Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Р. А. Спасский

(Ленинград)

Рассматривается один из критических случаев устойчивости движения, встречающийся в некоторых системах автоматического регулирования.

Для построения функции Ляпунова [1] исходными служат результаты, содержащиеся в книге А. И. Лурье [2]. Кроме того, были использованы работы И. Г. Малкина [3], Н. П. Еругина [4], А. М. Летова [5].

§ 1. Постановка задачи. Будем предполагать, что система регулирования описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}x_j + \sum_{s=1}^{m} h_{si}f_s(\sigma_s) \qquad (i = 1, \ldots, N)$$
$$\sigma_s = \sum_{j=1}^{N} p_{sj}x_j \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

где m — число регулирующих органов, $f_s(\sigma_s)$ — некоторые нелинейные функции, b_{ij}, h_{si}, p_{sj} — постоянные, причем характеристическое уравнение $|b_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = 0$ имеет k нулевых корней, простых относительно элементарных делителей матрицы $\|b_{ij} - \delta_{ij}\lambda\|$, и n отличных от нуля, различных с отрицательными вещественными частями ($n + k = N$).

Пусть линейным преобразованием с неособенной матрицей уравнения регулируемой системы приведены к каноническому виду

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + \sum_{s=1}^{m} g_{s1}f_s(\sigma_s) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{z}_n &= \lambda_n z_n + \sum_{s=1}^{m} g_{sn}f_s(\sigma_s) \\
\dot{z}_{n+1} &= \sum_{s=1}^{m} g_{s,\, n+1}f_s(\sigma_s) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{z}_{n+k} &= \sum_{s=1}^{m} g_{s,\, n+k}f_s(\sigma_s) \\
\sigma_s &= \sum_{j=1}^{N} \gamma_{sj}z_j \qquad (s = 1, \ldots, m;\ n + k = N)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — вещественные отрицательные и различные, $\lambda_{l+1}, \lambda_{l+2}, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ — комплексные попарно сопряженные различные числа с $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$. Можно показать, что величины

(1.3)

g_{sj}, γ_{sj} $(s = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, l, n+1, \ldots, N)$ — вещественные постоянные

$g_{s,\,l+1}, g_{s,\,l+2}, \ldots, g_{s,\,n-1}, g_{sn}$
$\gamma_{s,\,l+1}, \gamma_{s,\,l+2}, \ldots, \gamma_{s,\,n-1}, \gamma_{sn}$ — комплексные постоянные, попарно сопряженные

$z_1, \ldots, z_l, z_{n+1}, \ldots, z_N$ — вещественные переменные

$z_{l+1}, z_{l+2}, \ldots, z_{n-1}, z_n$ — комплексные переменные, попарно сопряженные

Будем, как обычно, предполагать, что:

а) функции $f_s(\sigma_s)$ непрерывны и при этом такие, что при любых начальных условиях обеспечивается единственность решения системы (1.2);

б) кроме того,

$$\sigma_s f_s(\sigma_s) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma_s \neq 0, \qquad f_s(\sigma_s) = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_s = 0$$

Требуется установить:

1) условия единственности положения равновесия $z_1 = 0, \ldots, z_N = 0$.

2) достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия при произвольном выборе функций $f_s(\sigma_s)$ и при любых допустимых в регулировании начальных отклонениях.

Заметим, что в вопросах регулирования обычно $z_1, \ldots, z_N, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — ограниченные (по модулю) величины.

§ 2. Условия единственности положения равновесия. Можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. Для единственности положения равновесия $z_1 = 0, \ldots, z_N = 0$ необходимо, чтобы число регулирующих органов было не меньше числа нулевых корней.

Допустим, что $z_1 = c_1, \ldots, z_N = c_N$ — положение равновесия системы (1.2) (c_i — постоянные), причем число регулирующих органов меньше числа нулевых корней, т. е. $m < k$. В таком случае

$$\lambda_\nu c_\nu + g_{1\nu} f_1(\sigma_1) + \ldots + g_{m\nu} f_m(\sigma_m) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

$$g_{1\beta} f_1(\sigma_1) + \ldots + g_{m\beta} f_m(\sigma_m) = 0 \qquad (\beta = n+1, \ldots, N) \tag{2.2}$$

$$\sigma_s = \gamma_{s1} c_1 + \ldots + \gamma_{sN} c_N \qquad (s = 1, \ldots, m;\ n + k = N)$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что если $m < k$, то этой системе можно удовлетворить значениями c_i, из которых не все равны нулю.

Действительно, система (2.2) удовлетворяется при $f_s(\sigma_s) = 0$, а подстановка $f_s(\sigma)_s = 0$ в (2.1) дает $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$. Однако $f_s(\sigma_s) = 0$ лишь при условии, что $\sigma_s = 0$ $(s = 1, \ldots, m)$.

Следовательно, $c_1, \ldots, c_N$ будут удовлетворять (2.1)—(2.2) как только $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$ и $\gamma_{s,\,n+1} c_{n+1} + \ldots + \gamma_{sN} c_N = 0$ $(s = 1, \ldots, m)$. А так как

$k = N - n$ и $m < k$, то система уравнений относительно $c_{n+1}, \ldots, c_N$ допускает ненулевое решение, что противоречит условию единственности положения равновесия. Поэтому $m \geqslant k$.

Лемма 2. Если число регулирующих органов равно числу нулевых корней, то для единственности положения равновесия необходимо и достаточно, чтобы

$$|\gamma_{i,\, n+j}| \neq 0, \qquad |g_{i,\, n+j}| \neq 0 \qquad (i,\, j = 1, \ldots, m) \tag{2.3}$$

Докажем сначала необходимость.

