Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В СЛУЧАЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ

Е. А. Барбашин и Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} i = X_i (x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где X_i — непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1, \ldots, x_n, t$ в области $t_0 \leqslant t < \infty$, $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$, обращающиеся в нуль в точке $O(0, \ldots, 0)$ при всех $t \geqslant t_0$.

В одной из своих работ [1] Н. П. Еругин отметил, что до сих пор является открытым вопрос о существовании функции Ляпунова в случае устойчивости при любых начальных возмущениях очевидного решения $x_i \equiv 0$ системы (1).

Заметим следующее. Если правые части системы не зависят от t, то, поделив их на

$$N = \sqrt{1 + X_1^2 + \cdots + X_n^2}$$

получим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{X_i}{N} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

всякое решение которой продолжаемо в промежутке $-\infty < t < \infty$.

Если очевидное решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом, то таковым будет и очевидное решение системы (2). По теореме 2 нашей работы [2] система (2) имеет бесконечно большую [2] функцию Ляпунова, которая, очевидно, будет функцией Ляпунова и для системы (1).

Ниже показано, что и в случае, когда правые части системы (1) зависят от t, вопрос о существовании функции Ляпунова решается в положительном смысле при достаточно общих предположениях о системе (1).

Заметим, что формулировка устанавливаемой ниже теоремы аналогична формулировке теоремы И. Г. Малкина [3] о существовании функции Ляпунова в случае равномерной асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова. Метод же доказательства в основных чертах подобен доказательству соответствующих теорем И. Л. Массера [4] и И. Г. Малкина [3]. Дадим предварительно ряд определений.

Решение. $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (1) назовем равномерно устойчивым в целом, если для любых чисел $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$ можно указать число $T(R_1, R_2)$, зависящее непрерывно лишь от R_1 и R_2, такое, что всякое решение $x_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}, \tau_0, t)$ $(i=1, \ldots, n)$, начальные значения которого при $t=\tau_0 \geqslant t_0$ лежат в области

$$x_{10}^2 + \cdots + x_{n0}^2 \leqslant R_1^2$$

удовлетворяет неравенству

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 < R_2^2 \qquad \text{при } t \geqslant \tau_0 + T(R_1, R_2)$$

и при этом для любого числа $R_1 > 0$ существует число $R = F(R_1)$, зависящее непрерывно лишь от R_1, такое, что всякая траектория, начавшаяся внутри сферы радиуса R_1 при возрастании времени не выходит из сферы радиуса R.

Нетрудно показать, что в стационарном случае устойчивость в целом будет всегда равномерной.

В дальнейшем будем говорить, что функция $\psi(x_1, \ldots, x_n, t)$ допускает высший предел в области H, если существует непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая в области H неравенству

$$|\psi(x_1, \ldots, x_n, t)| < f(x_1, \ldots, x_n)$$

при всех $t \geqslant t_0$. Если при этом точка $O(0, \ldots, 0)$ принадлежит области H и $f(0, \ldots, 0) = 0$, то скажем, что функция $\psi(x_1, \ldots, x_n, t)$ допускает в области H высший предел, бесконечно малый в точке O.

Везде в дальнейшем предполагается, что частные производные $\partial X_i / \partial t$, $\partial X_i / \partial x_j$ $(i=1, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, n)$ допускают высший предел во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$ $(i=1, \ldots, n)$.

Назовем функцию $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ определенно положительной и бесконечно большой во всем пространстве, если существует непрерывная, определенно положительная, бесконечно большая [2] функция $w(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая неравенству

$$v(x_1, \ldots, x_n, t) \geqslant w(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{для } -\infty < x_i < \infty \ (i=1, \ldots, n) \text{ при } t \geqslant t_0$$

Теорема 1. Для того чтобы решение $x_1 = x_2 \ldots = x_n = 0$ системы (1) было равномерно устойчивым в целом, необходимо и достаточно, чтобы во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$ $(i=1, \ldots, n)$ существовала определенно положительная, бесконечно большая функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, допускающая высший предел, бесконечно малый в точке 0, имеющая определенно отрицательную во всем пространстве $\{x_i\}$ производную dv/dt.

Доказательство. Достаточность условий теоремы устанавливается аналогично доказательству теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости. Тот факт, что при этом действительно получается равномерная асимптотическая устойчивость, подчеркнут в цитированной выше статье [3]. Докажем необходимость условий теоремы. Обозначим

$$F(p, t_0, t) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(x_{1p}, \ldots, x_{np}, t_0, t)$$

где p — некоторая точка пространства $\{x_i\}$.

Частные производные $\partial X_i / \partial t$, $\partial X_i / \partial x_j$ допускают высший предел, поэтому внутри сферы

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \tag{3}$$

выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial t}\right| < L, \qquad \left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right| < L \qquad (L = \text{const}) \tag{4}$$

Вследствие равномерной устойчивости в целом для любого числа $R > 1$ можно указать число $\theta(R)$, ограничивающее временную длину траектории, начальная точка которой лежит на сфере $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$ и лежащей целиком вне сферы (3). Нетрудно видеть, что функцию $\theta(R)$ при наших предположениях можно выбрать непрерывной, монотонно возрастающей и такой, что $\lim \theta = \infty$ при $R \to \infty$.

