношение:

$$\frac{d}{dt} \int_R^{\infty} [p(r, t) - P] r dr = -a^2 \lim_{r \rightarrow R} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (2.45)$$

где  $R$  — радиус скважины. В частности, при  $R = 0$  имеем:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} [p(r, t) - P] r dr = -a^2 \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (2.46)$$

Приближенное решение уравнения (2.39) при условиях

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = -\psi(t), \quad p(r, 0) = P \quad (2.47)$$

где  $\psi(t)$  — некоторая знакпостоянная функция, ищем в виде

$$p(r, t) = \psi(t) f \left[ \frac{r}{a\sqrt{t}}, q(t) \right] + P \quad (2.48)$$

Функцию  $q(t)$  подберем так, чтобы удовлетворить интегральному соотношению (2.46). Аналогично предыдущему, получим, используя (2.44)

$$q(t) = \psi(t) t \left( \int_0^t \psi(t) dt \right)^{-1} - 1 \quad (2.49)$$

Если скважина имеет конечный радиус, то решение уравнения (2.39) при условиях

$$R \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R} = -\psi(t), \quad p(r, 0) = P \quad (2.50)$$

приближенно ищем снова в виде (2.48), но функцию  $q(t)$  выбираем так, чтобы удовлетворить интегральному соотношению (2.45). Подставляя (2.48) в (2.45) и используя первое условие (2.50), имеем

$$\int_R^{\infty} [p(r, t) - P] r dr = a^2 \psi(t) t \int_R^{\infty} f(\xi, q(t)) \xi d\xi = a^2 \int_0^t \psi(t) dt \quad (2.51)$$



Отсюда для определения  $q(t)$  получаем уравнение:

$$T\left(\frac{R}{a\sqrt{t}}, q(t)\right) = \int_{\frac{R}{a\sqrt{t}}}^{\infty} \xi f(\xi, q(t)) d\xi = \frac{1}{\psi(t)t} \int_0^t \psi(t) dt \quad (2.52)$$

Определив  $q(t)$ , получим распределение давления в пласте по формуле (2.48).

Практически определение  $q(t)$  можно осуществлять следующим образом. Заметим предварительно, что

$$T(\eta, q) = \int_{\eta}^{\infty} \xi f(\xi, q) d\xi = -\frac{1}{1+q} \left\{ \eta \left( \frac{df}{d\xi} \right)_{\xi=\eta} + \frac{\eta^2}{2} f(\eta, q) \right\} \quad (2.53)$$

Это соотношение получается умножением (2.42) на  $\xi$  и интегрированием от  $\xi = \eta$  до  $\xi = \infty$ . Построим предварительно сетку кривых  $T(\eta, q)$ , отвечающих разным, по возможности близким, значениям  $q$ . Для момента  $t = t_1$  находим  $\eta = \eta_1$  по формуле  $\eta_1 = R/a\sqrt{t_1}$  и  $T = T_1$  по формуле

$$T_1 = \frac{1}{\psi(t_1)t_1} \int_0^{t_1} \psi(t) dt$$

Далее определяем, какому значению параметра  $q(t_1)$  отвечает кривая, проходящая через точку пересечения прямых  $\eta = \eta_1$  и  $T = T_1$ . (В случае надобности следует прибегнуть к интерполяции.)

Заметим в заключение, что приближенный метод этого параграфа может быть буквально перенесен на уравнения вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{1}{x^s} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^s \frac{\partial p^n}{\partial x} \right)$$

при произвольном положительном  $n$ , описывающие фильтрацию газа при политропическом режиме.

**§ 3. Приближенное решение задачи одномерной нестационарной изотермической фильтрации газа при постоянном начальном давлении газа в пространстве.** 1°. Эта задача приводит к уравнению (2.1) при начальном условии

$$p(x, 0) \equiv P = \text{const} \quad (3.1)$$

и граничном условии (2.2), если задан поток газа при  $x = 0$ . В случае плоских течений газа представляет интерес также рассмотрение задачи с граничным условием (2.4), задающим закон изменения давления на границе пласта.

*Замечание.* В отличие от рассмотренного в предыдущем параграфе случая  $P = 0$  в рассматриваемом случае скорость распространения возмущений будет, как это легко показать, бесконечной, т. е. возмущение будет бесконечно быстро распространяться, как это имеет место в классическом уравнении теплопроводности.

