Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. П. Басов

(Ленинград)

В работе рассматривается матричное уравнение вида

$$\frac{dX}{dt}=\left(P+\frac{1}{t^{\gamma}}Q(t)\right)X \tag{0.1}$$

в предположении, что

$$X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} \tag{0.2}$$

одностолбцовая неизвестная матрица, γ — положительная постоянная, P — вещественная постоянная матрица, Q — матрица, элементы которой есть функции t, определенные, непрерывные и ограниченные при всех $t \geqslant t^*$,

$$P=\begin{Vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad Q(t)=\begin{Vmatrix} q_{11}(t) & \cdots & q_{1n}(t) \\ & & \\ q_{n1}(t) & \cdots & q_{nn}(t) \end{Vmatrix}$$

Устанавливается вид решения уравнения (0.1), отвечающего всякому простому вещественному корню уравнения

$$D(P-\varkappa I)=0 \tag{0.3}$$

предполагая только, что вещественные части остальных корней этого уравнения отличны от указанного корня.

Уравнение вида (0.1) при $\gamma=1$ и при некоторых дополнительных предположениях относительно матриц P и Q рассматривал в своей работе Н. П. Еругин [1] в связи с вопросом проводимости. В его работе дан метод построения решений такого рода уравнений в виде рядов, равномерно сходящихся в окрестности существенно особой точки $t=\infty$. Указанный метод построения решения в применении к уравнениям вида (0.1) при $\gamma=1$ был далее использован в работах В. В. Хорошилова [2,3], А. К. Гаханова и Л. И. Донской [4]. По существу тот же метод использован и в работе И. М. Рапопорта [5] (хотя автор называет его новым). Настоящая работа также построена на идеях указанной выше работы Н. П. Еругина. Полученные же результаты обобщают соответственно результаты работ В. В. Хорошилова [2] и А. К. Гаханова (кандидатская диссертация). Краткое изложение работы было ранее приведено в заметке [6].

§ 1. Системы матричных уравнений, эквивалентные матричному уравнению. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dX}{dt}=AX \tag{1.1}$$

где X — неизвестная матрица вида (0.2), а

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{matrix} \right\|$$

любая матрица коэффициентов, заданная и непрерывная в некотором промежутке изменения t.

Выберем произвольно последовательность возрастающих целых чисел

$$n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_l = n \qquad (0 < l \leqslant n)$$

и введем в рассмотрение матрицы

$$A_{ik} = \left\| \begin{matrix} a_{n_{i-1}+1,\, n_{k-1}+1}(t) & \ldots & a_{n_i,\, n_{k-1}+1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n_{i-1}+1,\, n_k}(t) & \ldots & a_{n_i,\, n_k}(t) \end{matrix} \right\| \qquad (i,\ k = 1, \ldots, l)$$

$$X_k = \left\| \begin{matrix} x_{n_{k-1}+1} \\ \vdots \\ x_{n_k} \end{matrix} \right\| \qquad (k = 1, \ldots, l) \tag{1.2}$$

Тогда матрицы A и X можно будет представить следующим образом:

$$A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & \ldots & A_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{l1} & \ldots & A_{ll} \end{matrix} \right\|, \qquad X = \left\| \begin{matrix} X_1 \\ \vdots \\ X_l \end{matrix} \right\|$$

При этом матричное уравнение (1.1) будет эквивалентно системе матричных уравнений

$$\frac{dX_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{l} A_{s\sigma} X_\sigma \qquad (s = 1, \ldots, l) \tag{1.3}$$

Замечание. Выше предполагалось, что в системах (1.1) и (1.3) неизвестные матрицы X и X_s $(s = 1, \ldots, l)$ одностолбцовые, однако можно также рассматривать эти матрицы и как m-столбцовые, где m — любое целое число. Действительно, пусть, например,

$$X_k^{(i)} = \left\| \begin{matrix} x_{n_{k-1}+1}^{(i)} \\ \vdots \\ x_{n_k}^{(i)} \end{matrix} \right\| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

есть m решений системы (1.3), определенных какими-либо начальными условиями, тогда, как нетрудно убедиться, матрицы

$$X_k = \left\| \begin{matrix} x_{n_{k-1}+1}^{(1)} & \ldots & x_{n_{k-1}+1}^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n_k}^{(1)} & \ldots & x_{n_k}^{(m)} \end{matrix} \right\| \qquad (k = 1, \ldots, l) \tag{1.4}$$

будут также решением системы (1.3). Обратно, если матрицы (1.4) есть решение системы (1.3), то и соответствующие столбцы этих матриц будут также решениями системы (1.3).