Построим непрерывную функцию $\varphi(t)$ для $-\infty < t < \infty$ монотонно убывающую по t и удовлетворяющую неравенствам

$$\varphi(t - \theta(R)) > F(p, \tau_0, \tau_0 + t) \tag{5}$$

для точек p, лежащих на сфере $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$ при $R > 1$ и

$$\varphi(t) > F(p, \tau_0, \tau_0 + t) \tag{6}$$

для p, лежащих внутри и на сфере (3).

Существование функции $\varphi(t)$, определенной при $t \geqslant 0$ и удовлетворяющей условию (6), доказано в работах [3, 4]. Для того чтобы удовлетворить условию (5), следует продолжить эту функцию на интервал $-\infty < t < 0$, что всегда можно выполнить при наших предположениях. При этом метод построения $\varphi(t)$ на отрицательной полуоси t аналогичен методу построения $\varphi(t)$ при $t \geqslant 0$, изложенному в цитированных статьях.

Исходя из того факта, что производные $\partial X_i / \partial x_j$ допускают высший предел, и принимая во внимание условия

$$X_i(0, \ldots, 0, t) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

нетрудно доказать, что функции X_i допускают высший предел во всем пространстве, т. е. существует функция $f(r)$, удовлетворяющая неравенству

$$f(r) > \sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2} \qquad \text{при } x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2 \qquad (0 < r < \infty) \tag{7}$$

Построим положительную монотонно возрастающую дифференцируемую функцию $G(\varphi)$, удовлетворяющую условиям

$$\int_0^\infty G(\varphi(t))\, dt < \infty, \qquad \int_0^\infty G'(\varphi(t))\, e^{nLt}\, dt < \infty \tag{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{G(r^2)}{f(r)}\, dr = \infty \tag{9}$$

Построение функции $G(\varphi)$, удовлетворяющей условиям (8), выполнено в работе И. Л. Массера [4]. Очевидно, функцию, построенную методом И. Л. Массера для $\varphi \leqslant \varphi(0)$, всегда можно продолжить для больших значений φ так, чтобы удовлетворить условию (10).

Функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенная в точке p формулой

$$v(p, t) = \int_t^\infty G(F(p, t, \tau))\, d\tau \tag{10}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы.

Действительно, вдоль траекторий системы (1) имеем[3, 4]

$$\frac{dv}{dt} = -G(F(p, t, t)) = -G(x_{1p}^2 + \cdots + x_{np}^2) \tag{11}$$

Тот факт, что функция $v(p, t)$ является функцией класса C^1 во всем пространстве, доказывается аналогично тому, как это сделано в статьях[3, 4]. В этих статьях показано, что функция v имеет ограниченные частные производные в окрестности точки O. Совершенно аналогично в нашем случае доказывается, что частные производные функции $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ допускают высший предел во всем пространстве $\{x_i\}$.

Покажем, что функция $v(p, t)$ является бесконечно большой. Рассмотрим точку p, лежащую на сфере $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R^2\,(R > 1)$. Заменяя в (11) $d\tau$ по формуле

$$\frac{ds}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}} = d\tau$$

и применяя очевидное неравенство $ds \geqslant |dr|$, вследствие (7) получим

$$v(p, t) = \int_t^\infty G(F(p, t, \tau))\,d\tau \geqslant \int_1^R G(r^2)\frac{dr}{f(r)}$$

Принимая во внимание (10), убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Существование высшего предела для $v(p, t)$ в области $R > 1$ (существование бесконечно малого высшего предела для v в области $R < 1$ показано в статьях[3, 4]) следует из неравенств

$$|v(p, t)| < \int_0^\infty G(\varphi(-\theta(R) + \tau))d\tau = \int_0^\infty G(\varphi(\tau))\,d\tau + \int_{-\theta(R)}^0 G(\varphi(\tau))\,dt = M(R)$$

Теорема доказана. Результат теоремы 1 может быть использован для решения следующей задачи.

Назовем систему уравнений (1) устойчивой по отношению к запаздываниям, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $\delta(\varepsilon) > 0$ и $h > 0$, такие, что, какова бы ни была система функций $\eta_{ij}(t)$ $(i = 1, \ldots, n;$ $j = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющих при $t \geqslant t_0$ неравенствам

$$|\eta_{ij}(t)| < h \tag{12}$$

всякое решение системы с запаздыванием аргумента[5]

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t - \eta_{i1}), \ldots, x_n(t - \eta_{in}), t) \tag{13}$$

начинающееся при $\tau = \tau_0 \geqslant t_0$ в δ-окрестности точки $O(0, \ldots, 0)$, не выйдет за пределы ε-окрестности этой точки[1] при всех $t > \tau_0$.