Однако это возмущение будет иметь существенную величину лишь в некоторой ограниченной области вблизи границы пласта (соответственно оси или центра симметрии течения), естественно, разрастающейся со временем. Вне этой области влияния возмущение весьма близко к нулю. Область влияния в рассматриваемой фильтрацион-

ной задаче аналогична пограничному слою в гидродинамике вязкой жидкости. Будем продолжать обозначать величину области влияния через  $x^*(t)$ , как и в предыдущем параграфе, где это понятие имело вполне определенный смысл благодаря наличию конечной скорости распространения возмущений. В соответствии с определением области влияния будем считать, что при  $x = x^*(t)$  имеют место соотношения:

$$p(x^*, t) = P, \quad [x^*(t)]^s \frac{\partial p^2 [x^*, t]}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

2°. Выведем интегральные соотношения задачи. Умножим обе части (1.1) на  $x$  и проинтегрируем от  $x = 0$  до  $x = \infty$ . Аналогично § 2 получим интегральное соотношение:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} x [p(x, t) - P] dx = a^2 p^2(0, t) - a^2 P^2 \quad (3.3)$$

Вводя область влияния, перепишем это соотношение в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{x^*(t)} x [p(x, t) - P] dx = a^2 p^2(0, t) - a^2 P^2 \quad (3.4)$$

Далее, умножим обе части (2.1) на  $x^s$  и проинтегрируем от  $x = 0$  до  $x = \infty$ , получаем интегральное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} x^s [p(x, t) - P] dx = -a^2 \lim_{x \rightarrow 0} x^s \frac{\partial p^2(x, t)}{\partial x} \quad (3.5)$$

Вводя область влияния, перепишем это соотношение в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{x^*(t)} x^s [p(x, t) - P] dx = -a^2 \lim_{x \rightarrow 0} x^s \frac{\partial p^2(x, t)}{\partial x} \quad (3.6)$$

3°. Перейдем к приближенному решению поставленной задачи. Начнем с плоского случая. Известно, что если на нулевой границе пласта поддерживается давление  $P_1 = \text{const}$ , то решение задачи имеет вид:

$$p(x, t) = P_1 F(\xi, \lambda), \quad \xi = \frac{x}{a \sqrt{P_1 t}}, \quad \lambda = \frac{P}{P_1} \quad (3.7)$$

где функция  $F$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 F^2}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{dF}{d\xi} = 0 \quad (3.8)$$

и условиям

$$F(0, \lambda) = 1, \quad F(\infty, \lambda) = \lambda \quad (3.9)$$

Эти решения были впервые изучены П. Я. Кочиной, затабулировавшей  $F(\xi, \lambda)$  для ряда значений  $\lambda$ .

Второе условие (3.9) может быть приведено к другой форме. Формула (3.7) дает

$$\int_0^{\infty} x [p(x, t) - P] dx = a^2 P_1^2 t \int_0^{\infty} \xi [F(\xi, \lambda) - \lambda] d\xi \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в интегральное соотношение (3.3), получим:

$$\int_0^{\infty} \xi [F(\xi, \lambda) - \lambda] d\xi = 1 - \lambda^2 \quad (3.11)$$

Предлагаемый приближенный метод решения уравнения (1.1) при начальном условии (3.1) и граничном условии (2.4), где  $\Phi(t)$  произвольная монотонно-неубывающая или монотонно-невозрастающая функция, состоит в следующем. Приближенное решение задачи берется в виде

$$p(x, t) = \Phi(t) F \left[ \frac{x}{aV\Phi(t)\sigma(t)}, \frac{P}{\Phi(t)} \right] \quad (3.12)$$

При любом  $\sigma(t)$  выражение (3.12) удовлетворяет начальному и граничному условиям задачи. Выберем  $\sigma(t)$  так, чтобы выражение (3.12) удовлетворяло интегральному соотношению (3.3). Уравнения (3.11) и (3.12) дают:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x [p(x, t) - P] dx &= a^2 \Phi^2(t) \sigma(t) \int_0^{\infty} \xi \left\{ F \left( \xi, \frac{P}{\Phi(t)} \right) - \frac{P}{\Phi(t)} \right\} d\xi = \\ &= a^2 \sigma(t) [\Phi^2(t) - P^2] \end{aligned}$$

Подставляя последнее равенство в интегральное соотношение (3.3) и интегрируя, получаем

$$\sigma(t) = \frac{1}{\Phi^2(t) - P^2} \int_0^t [\Phi^2(t) - P^2] dt \quad (3.13)$$

4°. Точные решения рассмотренного в предыдущем пункте типа могут быть применены для построения приближенных решений уравнения (2.1) при начальном условии (3.1) и граничном условии (2.2), задающем поток газа через границу пласта (соответственно через ось или центр симметрии течения). В частном предположении

$$\Psi(t) = Qt^{\frac{s-1}{2}}, \quad Q = \text{const} \quad (3.14)$$

решения этой задачи автомодельны и имеют следующий вид.