а) Допустим, что $|\gamma_{i,\, n+j}| = 0$. Система (2.2) удовлетворяется при $\sigma_1 = 0, \ldots, \sigma_m = 0$, а система (2.1) при $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$ и $\sigma_1 = 0, \ldots$ $\ldots, \sigma_m = 0$. Однако уравнения

$$\gamma_{s,\, n+1} c_{n+1} + \ldots + \gamma_{sN} c_N = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m;\ m = k = N - n)$$

имея определитель, равный нулю, допускают решения, отличные от нулевого, что противоречит условию единственности.

Из этого следует, что $|\gamma_{i,\, n+j}| \neq 0$.

б) Пусть $|\gamma_{i,\, n+j}| \neq 0$, $|g_{i,\, n+j}| = 0$. Тогда система (2.2) может быть удовлетворена некоторыми значениями $\sigma_s = \sigma_{0s}$ ($s = 1, \ldots, m$; σ_{0s} — постоянные, не все равные нулю).

Подстановка этих значений в систему (2.1) дает

$$\lambda_\nu c_\nu = -\sum_{s=1}^{m} g_{s\nu} f_s(\sigma_{0s}) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

Допустим, что все правые части равны нулю. Следовательно, $c_1 = 0, \ldots$ $\ldots, c_n = 0$ и система (2.1) — (2.2) удовлетворяется при $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$

$$\gamma_{s,\, n+1} c_{n+1} + \ldots + \gamma_{sN} c_N = \sigma_{0s} \qquad (s = 1, \ldots, m;\ m = k = N - n)$$

Последняя система уравнений имеет ненулевое решение $c_{n+1}, \ldots, c_N$, так как $|\gamma_{i,\, n+j}| \neq 0$ и среди σ_{0s} есть отличные от нуля.

Однако для единственности положения равновесия необходимо $c_1 = 0, \ldots$ $\ldots, c_N = 0$. Поэтому или $|g_{i,\, n+j}| \neq 0$, или среди сумм в (2.4) есть хотя бы одна, отличная от нуля. В последнем случае величины $c_1, \ldots, c_n$ определим соотношением

$$c_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{s=1}^{m} g_{si} f_s(\sigma_{0s}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Величины $c_{n+1}, \ldots, c_N$ можно найти из системы уравнений

$$\gamma_{s,\, n+1} c_{n+1} + \ldots + \gamma_{sN} c_N = \sigma_{0s} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\gamma_{si} g_{\beta i}}{\lambda_i} f_\beta(\sigma_{0\beta})$$

так как $|\gamma_{i,\, n+j}| \neq 0$.

Таким образом, система (2.1) — (2.2) удовлетворяется значениями $c_1, \ldots, c_N$, из которых одно не будет равно нулю.

Мы пришли к противоречию с условием единственности положения равновесия. Следовательно, $|g_{i,\, n+j}| \neq 0$.

Докажем теперь достаточность условий леммы. Из $|g_{i,\, n+j}| \neq 0$ и системы (2.2) следует, что

$$f_1(\sigma_1) = 0, \ldots, f_m(\sigma_m) = 0$$

Подстановка $f_s(\sigma_s) = 0$ в систему (2.1) дает $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$. Однако $f_s(\sigma_s) = 0$ лишь при условии, что $\sigma_s = 0$ $(s = 1, \ldots, m)$. Учитывая предыдущие соотношения, это можно записать в виде

$$\gamma_{s,\, n+1} c_{n+1} + \ldots + \gamma_{sN} c_N = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m;\ m = k = N - n)$$

Но $|\gamma_{i,\, n+j}| \neq 0$. Следовательно, $c_{n+1} = 0, \ldots, c_N = 0$, т. е. положение равновесия $z_1 = 0, \ldots, z_N = 0$, единственно.

В дальнейшем будем предполагать, что условия единственности положения равновесия выполнены.

§ 3. Первый способ построения функции Ляпунова. Введем n квадратичных форм:

$$F_i(a_{i1}z_1, \ldots, a_{in}z_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha} a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} z_\alpha z_\beta \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (3.1)$$

Здесь вещественному λ_α соответствуют вещественные $a_{i\alpha}$ $(i = 1, \ldots, n)$, а паре комплексных сопряженных λ_α, λ_β — такие же пары $a_{i\alpha}$, $a_{i\beta}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

В дальнейшем будем предполагать, что матрица $\| a_{\alpha\beta} \|$ неособенная, т. е. $| a_{\alpha\beta} | \neq 0$. Нетрудно установить [2], что F_i знакоопределенные отрицательные функции относительно $z_1, \ldots, z_n$ и

$$\dot{F}_i = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} z_\alpha \right)^2 + 2 \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} f_s \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha} a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} g_{s\beta}$$

Функцию Ляпунова построим в виде

$$V = \sum_{i=1}^{n} F_i - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=n+1}^{N} A_\alpha z_\alpha^2 \qquad (3.2)$$

Здесь A_α — некоторые положительные числа. Очевидно, что V является определенно-отрицательной функцией относительно всех $z_1, \ldots, z_N$.