Пусть решение $x_i \equiv 0$ системы (1) устойчиво в целом. Назовем систему (1) устойчивой по отношению к запаздываниям в целом, если для любых двух чисел $R > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно указать постоянное число h,

---

[1] Как известно [5], для задания начальных условий при $\tau = \tau_0$ необходимо задать дугу траектории на отрезке $\tau_0 - h \leqslant t \leqslant \tau_0$. При формулировке определения предполагается, что эта дуга целиком лежит в δ-окрестности точки O.

такое, что при выполнении неравенств (12) всякое решение системы уравнений с запаздыванием (13), начинающееся внутри сферы $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$ при $t = \tau_0$, при возрастании времени попадает и остается внутри ε-окрестности начала координат.

Теорема 2. Если очевидное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы уравнений (1) равномерно устойчиво в целом, то система (1) устойчива в целом по отношению к запаздываниям.

Доказательство. Покажем сначала, что при условиях теоремы система (1) устойчива (в малом) по отношению к запаздываниям. Рассмотрим функцию $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1. Пусть $m(\varepsilon)$ — нижняя грань значений, принимаемых функцией v на сфере

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \varepsilon^2$$

при $t \geqslant t_0$. Функция v является функцией определенно положительной, поэтому $m(\varepsilon) > 0$. Вследствие существования бесконечно малого высшего предела для функции v можно указать число $\delta(\varepsilon)$, такое, что внутри сферы

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \delta^2(\varepsilon) \tag{14}$$

верхняя грань значений, принимаемых функцией v при всех $t \geqslant t_0$, будет меньше $m(\varepsilon)$. В области

$$\delta^2 \leqslant x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant \varepsilon^2 \tag{15}$$

производная dv/dt при $t \geqslant t_0$ имеет отрицательную верхнюю грань $-k^2$ Пусть число h удовлетворяет неравенству

$$h < \frac{k^2}{2n^3\varepsilon ML^2} \tag{16}$$

где

$$L = \max\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|, \qquad M = \max\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

при $t \geqslant t_0$ в области (15).

Вычислим производную функции $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ по времени вдоль траектории системы (13)

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(13)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i(x_1(t-\eta_{i1}), \ldots, x_n(t-\eta_{in}), t) =$$

$$= \frac{dv}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}(X_i(x_1(t-\eta_{i1}), \ldots, x_n(t-\eta_{in}), t) - X_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), t)) \tag{17}$$

где dv/dt — производная функции v в силу уравнений (1).

Применяя ко второму слагаемому (17) теорему о среднем и учитывая, что $\Delta x_i < h \max|X_i| < hnL\varepsilon$, получим, вследствие (16), оценку

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(13)} < \frac{dv}{dt} + n^3\varepsilon ML^2 h < -\frac{k^2}{2} \tag{18}$$

для всех точек области (15). Из оценки (18) следует, что траектория системы (13), начавшаяся при $t = \tau_0 \geqslant t_0$ в δ-окрестности точки O, не может выйти при $t > \tau_0$ из ε-окрестности этой точки, если h удовлетворяет неравенству (16).

Таким образом для доказательства устойчивости системы (1) по отношению к запаздываниям в целом достаточно показать, что при h достаточно малом всякая траектория системы (13), начавшаяся при $t = \tau_0 \geqslant t_0$ в области

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2 \tag{19}$$

при возрастании времени попадает внутрь сферы (14). Пусть $M(R)$ — верхняя грань функции v на сфере (19) при $t \geqslant t_0$; так как v допускает высший предел, то $M(R) < \infty$. Функция v является бесконечно большой. Поэтому можно указать число R_1, такое, что на сфере

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R_1^2 \tag{20}$$

нижняя грань функции v при $t \geqslant t_0$ больше $M(R)$.

В области

$$\delta^2(\varepsilon) \leqslant x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R_1^2 \tag{21}$$

производная dv/dt в силу уравнений (1) имеет отрицательную верхнюю грань $-l^2$ при $t \geqslant t_0$. Выбирая h удовлетворяющим условию

$$h < \frac{l^2}{2n^3 R_1 L_1^2 M_1} \qquad \left(L_1 = \max\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|, \quad M_1 = \max\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\right)$$

получим при $t \geqslant t_0$ внутри сферы (20), как и выше, оценку

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(13)} < -\frac{l^2}{2} \tag{22}$$

Из оценки (22) и выбора числа R_1 непосредственно видим, что при возрастании времени траектория системы (13), начинающаяся при $t = \tau_0 > t_0$ в области (13), при возрастании времени остается внутри сферы (20) и, следовательно, наступит такой момент времени, когда точка этой траектории попадет внутрь сферы (14). Теорема доказана.

В заключение заметим следующее. Как нетрудно видеть из доказательства теоремы 2, вопрос об устойчивости системы (1) по отношению к запаздываниям подобен задаче об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях.

Поступила 16 III 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Методы А. М. Ляпунова и вопросы устойчивости в целом. ПММ, т. XVII, вып. 4, 1953.
2. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. 86, вып. 3, 1952.
3. Малкин И. Г. К вопросу об обращении теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
4. I. L. Massera. On Liapounoff's condition of stability. Annals of Mathematics, т. 50, вып. 3, 1949 г.
5. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. УМН, т. 4, вып. 5, 1949.