В плоском случае:

$$p(x, t) = PF_0(\xi, \lambda), \quad \xi = \frac{x}{aV\sqrt{Pt}}, \quad \lambda = \frac{aQ}{P^{3/2}} \quad (3.15)$$

где  $F_0(\xi, \lambda)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 F_0^2}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{dF_0^2}{d\xi} = 0 \quad (3.16)$$

при условиях

$$\frac{dF_0^2}{d\xi} = -\lambda, \quad F_0(\infty, \lambda) = 1 \quad (3.17)$$

причем аналогично п°. 3 второе условие (3.17) можно привести к виду

$$\int_0^{\infty} [F_0(\xi, \lambda) - 1] d\xi = 2\lambda \quad (3.18)$$



В осесимметричном случае:

$$p(x, t) = PF_1(\xi, \lambda), \quad \xi = \frac{x}{a\sqrt{Pt}}, \quad \lambda = \frac{Q}{P^2} \quad (3.19)$$

где  $F_1(\xi, \lambda)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 F_1^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dF_1^2}{d\xi} + \frac{\xi}{2} \frac{dF_1}{d\xi} = 0 \quad (3.20)$$

при условиях

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{dF_1^2}{d\xi} = -\lambda, \quad F_1(\infty, \lambda) = 1 \quad (3.21)$$

причем второе условие (3.21) можно привести к виду:

$$\int_0^{\infty} \xi [F_1(\xi, \lambda) - 1] d\xi = \lambda \quad (3.22)$$

В центральносимметричном случае:

$$p(x, t) = PF_2(\xi, \lambda), \quad \xi = \frac{x}{a\sqrt{Pt}}, \quad \lambda = \frac{Q}{aP^{3/2}} \quad (3.23)$$

где  $F_2(\xi, \lambda)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 F_2^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{dF_2^2}{d\xi} + \frac{\xi}{2} \frac{dF_2}{d\xi} = 0 \quad (3.24)$$

при условиях

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \frac{dF_2^2}{d\xi} = -\lambda, \quad F_2(\infty, \lambda) = 1 \quad (3.25)$$

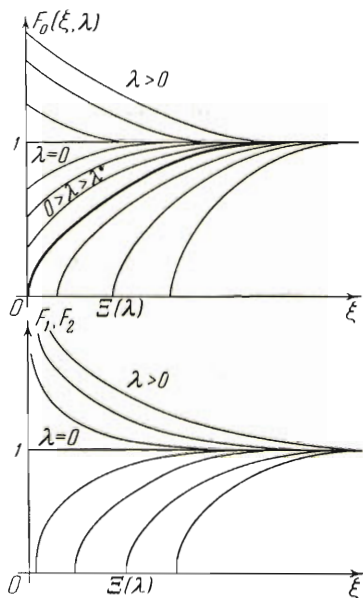
причем второе условие может быть приведено к виду:

$$\int_0^{\infty} \xi^2 [F_2(\xi, \lambda) - 1] d\xi = \frac{2}{3} \lambda \quad (3.26)$$

5°. Графики функций  $F_0$  и  $F_1, F_2$  изображены на фиг. 2. Функции  $F_1$  и  $F_2$  имеют при  $\xi = 0$  особенность. Для положительных  $\lambda$  все соответствующие кривые  $F_s(\xi, \lambda)$  как угодно близко подходят к оси ординат. Если  $\lambda$  отрицательно, то при  $0 \geq \lambda \geq \lambda^*$  кривая  $F_0(\xi, \lambda)$  доходит до оси ординат, причем граничная кривая  $\lambda = \lambda^*$  отвечает изученной П. Я. Кочинской задаче опорожнения бассейна [4]. Пользуясь результатами П. Я. Кочинской, можно получить, что  $\lambda^* = -0,470$ . Все кривые, удовлетворяющие условию  $F_s(\infty, \lambda) = 1$  и не удовлетворяющие условию  $\lambda \geq \lambda^*$  для  $F_0(\xi, \lambda)$  и условию  $\lambda \geq 0$  для  $F_1$  и  $F_2$ , до оси ординат не доходят, а подходят к оси абсцисс под прямым углом, причем абсцисса точки подхода  $\Xi$  не равна нулю. Первые условия (3.17), (3.21), (3.25) при этом следует переформулировать следующим образом

$$\left[ \xi^s \frac{dF_s^2}{d\xi} \right]_{\xi=\Xi} = -\lambda$$

Поведение функций  $F_s(\xi, \lambda)$  при отрицательных  $\lambda$  естественно объясняется следующим образом. Отрицательные  $\lambda$  отвечают отбору газа. В случае плоского движения при достаточно медленном отборе давление в нулевой плоскости (на границе пласта) будет отлично от нуля. Повышая интенсивность отбора, получим давление газа на границе пласта равным нулю. Этому движению отвечает кривая с  $\lambda = \lambda^*$ . Поскольку давление газа не может быть меньше нуля, дальнейшее увеличение отбора газа из пласта может быть осуществлено только при условии перемещения границы пласта. Это может быть достигнуто постепенной его выработкой (как в угольном пласте). Кривые  $F_0(\xi, \lambda)$ , упирающиеся в ось абсцисс и не доходящие до оси ординат, отвечают автомодельным движениям этого типа, причем, как легко показать, скорость перемещения границы пласта обратно пропорциональна для этих движений квадратному корню из времени.