Так как при рассмотрении линейных систем нас могут интересовать лишь линейно независимые решения, то естественно предполагать, что число m удовлетворяет неравенству $1 \leqslant m \leqslant n$.

Условимся теперь о некоторых обозначениях, которые будут использованы в дальнейшем. Рассматривая квадратную или прямоугольную матрицу X, мы будем символом $|X|$ обозначать матрицу, элементы которой составлены из модулей элементов матрицы X. Далее символом $\| 1 \|_i^j$ мы будем обозначать матрицу, имеющую i строк и j столбцов, все элементы которой суть единицы.

§ 2. Некоторые вспомогательные утверждения. Рассмотрим следующий интеграл:

$$j(t, t_1) = \int_{t_1}^{t} \exp\left[\lambda\left(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}\right)\right] \tau^{-\alpha} d\tau \qquad \left(t_1 = \begin{cases} t_0 & \text{при } \lambda < 0 \\ \infty & \text{при } \lambda > 0 \end{cases}\right)$$

в предположении, что α, β и λ — любые вещественные числа, подчиненные лишь условиям $\beta > -1$, $\lambda \neq 0$, а t_0 — любое вещественное число, не меньшее некоторого фиксированного числа $t^* > 0$.

Лемма. Всегда существует такая положительная постоянная ν, вообще зависящая от величин t^*, α, β и λ и не зависящая от t_0, что при всех $t \geqslant t_0 \geqslant t^*$ имеет место неравенство

$$|j(t, t_1)| < \nu t^{-(\alpha+\beta)} \tag{2.1}$$

Доказательство. 1). Пусть $\lambda > 0$. Рассмотрим выражение

$$j_1 = -t^{\alpha+\beta} j(t, \infty) = \frac{1}{t^{-(\alpha+\beta)} \exp\left(-\lambda t^{\beta+1}\right)} \int_{t}^{\infty} \exp\left(-\lambda\tau^{\beta+1}\right) \tau^{-\alpha} d\tau$$

Отсюда легко убедиться, что $j_1 > 0$ при $t \geqslant t^*$ и при $t \to \infty$ представляет неопределенность типа $0:0$.

Раскрывая неопределенность, найдем, что выражение (2.2) имеет конечный предел $\lambda^{-1}(\beta+1)^{-1}$ при $t \to \infty$, следовательно, оно ограничено и всегда найдется такая постоянная $\nu > 0$ (вообще зависящая от t^*, α, β, λ), что при всех $t \geqslant t^*$ и тем более при $t \geqslant t_0$ будет иметь место неравенство $j_1 < \nu_0$. Поэтому, принимая во внимание, что $|j| = t^{-(\alpha+\beta)} j_1$, и получим требуемую оценку (2.1).

2) Пусть $\lambda < 0$. Рассмотрим выражение

$$j_2 = t^{\alpha+\beta} j(t, t^*) = \frac{1}{t^{-(\alpha+\beta)} \exp\left(-\lambda t^{\beta+1}\right)} \int_{t^*}^{t} \exp\left(-\lambda\tau^{\beta+1}\right) \tau^{-\alpha} d\tau$$

Оно также при $t > t^*$ положительно и при $t \to \infty$ представляет неопределенность вида $\infty : \infty$.

Подобно предыдущему, раскрывая эту неопределенность, докажем, что при $t \geqslant t^*$ справедливо неравенство $j(t, t^*) < \nu t^{-(\alpha+\beta)}$, где ν — постоянная такого же типа, как и в первом случае. Если теперь $t_0 \geqslant t^*$ то при $t \geqslant t_0$ имеем $j(t, t_0) \leqslant j(t, t^*) < \nu t^{-(\alpha+\beta)}$.

Из приведенных рассуждений и вытекает справедливость леммы.

Пусть теперь мы имеем вещественную диагональную матрицу

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

элементы которой λ_s отличны от нуля.

Рассмотрим диагональную матрицу

$$J(t, \{t_s\}) = \int_{\{t_s\}}^{t} \exp\left[\Lambda\left(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}\right)\right] \tau^{-\alpha} d\tau \qquad \left(t_s = \begin{cases} t_0 & \text{при } \lambda_s < 0 \\ \infty & \text{при } \lambda_s > 0 \end{cases}\right) \quad (s = 1, \dots, m) \tag{2.3}$$

где α и β — вещественные постоянные, причем $\beta > -1$, а значок $\{t_s\}$ означает, что в каждой s-й строке рассматриваемой матрицы нижний предел интегрирования равен t_s.