Используя уравнения (1.1), найдем $\dot{V}$:

$$\dot{V} - \sum_{i=1}^{n} \dot{F}_i - \sum_{\alpha=n+1}^{N} A_\alpha z_\alpha \dot{z}_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} z_\alpha \right)^2 +$$

$$+ 2 \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} f_s \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha} a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} g_{s\beta} - \sum_{\alpha=n+1}^{N} A_\alpha z_\alpha \sum_{s=1}^{m} g_{s\alpha} f_s +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} \sigma_s f_s(\sigma_s) - \sum_{s=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_{s\alpha} z_\alpha f_s - \sum_{s=1}^{m} \sum_{\alpha=n+1}^{N} \gamma_{s\alpha} z_\alpha f_s$$

Имеем

$$\sum_{\alpha=n+1}^{N} A_\alpha z_\alpha \sum_{s=1}^{m} g_{s\alpha} f_s + \sum_{s=1}^{m} \sum_{\alpha=n+1}^{N} \gamma_{s\alpha} z_\alpha f_s =$$

$$= \sum_{\alpha=n+1}^{N} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} f_s (A_\alpha g_{s\alpha} + \gamma_{s\alpha}); \; 2\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} f_s \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha} a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} g_{s\beta} - \sum_{s=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_{s\alpha} z_\alpha f_s =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} f_s \Big(2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha} a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} g_{s\beta} - \gamma_{s\alpha}\Big)$$

Потребуем, чтобы

$$\begin{aligned} &\gamma_{sj} = -A_j g_{sj} && (s = 1, \ldots, m; \; j = n+1, \ldots, N) \\ &2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha} a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} g_{s\beta} = \gamma_{s\alpha} && (\alpha = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Тогда функцию $\dot{V}$ можно записать в виде

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} z_\alpha \Big)^2 + \sum_{s=1}^{m} \sigma_s f_s(\sigma_s)$$

Учитывая предыдущие предположения, можно утверждать, что $\dot{V}$ является знакопостоянной положительной функцией относительно всех $z_1, \ldots, z_N$ и обращается в нуль лишь при условии, что

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} z_\alpha = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \sum_{i=1}^{N} \gamma_{sj} z_j = 0 \quad (s = 1, \ldots, m)$$

Однако данная система уравнений ввиду $|\alpha_{\alpha\beta}| \neq 0$, $|\gamma_{i,\, n+j}| \neq 0$ допускает лишь одно нулевое решение $z_1 = 0, \ldots, z_N = 0$, и, следовательно, $\dot{V}$ является знакоопределенной положительной относительно всех $z_1, \ldots, z_N$.

Заметим, что условия единственности положения равновесия вошли в условия асимптотической устойчивости, причем $|\gamma_{i,\, n+j}| \neq 0$ стало следствием $|g_{i,\, n+j}| \neq 0$ и (3.3).

Итак, асимптотическая устойчивость имеет место, как только выполнены условия

$$\begin{aligned} &|g_{i,\, n+j}| \neq 0 && (i, j = 1, \ldots, m) \\ &\gamma_{sj} = -A_j g_{sj}, \quad A_j > 0 && (s = 1, \ldots, m; \; j = n+1, \ldots, N) \\ &2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha} a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} g_{s\beta} = \gamma_{s\alpha} && (s = 1, \ldots, m; \; \alpha = 1, \ldots, n) \\ &|a_{\alpha\beta}| \neq 0 && (\alpha, \beta = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{3.4}$$

В частности, при $N = n + 1$ (один нулевой корень) получим следующие условия:

$$\begin{aligned} &g_{n+1} \neq 0, \qquad \gamma_{n+1} g_{n+1} < 0 \\ &2\sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha} a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} g_\beta = \gamma_\alpha, \qquad |a_{\alpha\beta}| \neq 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Пусть, далее, в уравнениях регулируемой системы $g_1 \neq 0, \ldots, g_{n+1} \neq 0$. Совершим линейное преобразование:

$$z_i = g_i z_i', \qquad \gamma_i' = g_i \gamma_i \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

При этом условия (3.5) можно записать в виде (опуская для простоты штрих)

$$\gamma_{n+1} < 0, \qquad 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} = \gamma_\alpha, \qquad |a_{\alpha\beta}| \neq 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

§ 4. Второй способ построения функции Ляпунова. Будем строить функцию Ляпунова в следующем виде:

$$V = \sum_{i=1}^{n} F_i - \sum_{s=1}^{m} B_s \int_0^{\sigma_s} f_s(\sigma_s)\, d\sigma_s \tag{4.1}$$

Здесь B_s — некоторые положительные числа.

Так как интегралы под знаком суммы в (4.1) являются положительными величинами [1] при $\sigma_s \neq 0$, а $|\gamma_{i,\, n+j}| \neq 0$, то V будет определенно-отрицательной функцией относительно всех $z_1, \ldots, z_N$.

Учитывая уравнения (1.2), найдем

$$\dot V = \sum_{i=1}^{n} \dot F_i - \sum_{s=1}^{m} B_s f_s \dot\sigma_s = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} z_\alpha\Big)^2 -$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{m} g_{\beta j} f_\beta \sum_{s=1}^{m} B_s \gamma_{sj} f_s + \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} f_s 2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} g_{s\beta} - \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} f_s B_s \lambda_\alpha \gamma_{s\alpha}$$

Имеем [2]

$$-\sum_{j=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{m} g_{\beta j} f_\beta \sum_{s=1}^{m} B_s \gamma_{sj} f_s = -\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{m} g_{sj} f_s \sum_{s=1}^{m} B_s \gamma_{sj} f_s = \sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{s=1}^{m} g_{sj} f_s(\sigma_s)\Big)^2$$

если только потребовать

$$g_{sj} = -B_s \gamma_{sj} \qquad (s = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, N) \tag{4.2}$$

Далее

$$\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} f_s 2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} g_{s\beta} - \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} f_s B_s \lambda_\alpha \gamma_{s\alpha} =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} B_s f_s \Big(2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}\gamma_{s\beta} + \lambda_\alpha \gamma_{s\alpha}\Big)$$

---

[1] Используется теорема о среднем значении интеграла.