Фиг. 2

Исследование показывает, что при  $\lambda < 0$  кривые  $F_1(\xi, \lambda)$  и  $F_2(\xi, \lambda)$  все подходят к оси абсцисс под прямым углом и до оси ординат не доходят. Каждая из этих кривых отвечает автомодельному движению, при котором отбор газа из пласта происходит через расширяющуюся скважину (соответственно расширяющийся сферический сток), причем скорость этого расширения, как и в плоском случае, обратно пропорциональна квадратному корню из времени.

Из сказанного следует, что для отбора газа в осесимметричном и центральносимметричном случаях задачу можно решить, только с учетом конечности радиуса отбирающего стока. Положим теперь

$$\Psi(t) = Q(t) t^{\frac{s-1}{2}} \tag{3.27}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что в плоском случае  $Q(t)$  таково, что соответствующее  $\lambda \geq \lambda^*$ , т. е.  $Q(t) \geq -0,470 \frac{1}{a} P^{3/2}$ , а в осе- и центральносимметричных случаях будем считать пока  $Q \geq 0$ .

6°. Перейдем к приближенному решению уравнения (2.1) при условиях (3.1) и (2.2). Для плоского случая берем приближенное решение в виде:

$$p(x, t) = PF_0\left[\frac{x}{aV P \sigma_0(t) t}, \Lambda(t)\right], \quad \Lambda(t) = \frac{aQ(t)[\sigma_0(t)]^{1/2}}{P^{3/2}} \tag{3.28}$$

легко проверить, что при любом  $\sigma_0(t)$  выражение (3.28) удовлетворяет начальному и граничному условиям задачи. Выберем функцию  $\sigma_0(t)$

так, чтобы (3.28) удовлетворило интегральному соотношению (3.5). Используя (3.18), получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [p(x, t) - P] dx &= aP\sqrt{P\sigma_0(t)t} \int_0^{\infty} [F_0(\xi, \Lambda) - 1] d\xi = \\ &= 2a^2Q(t)\sqrt{t}\sigma_0(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Подставляя (3.29) в (3.5), используя (2.2) и интегрируя, получаем:

$$\sigma_0(t) = \frac{1}{2Q(t)\sqrt{t}} \int_0^t \frac{Q(t) dt}{\sqrt{t}} \quad (3.30)$$

В осесимметричном случае берем приближенное решение задачи в виде:

$$p(x, t) = PF_1\left(\frac{x}{a\sqrt{P\sigma_1(t)t}}, \frac{Q(t)}{P^2}\right), \quad \sigma_1(t) = \frac{1}{Q(t)t} \int_0^t Q(t) dt \quad (3.31)$$

В центральносимметричном случае берем приближенное решение задачи в виде:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= PF_2\left(\frac{x}{a\sqrt{P\sigma_2(t)t}}, \frac{Q(t)P^{-5/2}}{a[\sigma_2(t)]^{1/2}}\right) \\ \sigma_2(t) &= \frac{3}{2Q(t)t^{3/2}} \int_0^t Q(t)\sqrt{t} dt \end{aligned} \quad (3.32)$$

Аналогично плоскому случаю доказывается, что выражения (3.31) и (3.32) удовлетворяют начальному и граничному условиям задачи при произвольном  $\sigma_s(t)$ . Выражения для  $\sigma_s(t)$  выбраны так, чтобы удовлетворить интегральному соотношению (3.5).

7°. В случаях движений газа с осевой и центральной симметрией представляет интерес рассмотрение задачи, в которой задается поток газа не через ось или центр симметрии, а через некоторый цилиндр, или, соответственно, сферу конечного радиуса. При рассмотрении отбора газа из пласта такая постановка является вообще единственно возможной, поскольку в нелинейной постановке задача с отбирающей осью или отбирающим точечным стоком вообще не имеет решения. Оказывается возможным получение приближенного решения и этой задачи при помощи методов рассматриваемого типа.

Итак, решается уравнение (2.1) при начальном условии (3.4) и граничном условии

$$R^s \left(\frac{\partial p^2}{\partial x}\right)_{x=R} = \Psi(t) = -Q(t)t^{1/2(s-1)} \quad (3.33)$$

задающем поток газа через скважину (соответственно сферу) конечного радиуса  $R$ . Функцию  $Q(t)$  будем предполагать знакопостоянной, однако уже не обязательно знакположительной. Если  $Q(t) < 0$ , то имеет место,



очевидно, отбор газа из пласта. Аналогично предыдущему придем к интегральному соотношению

$$\frac{d}{dt} \int_R^\infty x^s [p(x, t) - P] dx = - a^2 R^s \left( \frac{\partial p^2}{\partial x} \right)_{x=R} \quad (3.34)$$

Рассмотрим сперва осесимметричный случай ( $s = 1$ ). Приближенное решение задачи берем в виде:

$$p(x, t) = P F_1 \left( \frac{x}{a \sqrt{P \sigma_1(t) t}}, \lambda_1(t) \right) \quad (3.35)$$