Следствие. Из доказанной леммы вытекает, что при всех $t \geqslant t_0 \geqslant t^* > 0$ имеет место неравенство

$$|J(t, \{t_s\})| \leqslant \nu t^{-(\alpha+\beta)} I \tag{2.4}$$

где I — единичная матрица, а $\nu > 0$ — постоянная, не зависящая от t_0.

Действительно, согласно лемме найдется постоянная $\nu_s > 0$ такая, что для s-го диагонального элемента матрицы (2.3) будет иметь место неравенство $|j(t, t_s)| < \nu_s t^{-(\alpha+\beta)}$.

Положив $\nu = \max\{\nu_1, \dots, \nu_n\}$, получим неравенство (2.4).

§ 3. Основная теорема. Рассмотрим следующую систему n линейных дифференциальных уравнений, записанную в виде системы двух матричных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= t^{\beta}(P + Q) X_1 + t^{-\alpha} R_{12} X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} &= t^{\beta} R_{21} X_1 + t^{-\alpha} R_{22} X_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где α и β — вещественные постоянные,

$$X_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{Vmatrix}, \qquad X_2 = \begin{Vmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} \qquad (0 \leqslant m < n)$$

неизвестные матрицы[1],

$$R_{12} = \begin{Vmatrix} r_{1,\,m+1} & \dots & r_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ r_{m,\,m+1} & \dots & r_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad R_{21} = \begin{Vmatrix} r_{m+1,\,1} & \dots & r_{m+1,\,m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ r_{n1} & \dots & r_{nm} \end{Vmatrix}$$

$$R_{22} = \begin{Vmatrix} r_{m+1,\,m+1} & \dots & r_{m+1,\,n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ r_{n,\,m+1} & \dots & r_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad Q = \begin{Vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ q_{m1} & \dots & q_{mm} \end{Vmatrix}.$$

---

[1] При $m = 0$ будем иметь уравнение

$$\frac{dX_2}{dt} = t^{-\alpha} R_{22} X_2$$

матрицы, представляющие собой функции t, определенные, непрерывные и ограниченные при всех $t \geqslant t^* > 0$, причем матрица $Q \to 0$ при $t \to \infty$,

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{Vmatrix}$$

постоянная матрица, характеристическое уравнение которой

$$D(P - \varkappa I)$$

имеет корни $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ с отличными от нуля вещественными частями, т. е. $\mathrm{Re}(\varkappa_s) \neq 0 \quad (s = 1, \ldots, m)$.

Теорема. Если $\alpha > 1$, $\beta > -1$, то система (3.1) имеет $n - m$ столбцовое решение вида

$$X_1 = t^{-(\alpha+\beta)} U_1, \qquad X_2 = I + t^{-(\alpha-1)} U_2 \tag{3.2}$$

где

$$U_1 = \begin{Vmatrix} u_{11} & \cdots & n_{1,n-m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{m1} & \cdots & u_{m,n-m} \end{Vmatrix}, \qquad U_2 = \begin{Vmatrix} u_{m+1,1} & \cdots & u_{m+1,n-m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{n1} & \cdots & u_{n,n-m} \end{Vmatrix}$$

матрицы, элементы которых ограничены по модулю при всех $t \geqslant t^*$.

Доказательство. Преобразуем систему (3.1) посредством линейной подстановки:

$$X_1 = SY_1, \qquad X_2 = Y_2 \tag{3.3}$$

где Y_1 и Y_2 — новые неизвестные матрицы, а S — постоянная неособенная квадратная матрица m-го порядка. Как известно, матрицу S всегда можно выбрать так, чтобы матрица $S^{-1}PS$ имела каноническую форму [7], т. е. чтобы было

$$S^{-1}PS = K + \zeta J \qquad \left(K = \begin{Vmatrix} \varkappa_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \varkappa_n \end{Vmatrix} \right) \tag{3.4}$$

где ζ — вещественная положительная постоянная, которую соответствующим выбором матрицы S можно сделать как угодно малой, J — матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов нижней побочной диагонали; последние же равны или единице, или нулю в зависимости от кратности элементарных делителей матрицы P.