[2] Можно получить другие условия асимптотической устойчивости. В частности, если потребовать, чтобы квадратичная форма

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\Big(-B_s \sum_{j=1}^{N} \gamma_{sj} g_{\beta j}\Big) f_s f_\beta$$

была определенно-положительной.

Потребуем, чтобы

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha+\lambda_\beta}\gamma_{s\beta}+\lambda_\alpha\gamma_{s\alpha}=0 \qquad (s=1,\ldots,m;\ \alpha=1,\ldots,n) \qquad (4.3)$$

При соблюдении условий (4.2) и (4.3) функция $\dot{V}$ запишется в виде

$$\dot{V}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i\alpha}z_\alpha\right)^2+\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{s=1}^{m}g_{sj}f_s\right)^2+\sum_{j=l+1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{m}g_{sj}f_s\right)^2+\sum_{j=n+1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{m}g_{sj}f_s\right)^2$$

В силу соотношений (1.3), (3.1) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}z_\alpha\right)^2\geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{s=1}^{m}g_{sj}f_s\right)^2\geqslant 0, \qquad \sum_{j=n+1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{m}g_{sj}f_s\right)^2\geqslant 0$$

$$\sum_{j=l+1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{m}g_{sj}f_s\right)^2 \text{ — вещественное число}$$

Найдем условие, при котором последняя сумма неотрицательна. Пусть

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} g_{s,\,2r+l-1}&=\operatorname{Re} g_{s,\,2r+l}=v_{sr}\\ \operatorname{Im} g_{s,\,2r+l-1}&=-\operatorname{Im} g_{s,\,2r+l}=w_{sr}\end{aligned} \qquad (s=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,{}^1/_2(n-l))$$

Тогда

$$\sum_{j=l+1}^{n}\left(\sum_{s}g_{sj}f_s\right)^2=\sum_{r=1}^{{}^1/_2(n-l)}\left[\left(\sum_{s=1}^{m}g_{s,\,2r+l-1}f_s\right)^2+\left(\sum_{s=1}^{m}g_{s,\,2r+l}f_s\right)^2\right]=$$

$$=2\sum_{r=1}^{{}^1/_2(n-l)}\left[\left(\sum_{s=1}^{m}v_{sr}f_s\right)^2-\left(\sum_{s=1}^{m}w_{sr}f_s\right)^2\right]$$

Исследуемая сумма будет неотрицательной, если потребовать, чтобы

$$w_{sr}=\theta v_{sr} \qquad (-1\leqslant\theta\leqslant 1) \qquad (4.4)$$

или

$$\operatorname{Im} g_{sj}=\theta\operatorname{Re} g_{sj} \qquad (-1\leqslant\theta\leqslant 1),\ (s=1,\ldots,m;\ j=l+1,\ldots,n)$$

Таким образом, при соблюдении условий (4.2), (4.3), (4.4) $\dot{V}$ является знакопостоянной положительной относительно всех $z_1,\ldots,z_N$.

Для обращения ее в нуль необходимо, чтобы

$$\sum_{s=1}^{m}g_{sj}f_s(\sigma_s)=0 \qquad (j=n+1,\ldots,N)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}z_\alpha=0 \qquad (i=1,\ldots,n),$$

А так как $|a_{\alpha\beta}|\neq 0$, $|g_{i,\,n+j}|\neq 0$, $|\gamma_{i,\,n+j}|\neq 0$, то $z_1=0,\ldots,z_N=0$, т. е. $\dot{V}$ будет определенно-положительной относительно всех $z_1,\ldots,z_N$.

На основании теоремы Ляпунова получаем следующие достаточные условия асимптотической устойчивости:

$$|g_{i,\,n+j}| \neq 0 \qquad (i,\ j = 1, \ldots, m) \tag{4.5}$$

$$g_{sj} = -B_s\gamma_{sj}, \quad B_s > 0 \qquad (s = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, N)$$

$$\operatorname{Im} g_{sj} = \theta \operatorname{Re} g_{sj} \qquad (-1 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

($s = 1, \ldots, m$; $j = l+1, \ldots, n$, где l — число вещественных λ_i)

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha+\lambda_\beta}\gamma_{s\beta}+\lambda_\alpha\gamma_{s\alpha}=0 \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, m \\ \alpha = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

$$|a_{\alpha\beta}| \neq 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 1, \ldots, n)$$

Построим для функции V вида (4.1) другие условия асимптотической устойчивости.

Допустим, что выполнены условия

$$|g_{i,\,n+j}| \neq 0, \qquad g_{sj} = -B_s\gamma_{sj}, \qquad B_s > 0 \tag{4.6}$$

Тогда

$$\dot V = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}z_\alpha\Big)^2 + \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{s=1}^{m} g_{sj}f_s\Big)^2 +$$

$$+\sum_{j=n+1}^{N}\Big(\sum_{s=1}^{m} g_{sj}f_s\Big)^2 - \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} B_s f_s\Big(2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha+\lambda_\beta}\gamma_{s\beta}+\lambda_\alpha\gamma_{s\alpha}\Big)$$

В $\dot V$ введем член $2\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}z_\alpha\sum\limits_{s=1}^{m} g_{si}f_s$. Получим

$$\dot V = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}z_\alpha + \sum_{s=1}^{m} g_{si}f_s\Big)^2 + \sum_{j=n+1}^{N}\Big(\sum_{s=1}^{m} g_{sj}f_s\Big)^2 -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{s=1}^{m} B_s f_s\Big(2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha+\lambda_\beta}\gamma_{s\beta}+\lambda_\alpha\gamma_{s\alpha} - 2\sum_{i=1}^{n}\gamma_{si}a_{i\alpha}\Big)$$