где функция  $F_1(\xi, \lambda)$  — та же, что в предыдущем параграфе. Функции  $\sigma_1(t)$  и  $\lambda_1(t)$  следует выбрать так, чтобы удовлетворить граничному условию задачи и интегральному соотношению (3.34). Отметим, что начальное условие задачи в выражении (3.35) удовлетворяется при любых  $\sigma_1(t)$  и  $\lambda_1(t)$ . Подставляя в (3.34)  $s = 1$ , (3.33), (3.35) и интегрируя от нуля до  $t$ , получим

$$\int_R^\infty x [p(x, t) - P] dx = a^2 P^2 \sigma_1(t) t \int_{\eta_1}^\infty \xi [F_1(\xi, \lambda_1) - 1] d\xi = a^2 \int_0^t Q(t) dt$$

Здесь  $\eta_1(t) = R/a \sqrt{P \sigma_1(t) t}$ . Отсюда получим

$$T_1[\eta_1(t), \lambda_1(t)] = \frac{1}{\eta_1^2} \int_{\eta_1}^\infty \xi [F_1(\xi, \lambda_1) - 1] d\xi = \frac{a^2}{P R^2} \int_0^t Q(t) dt \quad (3.36)$$

Далее, подставляя  $s = 1$  и (3.35) в (3.33), имеем

$$S_1[\eta_1(t), \lambda_1(t)] = - \eta_1(t) \left[ \frac{dF_1^2}{d\xi} \right]_{\xi=\eta_1} = \frac{Q(t)}{P^2} \quad (3.37)$$

Из уравнений (3.36), (3.37) можно определять  $\eta_1(t)$  и  $\lambda_1(t)$ .

Практически это представляется удобным проводить следующим образом. Для функции  $F_1(\xi, \lambda)$  можно затабулировать  $T_1(\eta_1, \lambda_1)$  и  $S_1(\eta_1, \lambda_1)$  для разных значений  $\eta_1$  и  $\lambda_1$ . Это табулирование облегчается тем, что функции  $T_1$  и  $S_1$  связаны между собой простым соотношением. Умножим уравнение (3.20) на  $\xi$  и проинтегрируем от  $\eta_1$  до  $\infty$ , получаем:

$$\eta_1^2 [T_1(\eta_1, \lambda_1) + F_1(\eta_1, \lambda_1) - 1] = S_1(\eta_1, \lambda_1)$$

Таким образом, затабулировав одну из этих функций (и зная  $F_1$ ), без труда получаем другую. Далее, в плоскости  $\eta_1 \lambda_1$  построим графики

$$T_1(\eta_1, \lambda_1) = D, \quad S_1(\eta_1, \lambda_1) = E \quad (3.38)$$

для разных, по возможности близких между собой значений констант  $D$  и  $E$ . Этот график будет универсальным и пригодным для решения всевозможных задач рассматриваемого типа.

Для некоторого момента времени  $t = t_1$  по известным значениям

$$D = \frac{a^2}{P R^2} \int_0^{t_1} Q(t) dt, \quad E = \frac{Q(t_1)}{P^2}$$

находим  $\eta_1(t_1)$  и  $\lambda_1(t_1)$  — координаты точки пересечения кривых  $T_1(\eta_1, \lambda_1) = D$ ,  $S_1(\eta_1, \lambda_1) = E$  (в случае отсутствия таких кривых на графике следует прибегнуть к

к интерполяции). Можно показать, что при  $Q > 0$  такая точка существует, и притом только одна. Если же  $Q < 0$ , то точка пересечения указанных кривых существует при условии, что  $Q$  не превосходит по абсолютной величине некоторого предельного значения. Последнее обстоятельство имеет простой смысл: расход газа через стенки скважины не может превышать того значения, при котором давление на стенке скважины равно нулю.

По найденным  $\eta_1(t)$  и  $\lambda_1(t)$  вычисляем распределение давления по формуле (3.35), которую можно переписать в виде

$$p(x, t) = PF_1 \left[ \frac{x}{R} \eta_1(t), \lambda_1(t) \right] \quad (3.39)$$

Таким образом, приближенное решение рассмотренной в этом пункте задачи требует предварительного построения графика (3.38), или какого-либо другого способа приближенного решения уравнений (3.36), (3.37).

Рассмотрение центральносимметричных движений аналогично предыдущему. Приближенное решение задачи берем в виде

$$p(x, t) = PF_2 \left[ \frac{x}{a\sqrt{P\sigma_2(t)}t}, \lambda_2(t) \right] \quad (3.40)$$

где функция  $F_2(\xi, \lambda)$  — та же, что и в предыдущем параграфе, а функции  $\sigma_2(t)$ ,  $\lambda_2(t)$  следует выбрать так, чтобы удовлетворить граничному условию (3.33) и интегральному соотношению (3.34) (при  $s = 2$ ). Начальное условие задачи выражением (3.40) удовлетворяется при любых  $\sigma_2(t)$  и  $\lambda_2(t)$ .