В результате преобразования (3.3) система (3.1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= t^{\beta}(K + Q')Y_1 + t^{-\alpha} R_{12}' Y_2 \\ \frac{dY_2}{dt} &= t^{\beta} R_{21}' Y_1 + t^{-\alpha} R_{22} Y_2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$Q' = \zeta J + S^{-1}QS, \qquad R_{12}' = S^{-1}R_{12}, \qquad R_{21}' = R_{21}S$$

Введем следующие обозначения матриц:

$$K' = \frac{1}{\beta + 1} K, \qquad \Lambda = \mathrm{Re}(K') \tag{3.6}$$

Согласно следствию из леммы предыдущего параграфа, можно утверждать, что существует такая постоянная $\nu > 0$, что при всяком $t_0 \geqslant t^*$ и при всех $t \geqslant t_0$ имеет место неравенство (2.4), где постоянную ν всегда можно выбрать так, чтобы наряду с неравенством (2.4) выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\alpha - 1} < \nu \tag{3.7}$$

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условию

$$\varepsilon \nu n < 1 \tag{3.8}$$

и допустим, что матрица S преобразования (3.3) выбрана так, что в выражении (3.4) величина $\zeta > {}^1/_2\,\varepsilon$. Далее, не уменьшая общности, можно считать, что при всех $t \geqslant t^*$ имеет место неравенство

$$| R_{21}' | < \varepsilon \| 1 \|_{n-m}^{m} \tag{3.9}$$

ибо выполнения этого неравенства мы всегда можем достигнуть, преобразовав систему (3.5) посредством подстановки $Y_1 = Y_1^\circ$, $Y_2 = \xi Y_2^\circ$, где Y_1° и Y_2° — новые неизвестные матрицы, а ξ — достаточно большая положительная постоянная[1]. При этом характер коэффициентов системы (3.5) и величина ζ не изменятся. Наконец, согласно сделанным предположениям всегда можно выбрать t_0 настолько большим, чтобы при всех $t \geqslant t_0$ было

$$\begin{gathered} t^{-(\alpha-1)} | R_{22} | < \varepsilon \| 1 \|_{n-m}^{n-m}, \qquad t^{-(\alpha-1)} | R_{12}' | < \varepsilon \| 1 \|_{m}^{n-m} \\ | S^{-1} Q S | < \frac{1}{2} \varepsilon \| 1 \|_{m}^{m} \end{gathered} \tag{3.10}$$

причем, как следует из последнего неравенства и из выражения для Q', при указанных t будет

$$| Q' | < \varepsilon \| 1 \|_{m}^{m} \tag{3.11}$$

Будем теперь в системе (3.5) рассматривать Y_1 и Y_2 как $n - m$-столбцовые матрицы и зададим начальные условия

$$Y_1 = 0 \quad \text{при} \quad t = \{t_s\}, \qquad Y_2 = I \quad \text{при} \quad t = \infty \tag{3.12}$$

где I — единичная матрица $n - m$-го порядка, а $\{t_s\}$ означает, что для каждой строки матрицы Y_1 начальное значение t равно или ∞, или t_0 в зависимости от того, положительна или отрицательна вещественная часть элемента, стоящего в соответствующей строке матрицы K. При начальных значениях (3.12) система (3.5) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{gathered} Y_1 = \int\limits_{\{t_s\}}^{t} \exp\left[K' (t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})\right] (\tau^{\beta} Q' Y_1 + \tau^{-\alpha} R_{12}' Y_2)\, d\tau \\ Y_2 = I + \int\limits_{\infty}^{t} (t^{\beta} R_{21}' Y_1 + \tau^{-\alpha} R_{22} Y_2)\, d\tau \end{gathered} \tag{3.13}$$

где матрица K' определяется первым из равенств (3.6).

[1] Подобное преобразование было использовано К. П. Персидским в работе [8].

Будем искать решение системы (3.13) по методу последовательных приближений. С этой целью положим

$$Y_1^{(0)} = 0, \qquad Y_2^{(0)} = I \tag{3.14}$$

а все остальные приближения определим последовательно по формулам

$$\begin{aligned} Y_1^{(k)} &= \int\limits_{\{t_s\}}^{t} \exp\left[K'\left(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}\right)\right]\left(\tau^{\beta} Q' Y^{(k-1)} + \tau^{-\alpha} R_{12}' Y_2^{(k-1)}\right) d\tau \\ Y_2^{(k)} &= I + \int\limits_{\infty}^{t} \left(\tau^{\beta} R_{21}' Y_1^{(k-1)} + \tau^{-\alpha} R_{22} Y_2^{(k-1)}\right) d\tau \end{aligned} \tag{3.15}$$

При этом ряды

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_1^{(1)} + (Y_1^{(2)} - Y_1^{(1)}) + \cdots + (Y_1^{(k)} - Y_1^{(k-1)}) + \cdots \\ Y_2 &= I + (Y_2^{(1)} - I) + (Y_2^{(2)} - Y_2^{(1)}) + \cdots + (Y_2^{(k)} - Y_2^{(k-1)}) + \cdots \end{aligned} \tag{3.16}$$

будут, как известно, формально удовлетворять уравнениям (3.13).