Потребуем, чтобы были выполнены соотношения

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha+\lambda_\beta}\gamma_{s\beta}+\lambda_\alpha\gamma_{s\alpha} - 2\sum_{i=1}^{n}\gamma_{si}a_{i\alpha} = 0 \tag{4.7}$$

$$\operatorname{Im} g_{sj} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m;\ i = l+1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, n)$$

Легко установить, что условия

$$|g_{i,\,n+j}| \neq 0 \qquad (i,\ j = 1, \ldots, n)$$

$$g_{sj} = -B_s\gamma_{sj}, \quad B_s > 0 \qquad (s = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, N) \tag{4.8}$$

$$\operatorname{Im} g_{sj} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m;\ j = l+1, \ldots, n)$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha+\lambda_\beta}\gamma_{s\beta}+\lambda_\alpha\gamma_{s\alpha} - 2\sum_{i=1}^{n}\gamma_{si}a_{i\alpha} = 0 \quad (s = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)$$

$$|a_{\alpha\beta}| \neq 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 1, \ldots, n)$$

достаточны для асимптотической устойчивости положения равновесия $z_1 = 0, \ldots, z_N = 0$.

Если среди λ_i нет комплексных, то условия (4.5) и (4.8) можно записать в таком виде:

$$|g_{i,\,n+j}| \neq 0 \qquad (i,\ j = 1, \ldots, m) \tag{4.9}$$

$$g_{sj} = -B_s \gamma_{sj}, \qquad B_s > 0 \qquad (s = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, N)$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}\gamma_{s\beta} + \lambda_\alpha\gamma_{s\alpha} - 2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\gamma_{si}a_{i\alpha} = 0$$

$$(\varepsilon = 0 \text{ или } \varepsilon = 1;\ s = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)$$

$$|a_{\alpha\beta}| \neq 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 1, \ldots, n)$$

Обратим внимание на то, что в случае одного нулевого корня условия (4.5), (4.8) можно заменить более широкими:

вместо (4.5)

$$\gamma_{n+1} \neq 0, \qquad r = -\sum_{j=1}^{n+1}\gamma_j > 0$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} = \lambda_\alpha\gamma_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

$$|a_{\alpha\beta}| \neq 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n;\ \beta = 1, \ldots, n)$$

вместо (4.8)

$$\gamma_{n+1} \neq 0, \qquad r = -\sum_{j=1}^{n+1}\gamma_j > 0$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha}a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} = n\lambda_\alpha\gamma_\alpha + 2\sqrt{r}\sum_{i=1}^{n}a_{i\alpha} \qquad (a = 1, \ldots, n)$$

$$|a_{\alpha\beta}| \neq 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n;\ \beta = 1, \ldots, n)$$

Здесь предполагается $g_1 = 1, \ldots, g_{n+1} = 1$ [если $g_1 \neq 0, \ldots, g_{n+1} \neq 0$, то можно совершить линейное преобразование:

$$z_i = g_i z_i', \quad \gamma_i' = g_i\gamma_i \quad (i = 1, \ldots, n+1)]$$

Заметим, что при построении функции Ляпунова всегда предполагалось

$$|a_{\alpha\beta}| \neq 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 1, \ldots, n)$$

Однако можно установить, что это ограничение в выборе матрицы $\|a_{\alpha\beta}\|$ излишне для асимптотической устойчивости.

Действительно, в двух рассмотренных способах построения функции Ляпунова достаточно включить в V функцию

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}(C_1 z_1^2 + \cdots + C_l z_l^2) - (C_1' z_{l+1} z_{l+2} + \cdots + C_{n-l-1}' z_{n-1} z_n) \tag{4.10}$$

Постоянные C_i, C_i' войдут в полученные условия в виде свободных членов. Однако по соображениям непрерывной зависимости корней от коэффициентов уравнений их можно считать достаточно малыми, а затем отбросить, сохранив прежние условия асимптотической устойчивости без изменений.

§ 5. О построении функции Ляпунова при отсутствии нулевых корней. В данном случае система (1.2) может быть записана в виде

$$\dot{z}_\nu = \lambda_\nu z_\nu + f(\sigma) \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \qquad \sigma = \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_n z_n \tag{5.1}$$

Здесь также предполагается $g_1 = 1, \ldots, g_n = 1$.

Прежде всего установим условия единственности положения равновесия $z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$.

Если $z_1 = c_1, \ldots, z_n = c_n$ является положением равновесия системы (5.1), то

$$\lambda_\nu c_\nu + f(\sigma) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \qquad \sigma = \gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_n c_n \tag{5.2}$$

Учитывая, что $\lambda_1 c_1 = \cdots = \lambda_n c_n = -f(\sigma)$, систему (5.2) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda_r c_r + f\left(\lambda_j c_j \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\lambda_i}\right) = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n), \qquad \sigma = \lambda_j c_j \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\lambda_i} \tag{5.3}$$

Лемма 3. Для единственности положения равновесия $z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\gamma_1 / \lambda_1 + \cdots + \gamma_n / \lambda_n \geqslant 0$.

Сначала докажем достаточность.

В случае $\gamma_1 / \lambda_1 + \cdots + \gamma_n / \lambda_n = 0$ утверждение очевидно.

Поэтому будем предполагать $\gamma_1 / \lambda_1 + \cdots + \gamma_n / \lambda_n > 0$.

Так как $\lambda_1 c_1 = \cdots = \lambda_n c_n$, то все c_i равны нулю или все отличны от нуля.

Если $c_i \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$, то

$$\operatorname{sign} \lambda_r c_r = \operatorname{sign} \lambda_j c_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\lambda_i} = \operatorname{sign} f\left(\lambda_j c_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\lambda_i}\right) \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

Из этого следует, что соотношения (5.3) при $c_i \neq 0$ не удовлетворяются. Положение равновесия $z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$ единственно. Необходимость доказывается методом от противного.