Подставляя в (3.34), (3.40), (3.33) и  $s = 2$ , получаем

$$T_2[\eta_2(t), \lambda_2(t)] = \frac{1}{\eta_2^3} \int_{\eta_2}^{\infty} \xi^2 [F_2(\xi, \lambda) - 1] d\xi = \frac{a^2}{PR^3} \int_0^t Q(t) \sqrt{t} dt \quad (3.41)$$

$$S[\eta_2(t), \lambda_2(t)] = -\eta_2 \left[ \frac{dF_2^2}{d\xi} \right]_{\xi=\eta_2} = \frac{Q(t) \sqrt{t}}{P^2 R} \quad (3.42)$$

Здесь  $\eta_2(t) = R/a\sqrt{P\sigma_2(t)}$ . Найдя из системы уравнений (3.41), (3.42),  $\eta_2(t)$  и  $\lambda_2(t)$ , строим распределение давления по формуле (3.40), которую можно привести к виду

$$p(x, t) = PF_2 \left[ \frac{x}{R} \eta_2(t), \lambda_2(t) \right] \quad (3.43)$$

Для эффективного решения системы уравнений (3.41), (3.42) следует, как и в осесимметричном случае, предварительно построить в плоскости  $\eta_2, \lambda_2$  универсальный график-сетку линий

$$T_2(\eta_2, \lambda_2) = D, \quad S_2(\eta_2, \lambda_2) = E \quad (3.44)$$

отвечающих различным, по возможности близким, значениям констант  $D$  и  $E$ . В некоторый момент  $t = t_1$  по известным значениям

$$D = \frac{a^2}{PR^3} \int_0^{t_1} Q(t) \sqrt{t} dt, \quad E = \frac{Q(t_1) \sqrt{t_1}}{P^2 R}$$

строим точку пересечения кривых  $T_2(\eta_2, \lambda_2) = D$  и  $S_2(\eta_2, \lambda_2) = E$ . (В случае надобности следует прибегнуть к интерполяции.) Можно, как и в осесимметричном

случае, показать, что при  $Q > 0$  такая точка существует, и притом только одна. При  $Q < 0$  точка пересечения существует, только если  $Q$  не превосходит по абсолютному значению некоторой предельной величины, соответствующей нулевому давлению газа на поверхности отбирающей сферы. Для построения универсального графика следует предвительно затабулировать функции  $S_2$  и  $T_2$ . Это табулирование облегчается соотношением

$$S_2(\eta_2, \lambda_2) = \frac{\eta_2^3}{2} \{3T_2(\eta_2, \lambda_2) + F_2(\eta_2, \lambda_2) - 1\}$$

которое получается, если уравнение (3.24) для  $F_2(\xi, \lambda)$  умножить на  $\xi^2$  и проинтегрировать от  $\xi = \eta_2$  до  $\infty$ .

**§ 4. Приближенное решение более общей задачи.** 1°. Изложенный в § 3 приближенный метод отличается от метода § 2 тем, что из интегрального соотношения определяется не параметр соответствующего решения обыкновенного дифференциального уравнения, а зависимость от времени аргумента  $\xi$  этого решения. Параметр решения обыкновенного уравнения определяется в методе § 3 из граничных условий. Приближенный метод § 3 допускает распространение на весьма широкий класс одномерных нестационарных задач фильтрации.

В предположении произвольной связи плотности и давления газа, а также возможной сорбции, уравнение для давления газа  $p$  примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi\left(\frac{p}{p_0}\right) = a^2 \frac{1}{x^s} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^s \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (4.1)$$

где  $\varphi, \psi$  — некоторые функции, предполагаемые безразмерными,  $a$  — константа, зависящая от свойств среды и газа,  $s = 0, 1, 2$  в зависимости от того, рассматриваем ли мы плоские, осесимметричные или центрально-симметричные движения газа,  $p_0$  — константа размерности давления. (Если обе функции  $\varphi, \psi$  — степенные, то константа  $p_0$  сама по себе перестает быть существенной и включается в константу  $a$ .) В частности, к виду (4.1) может быть приведено уравнение фильтрации газа в угольном пласте, данное Р. М. Кричевским [13].

Представляет интерес рассмотрение этого уравнения при начальном условии (3.1), отвечающем постоянному начальному давлению газа в пространстве, и граничном условии

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^s \frac{\partial}{\partial x} \psi\left(\frac{p}{p_0}\right) = -Q(t) t^{1/2(s-1)} \quad (4.2)$$

где  $Q(t)$  — некоторая функция, задающем поток газа через границу пласта (соответственно ось или центр симметрии течения). Для плоских движений газа представляет интерес также рассмотрение уравнения (4.1) (при  $s = 0$ ) при начальном условии [(3.1) и граничном условии (2.4), задающем изменение давления газа на границе пласта со временем.

2°. Обобщая рассуждения §§ 2—3, получим интегральное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty x^s \left\{ \varphi\left[\frac{p(x, t)}{p_0}\right] - \varphi\left[\frac{P}{p_0}\right] \right\} dx = a^2 \left( - \lim_{x \rightarrow 0} x^s \frac{\partial}{\partial x} \psi\left(\frac{p}{p_0}\right) \right) \quad (4.3)$$



(Это интегральное соотношение представляет собой закон сохранения массы газа в пространстве. Для общего уравнения (4.1) оно впервые получено П. Я. Кочиной [14].) Для плоских течений газа ( $s=0$ ) имеет место также интегральное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} x \left\{ \varphi \left[ \frac{p(x,t)}{p_0} \right] - \varphi \left[ \frac{p}{p_0} \right] \right\} dx = a^2 \left\{ \psi \left[ \frac{p(o,t)}{p_0} \right] - \psi \left[ \frac{p}{p_0} \right] \right\} \quad (4.4)$$

3°. В частном предположении относительно  $Q(t)$

$$Q(t) = \text{const} \quad (4.5)$$

задача имеет автомодельное решение.

В случае плоских движений это решение имеет вид:

$$p(x,t) = p_0 \Theta_0(\xi, \lambda, \mu), \quad \xi = \frac{x}{aVt}, \quad \lambda = aQ, \quad \mu = \frac{P}{p_0} \quad (4.6)$$

где функция  $\Theta_0(\xi, \lambda, \mu)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \psi [\Theta_0(\xi, \lambda, \mu)] + \frac{1}{2} \xi \frac{d}{d\xi} \varphi [\Theta_0(\xi, \lambda, \mu)] = 0 \quad (4.7)$$

при условиях

$$\left\{ \frac{d}{d\xi} \psi [\Theta_0(\xi, \lambda, \mu)] \right\}_{\xi=0} = -\lambda, \quad \Theta_0(\infty, \lambda, \mu) = \mu \quad (4.8)$$

Второе условие (4.8) применением интегрального соотношения (4.4) приводится к виду

$$\int_0^{\infty} \{ \varphi [\Theta_0(\xi, \lambda, \mu)] - \varphi(\mu) \} d\xi = 2\lambda \quad (4.9)$$

В случае осесимметричных движений решение имеет вид:

$$p(x,t) = p_0 \Theta_1(\xi, \lambda, \mu), \quad \xi = \frac{x}{aVt}, \quad \lambda = Q, \quad \mu = \frac{P}{p_0} \quad (4.10)$$

где функция  $\Theta_1(\xi, \lambda, \mu)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \psi [\Theta_1(\xi, \lambda, \mu)] + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \psi [\Theta_1(\xi, \lambda, \mu)] + \frac{1}{2} \xi \frac{d}{d\xi} \varphi [\Theta_1(\xi, \lambda, \mu)] = 0 \quad (4.11)$$

при условиях

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{d}{d\xi} \psi [\Theta_1(\xi, \lambda, \mu)] = -\lambda, \quad \Theta_1(\infty, \lambda, \mu) = \mu \quad (4.12)$$

Второе условие (4.12) применением интегрального соотношения (4.4) приводится к виду

$$\int_0^{\infty} \xi \{ \varphi [\Theta_1(\xi, \lambda, \mu)] - \varphi(\mu) \} d\xi = \lambda \quad (4.13)$$

В случае центральносимметричных движений решение имеет вид:

$$p(x,t) = p_0 \Theta_2(\xi, \lambda, \mu), \quad \xi = \frac{x}{aVt}, \quad \lambda = \frac{Q}{a}, \quad \mu = \frac{P}{p_0} \quad (4.14)$$

где функция  $\Theta_2(\xi, \lambda, \mu)$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \psi [\Theta_2(\xi, \lambda, \mu)] + \frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi} \psi [\Theta_2(\xi, \lambda, \mu)] + \frac{\xi}{2} \frac{d}{d\xi} \varphi [\Theta_2(\xi, \lambda, \mu)] = 0 \quad (4.15)$$

при условиях

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \frac{d}{d\xi} \psi [\Theta_2(\xi, \lambda, \mu)] = -\lambda, \quad \Theta_2(\infty, \lambda, \mu) = \mu \quad (4.16)$$

Второе условие (4.16) применением интегрального соотношения (4.4) приводится к виду

$$\int_0^{\infty} \xi^2 \{ \varphi [\Theta_2(\xi, \lambda, \mu)] - \varphi(\mu) \} d\xi = \frac{2}{3} \lambda \quad (4.17)$$

Далее, если  $p(0, t) \equiv P_1$ , то решение уравнения (4.1) при  $s=0$ , при начальном условии (3.1) автомодельно и равно:

$$p(x, t) = p_0 \Theta(\xi, \lambda, \mu), \quad \xi = \frac{x}{aVt}, \quad \lambda = \frac{P_1}{p_0}, \quad \mu = \frac{P}{p_0} \quad (4.18)$$