(При

$$\gamma_1/\lambda_1 + \cdots + \gamma_n/\lambda_n < 0$$

положение равновесия $z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$ не будет единственным.)

Функцию Ляпунова построим в виде[1]

$$V = F_1 + \cdots + F_n \tag{5.4}$$

Здесь F_i — функции, отмеченные номером (3.1).

Используя выведенные зависимости и замечание относительно $\| a_{\alpha\beta} \|$, достаточные условия единственности положения равновесия и асимптотической устойчивости можно записать в форме

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\lambda_i} \geqslant 0, \qquad 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha} a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} = \gamma_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{5.5}$$

---

[1] Ценность условий, связанных с функцией (4.1), сомнительна, так как уже в случае двух уравнений они приводят к несовместным системам соотношений.

В книге А. И. Лурье [2] для системы (5.1) строится функция V следующим образом:

$$V = F + \Phi, \qquad F = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_\alpha a_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} z_\alpha z_\beta$$

причем Φ отмечена номером (4.10).

Отличие предлагаемого вида функции Ляпунова от $V = F + \Phi$ состоит в том, что матрица-строка $(a_1, \ldots, a_n)$ заменяется квадратной матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Эта замена целесообразна хотя бы по следующим соображениям.

Область асимптотической устойчивости, полученная для матрицы A, содержит в себе как частный случай область асимптотической устойчивости, установленную А. И. Лурье для матрицы-строки $(a_1, \ldots, a_n)$, поскольку возможен следующий выбор элементов a_{ij}:

$$a_{11} = a_1, \ldots, a_{1n} = a_n, \qquad a_{ij} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$$

Кроме того, имеется более широкий произвол в выборе элементов a_{ij}, который позволяет иногда легко установить условия асимптотической устойчивости (может быть, и узкие).

В качестве иллюстрации к сделанному замечанию рассмотрим систему

$$\dot{z}_\nu = \lambda_\nu z_\nu + f(\sigma) \qquad (\nu = 1, \ldots, n); \qquad \sigma = \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_n z_n \tag{5.6}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — вещественные отрицательные и различные числа.

Для диагональной матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

условия (5.5) запишутся в виде

$$\frac{a_\nu^2}{\lambda_\nu} = \gamma_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\lambda_i} \geqslant 0$$

Следовательно, соотношения

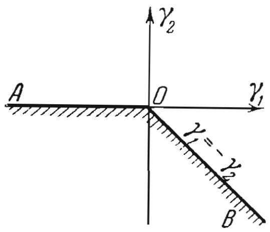
$$\gamma_1 \leqslant 0, \ldots, \gamma_n \leqslant 0 \tag{5.7}$$

определяют некоторую область асимптотической устойчивости.

Отправляясь же от матрицы-строки $(a_1, \ldots, a_n)$, установить условия (5.7), повидимому, нелегко.

§ 6. Частные случаи. *а) Случай двух уравнений и одного нулевого корня.*

Уравнения системы регулирования имеют следующий вид



Фиг. 1

$$\dot{z}_1 = \lambda z_1 + f(\sigma), \quad \dot{z}_2 = f(\sigma), \quad \sigma = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2$$

где

$$\lambda < 0, \quad g_1 = 1, \quad g_2 = 1$$

Первый и второй способы построения функции Ляпунова дают следующие условия асимптотической устойчивости (фиг. 1):

$$\gamma_2 < 0, \qquad \gamma_1 + \gamma_2 < 0 \tag{6.1}$$

б) Случай трех уравнений и одного нулевого корня

Уравнения системы регулирования имеют следующий вид

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + f(\sigma), \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + f(\sigma), \quad \dot{z}_3 = f(\sigma)$$

$$\sigma = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \gamma_3 z_3$$

1) Пусть λ_1, λ_2 — комплексные сопряженные числа с $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$. Пусть далее, в матрице Жордана

$$J = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

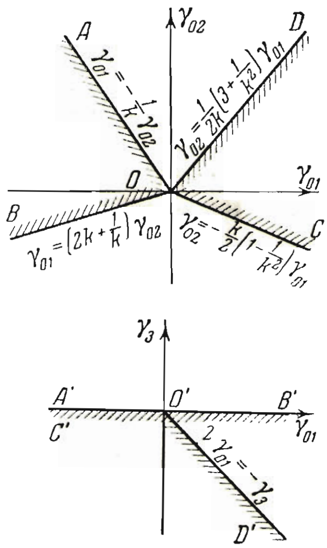
порядок следования ее диагональных элементов такой, что

$$\lambda_1 = \lambda + \mu i, \qquad \lambda_2 = \lambda - \mu i$$
$$(\lambda < 0, \ \mu > 0)$$

Первый и второй способы построения функции Ляпунова позволяют выделить следующую область асимптотической устойчивости, представленную на фиг. 2, где

$$\gamma_1 = \gamma_{01} + \gamma_{02}\, i, \qquad \gamma_2 = \gamma_{01} - \gamma_{02}\, i, \qquad k = -\frac{\lambda}{\mu}$$

причем AOB соответствует $A'O'B'$ и COD соответствует $C'O'D'$.



Фиг. 2

2) Пусть λ_1, λ_2 — вещественные отрицательные и различные числа.

Можно также предположить, что порядок диагональных элементов в матрице Жордана J определяется соотношением $\lambda_1 > \lambda_2$.

Совокупность двух способов построения функции Ляпунова дает возможность установить следующую область асимптотической устойчивости (фиг. 3), где $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, при этом AOB соответствует $A'O'B'$, COD соответствует $C'O'D'$; DOE соответствует $D'O'E'$.

в) Случай N уравнений и N нулевых корней

$$\dot{z}_\nu = g_{1\nu} f_1 + \cdots + g_{N\nu} f_N, \qquad \sigma_\nu = \gamma_{\nu 1} z_1 + \cdots + \gamma_{\nu N} z_N \qquad (\nu = 1, \ldots, N)$$

Достаточные условия первого способа

$$|g_{ij}| \neq 0 \quad (i, j = 1, \ldots, N), \qquad \gamma_{sj} = -A_j g_{sj}, \qquad A_j > 0 \quad (s, j = 1, \ldots, N)$$

Достаточные условия второго способа

$$|g_{ij}| \neq 0 \quad (i, j = 1, \ldots, N), \qquad g_{sj} = -B_s \gamma_{sj}, \qquad B_s > 0 \quad (s, j = 1, \ldots, N)$$

Эти условия еще можно записать так:

1) $|g_{ij}| \neq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, N)$

2) Соответствующие строки[1] (или столбцы) матриц

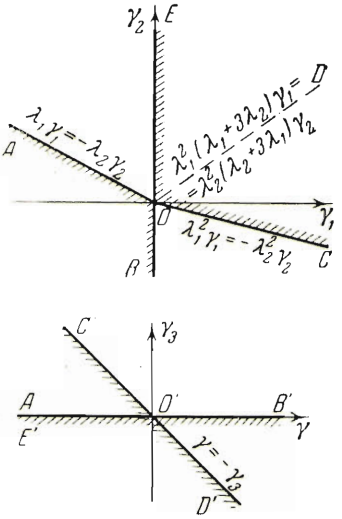
$$\left\| \begin{matrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{N1} & \cdots & \gamma_{NN} \end{matrix} \right\| \tag{6.2}$$

пропорциональны, причем коэффициенты пропорциональности — отрицательные (в общем случае различные) числа.

г) Случай N уравнений и $N-1$ нулевых корней, т. е. имеется еще один ненулевой корень

$$\dot{z}_1 = \lambda z_1 + \sum_{s=1}^{N-1} g_{s1} f_s, \qquad \dot{z}_\nu = \sum_{s=1}^{N-1} g_{s\nu} f_s \qquad (\nu = 2, \ldots, N)$$

$$\sigma_s = \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_{sj} z_j \qquad \lambda < 0 \qquad (s = 1, \ldots, N-1)$$



Фиг. 3

Используя условия первого и второго способов, после несложных выкладок получим следующие достаточные условия асимптотической устойчивости:

1. $|g_{i, 1+j}| \neq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, N-1)$

2. Соответствующие строки (или столбцы) матриц

$$\left\| \begin{matrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{N-1,1} & \cdots & g_{N-1,N} \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{N-1,1} & \cdots & \gamma_{N-1,N} \end{matrix} \right\| \tag{6.3}$$

[1] Условия первого и второго способов естественно дополняют друг друга: одни говорят о строках, другие — о столбцах.

пропорциональны, причем коэффициенты пропорциональности — отрицательные (вообще говоря, различные) числа.

д) Четыре уравнения и два нулевых корня. В данном случае имеем систему уравнений

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + g_{11} f_1 + g_{21} f_2, \qquad \dot{z}_3 = g_{13} f_1 + g_{23} f_2$$
$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + g_{12} f_1 + g_{22} f_2, \qquad \dot{z}_4 = g_{14} f_1 + g_{24} f_2$$
$$\sigma_1 = \gamma_{11} z_1 + \gamma_{12} z_2 + \gamma_{13} z_3 + \gamma_{14} z_4$$
$$\sigma_2 = \gamma_{21} z_1 + \gamma_{22} z_2 + \gamma_{23} z_3 + \gamma_{24} z_4$$

где λ_1, λ_2 — вещественные отрицательные и различные числа или комплексные сопряженные числа с отрицательными вещественными частями.

Запишем достаточные условия единственности положения равновесия и асимптотической устойчивости, которые дает первый способ построения функции Ляпунова[1]:

$$\begin{vmatrix} g_{13} & g_{14} \\ g_{23} & g_{24} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \frac{\gamma_{13}}{g_{13}} = \frac{\gamma_{23}}{g_{23}} < 0, \qquad \frac{\gamma_{14}}{g_{14}} = \frac{\gamma_{24}}{g_{24}} < 0$$
$$2\left(\frac{a_{11}{}^2}{2\lambda_1} g_{11} + \frac{a_{11}a_{12}}{\lambda_1+\lambda_2} g_{12} + \frac{a_{21}{}^2}{2\lambda_1} g_{11} + \frac{a_{21}a_{22}}{\lambda_1+\lambda_2} g_{12}\right) = \gamma_{11}$$
$$2\left(\frac{a_{11}a_{12}}{\lambda_1+\lambda_2} g_{11} + \frac{a_{12}{}^2}{2\lambda_2} g_{12} + \frac{a_{21}a_{22}}{\lambda_1+\lambda_2} g_{11} + \frac{a_{22}{}^2}{2\lambda_2} g_{12}\right) = \gamma_{12} \tag{6.4}$$
$$2\left(\frac{a_{11}{}^2}{2\lambda_1} g_{21} + \frac{a_{11}a_{12}}{\lambda_1+\lambda_2} g_{22} + \frac{a_{21}{}^2}{2\lambda_1} g_{21} + \frac{a_{21}a_{22}}{\lambda_1+\lambda_2} g_{22}\right) = \gamma_{21}$$
$$2\left(\frac{a_{11}a_{12}}{\lambda_1+\lambda_2} g_{21} + \frac{a_{12}{}^2}{2\lambda_2} g_{22} + \frac{a_{21}a_{22}}{\lambda_1+\lambda_2} g_{21} + \frac{a_{22}{}^2}{2\lambda_2} g_{22}\right) = \gamma_{22}$$

Заменим систему квадратных уравнений из (6.4) ей эквивалентной, используя известное положение: пары алгебраических уравнений $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ и $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$, где $\Psi_1 = a\Phi_1 + b\Phi_2$, $\Psi_2 = c\Phi_1 + d\Phi_2$, эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Умножим первое уравнение системы из (6.4) на g_{21}, третье на $-g_{11}$ и сложим; затем умножим первое уравнение на g_{22}, третье на $-g_{12}$ и также сложим.