где функция  $\Theta(\xi, \lambda, \mu)$  удовлетворяет уравнению (4.7) при условиях

$$\Theta(0, \lambda, \mu) = \lambda, \quad \Theta(\infty, \lambda, \mu) = \mu \quad (4.19)$$

Последнее условие (4.19) применением интегрального соотношения (4.4) приводится к виду:

$$\int_0^{\infty} \xi \{ \varphi [\Theta(\xi, \lambda, \mu)] - \varphi(\mu) \} d\xi = a^2 [\psi(\lambda) - \psi(\mu)] \quad (4.20)$$

4°. При переменном  $Q(t)$  ищем приближенное решение уравнения (4.1) при граничном условии (4.2) и начальном условии (3.1) в виде:

для плоского течения газа

$$p(x, t) = p_0 \Theta_0 \left[ \frac{x}{aV\sigma_0(t)t}, \lambda_0(t), \frac{P}{p_0} \right] \quad (4.21)$$

для осесимметричного течения газа

$$p(x, t) = p_0 \Theta_1 \left[ \frac{x}{aV\sigma_1(t)t}, \lambda_1(t), \frac{P}{p_0} \right] \quad (4.22)$$

для центральносимметричного течения газа

$$p(x, t) = p_0 \Theta_2 \left[ \frac{x}{aV\sigma_2(t)t}, \lambda_2(t), \frac{P}{p_0} \right] \quad (4.23)$$

Начальное условие задачи всеми выражениями (4.21)–(4.23) удовлетворяется при любых  $\sigma_s(t)$  и  $\lambda_s(t)$ . Функции  $\sigma_s(t)$  и  $\lambda_s(t)$  выбираются так, чтобы удовлетворить граничным условиям задачи и интегральному соотношению (4.3). Можно показать, что, подчиняя  $\sigma_s(t)$  и  $\lambda_s(t)$  этим условиям, получаем:

$$\lambda_0(t) = aQ(t)V\sigma_0(t), \quad \sigma_0(t) = \frac{1}{2Q(t)Vt} \int_0^t Q(t) \frac{dt}{Vt} \quad (4.24)$$

$$\lambda_1(t) = Q(t), \quad \sigma_1(t) = \frac{1}{Q(t)t} \int_0^t Q(t) dt \quad (4.25)$$

$$\lambda_2(t) = \frac{Q(t)}{aV\sigma_2(t)}, \quad \sigma_2(t) = \frac{3}{2Q(t)t^{3/2}} \int_0^t Q(t) V \sqrt{t} dt \quad (4.26)$$

Аналогично, при переменном  $\Phi(t)$  ищем приближенное решение уравнения (4.1) при  $s = 0$ , при начальном условии (3.1) и граничном условии (2.4) в виде

$$p(x, t) = p_0 \Theta \left[ \frac{x}{aV\sigma(t)t}, \frac{\Phi(t)}{P_0}, \frac{P}{P_0} \right] \quad (4.27)$$

Взятое в таком виде, это приближенное решение удовлетворяет граничному и начальному условиям задачи при произвольном  $\sigma(t)$ . Функция  $\sigma(t)$  подбирается так, чтобы удовлетворить интегральному соотношению (4.4). Можно показать, что

$$\sigma(t) = \frac{1}{\vartheta(t)t} \int_0^t \vartheta(t) dt, \quad \vartheta(t) = \psi \left[ \frac{\Phi(t)}{P_0} \right] - \psi \left[ \frac{P}{P_0} \right] \quad (4.28)$$

В заключение автор пользуется случаем глубоко поблагодарить С. А. Христиановича за указания при выполнении настоящей работы.

Поступила 2 II 1954.

Институт нефти АН СССР.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ГИТТЛ, М. — Л., 1947.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. II, ГИТТЛ, М. — Л., 1948.
3. Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя. ГИТТЛ, М. — Л., 1941.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. Об одном нелинейном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации. ДАН СССР, т. LXIII, вып. 6, 1948.
5. Howarth L. On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, № 919, 1938.
6. Кочин Н. Е. и Лойцянский Л. Г. Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя. ДАН СССР, т. XXXVI, вып. 9, 1942.
7. Falkner V. M. and Skan Sylvia W. Some approximate solutions of the boundary layer equations. Aeronautical Research Committee, Reports and Memoranda, № 1314, 1930.
8. Hartree D. R. On an equation, occurring in Falkner and Skan approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Camb. Phil. Soc., v. 33, 1937.
9. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, т. XVI, вып. I, 1952.
10. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, т. XVI, вып. 6, 1952.
11. Зельдович Я. Б. и Компанеев А. С. О распространении тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сб., посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. Изд. АН СССР, 1950.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики. т. 4, ГИТТЛ, М. — Л., 1951, стр. 748 и след.
13. Кричевский Р. М. О природе внезапных выделений газа с выбросом угля. Бюллетень МАКНИИ, № 18, 1948.
14. Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившейся фильтрации газа в угольном пласте. ПММ, т. XVII, вып. 6, 1953.