Аналогичные операции произведем со вторым и четвертым уравнениями, умножая второе на g_{21}, g_{22} и четвертое на $-g_{11}$, $-g_{12}$.

Для того чтобы первое и третье, второе и четвертое уравнения преобразовались отмеченным способом в эквивалентные им пары уравнений, необходимо и достаточно потребовать выполнения условия

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6.5}$$

[1] Второй способ в данном случае неэффективен.

Первое и третье уравнения заменяются им эквивалентными:

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\mu_{12}}{g}, \qquad a_{11}^2 + a_{21}^2 = \lambda_1\frac{\mu_{11}}{g}$$

Для второго и четвертого будем иметь другие уравнения:

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\mu_{21}}{g}, \qquad a_{12}^2 + a_{22}^2 = \lambda_2\frac{\mu_{22}}{g}$$

Здесь μ_{1i} и μ_{2i} $(i = 1,2)$ — результаты подстановки в определитель g соответственно столбцов

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{matrix} \right\|$$

Из сравнения полученных соотношений следует, что

$$\mu_{12} = \mu_{21} \tag{6.6}$$

Итак, система из (6.4) может быть заменена (при отмеченных условиях) ей эквивалентной:

$$\begin{gathered} a_{11}^2 + a_{21}^2 = \lambda_1\frac{\mu_{11}}{g} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\mu_{12}}{g} \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = \lambda_2\frac{\mu_{22}}{g} \end{gathered} \tag{6.7}$$

При изучении случая (д) можно выделить два подслучая.

1. Пусть λ_1, λ_2 — комплексные сопряженные числа с отрицательными вещественными частями.

Как уже известно, g_{11} и g_{12}, g_{21} и g_{22}, γ_{11} и γ_{12}, γ_{21} и γ_{22}, a_{11} и a_{12} a_{21} и a_{22} — комплексные попарно сопряженные числа.

Рассмотрим второе уравнение системы (6.7). Левая его часть, согласно предыдущему, должна быть положительным числом. Но $g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ — число чисто мнимое, а $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$.

Поэтому, для того чтобы и правая часть второго уравнения была положительна, необходимо и достаточно удовлетворить условию $\mu_{12} = Ag$ $A < 0$. Последнее соотношение и (6.6) будут выполнены, если положить

$$\frac{\gamma_{11}}{g_{12}} = \frac{\gamma_{12}}{g_{11}} = \frac{\gamma_{21}}{g_{22}} = \frac{\gamma_{22}}{g_{21}} < 0 \tag{6.8}$$

При этом $\mu_{11} = \mu_{22} = 0$ и система (6.7) запишется в виде

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 0, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = \frac{1}{2}A(\lambda_1 + \lambda_2), \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 0$$

Пусть далее

$$a_{11} = x + iy, \quad a_{12} = x - iy, \quad a_{21} = v + iw, \quad a_{22} = v - iw$$

Тогда

$$\begin{gathered} x^2 - y^2 + v^2 - w^2 = 0 \\ xy + vw = 0 \\ x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{2}A(\lambda_1 + \lambda_2) \end{gathered} \tag{6.9}$$

Система (6.9) допускает вещественное решение (это станет очевидным, если, например, положить $x = w$).

Итак, по теореме Ляпунова условия

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{13} & g_{14} \\ g_{23} & g_{24} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\frac{\gamma_{13}}{g_{13}} = \frac{\gamma_{23}}{g_{23}} < 0, \qquad \frac{\gamma_{14}}{g_{14}} = \frac{\gamma_{24}}{g_{24}} < 0, \qquad \frac{\gamma_{11}}{g_{12}} = \frac{\gamma_{12}}{g_{11}} = \frac{\gamma_{21}}{g_{22}} = \frac{\gamma_{22}}{g_{21}} < 0 \tag{6.10}$$

достаточны для асимптотической устойчивости.

2. Пусть теперь λ_1, λ_2 — вещественные отрицательные и различные числа. Если квадратную матрицу $\| a_{\nu\beta} \|$ взять диагональной:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{Vmatrix}$$

то можно получить следующие достаточные условия единственности положения равновесия и асимптотической устойчивости:

1.
$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{13} & g_{14} \\ g_{23} & g_{24} \end{vmatrix} \neq 0$$

2. Соответствующие столбцы матриц

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \end{Vmatrix} \tag{6.11}$$

пропорциональны, причем коэффициенты пропорциональности — отрицательные (в общем случае различные) числа.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Д. Р. Меркину за ряд ценных советов и внимание, проявленное к работе.

Поступила 11 XII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
2. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. ГТТИ, 1951.
3. Малкин И. Г. К теории устойчивости регулируемых систем. ПММ, т. XV, вып. 1, 1951.
4. Еругин Н. П. Методы А. М. Ляпунова и вопросы устойчивости в целом. ПММ, т. XVII, вып. 4, 1953.
5. Летов А. М. Собственно неустойчивые регулируемые системы. ПММ, т. XIV, вып. 2, 1950.