Покажем, что ряды (3.16) сходятся абсолютно и равномерно; тем самым будет доказано, что эти ряды действительно представляют решение уравнений (3.13) или, что то же самое, решение уравнений (3.5) при начальных условиях (3.12)

Действительно, пусть $\mu > 0$ — такая постоянная, что при $t \geqslant t_0$

$$\begin{aligned} |R_{12}'| &< \mu \| 1 \|_m^{n-m} \\ |R_{22}| &< \mu \| 1 \|_{n-m}^{n-m} \end{aligned} \tag{3.17}$$

тогда согласно (3.14), (3.15), (3.6), (2.4) и (3.7) имеем при $t \geqslant t_0$

$$|Y_1^{(1)}| \leqslant \left| \int\limits_{\{t_s\}}^{t} \exp\left[\Lambda\left(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}\right)\right] \tau^{-\alpha} |R_{12}'| \, d\tau \right| <$$

$$< \left| \int\limits_{\{t_s\}}^{t} \exp\left[\Lambda\left(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}\right)\right] \tau^{-\alpha} \, d\tau \right| \mu \| 1 \|_m^{n-m} < \mu \nu t^{-(\alpha+\beta)} \| 1 \|_m^{n-m}$$

$$|Y_2^{(1)} - I| < \int\limits_{t}^{\infty} \tau^{-\alpha} |R_{22}| \, d\tau < \mu \| 1 \|_{n-m}^{n-m} \int\limits_{t}^{\infty} \tau^{-\alpha} \, d\tau =$$

$$= \mu \| 1 \|_{n-m}^{n-m} \frac{t^{1-\alpha}}{\alpha - 1} < \mu \nu t^{1-\alpha} \| 1 \|_{n-m}^{n-m}$$

Покажем теперь, что вообще при $t \geqslant t_0$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} |Y_1^{(k)} - Y_1^{(k-1)}| &< \mu \varepsilon^{k-1} \nu^k n^{k-1} t^{-(\alpha+\beta)} \| 1 \|_m^{n-m} \\ |Y_2^{(k)} - Y_2^{(k-1)}| &< \mu \varepsilon^{k-1} \nu^k n^{k-1} t^{-(\alpha-1)} \| 1 \|_{n-m}^{n-m} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Для этого, предположив, что оценки (3.18) имеют место при каком-либо k, покажем, что они имеют место и при $k+1$. В самом деле, согласно

(3.15), (3.18), (2.4), (3.7), (3.9), (3.10), (3.11) имеем

$$|Y_1^{(k+1)} - Y_1^{(k)}| \leqslant$$

$$\leqslant \Big| \int_{\{t_s\}}^{t} \exp[\Lambda(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})](\tau^\beta |Q'| |Y_1^{(k)} - Y_1^{(k-1)}| +$$

$$+ \tau^{-\alpha} |R_{12}'| |Y_2^{(k)} - Y_2^{(k-1)}|) d\tau \Big| <$$

$$< \mu\varepsilon^{k-1}\nu^k n^{k-1} \Big| \int_{\{t_s\}}^{t} \exp[\Lambda(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})](\tau^\beta |Q'| \tau^{-(\alpha+\beta)} \| 1 \|_m^{n-m} +$$

$$+ \tau^{-\alpha} |R_{12}'| \tau^{-(\alpha-1)} \| 1 \|_{n-m}^{n-m}) d\tau \Big| <$$

$$< \mu\varepsilon^k\nu^k n^{k-1} \Big| \int_{\{t_s\}}^{t} \exp[\Lambda(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})] \tau^{-\alpha} (\| 1 \|_m^m \ \| 1 \|_m^{n-m} +$$

$$+ \| 1 \|_m^{n-m} \| 1 \|_{n-m}^{n-m}) d\tau \Big| = \mu\varepsilon^k \nu^k n^k \Big| \int_{\{t_s\}}^{t} \exp[\Lambda(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})] \tau^{-\alpha} d\tau \Big| \| 1 \|_m^{n-m} <$$

$$< \mu\varepsilon^k\nu^{k+1} n^k t^{-(\alpha+\beta)} \| 1 \|_m^{n-m}$$

Здесь использовано соотношение

$$\| 1 \|_m^m \| 1 \|_m^{n-m} + \| 1 \|_m^{n-m} \| 1 \|_{n-m}^{n-m} = m \| 1 \|_m^{n-m} +$$

$$+ (n-m) \| 1 \|_m^{n-m} = n \| 1 \|_m^{n-m}$$

Далее

$$|Y_2^{(k+1)} - Y_2^{(k)}| \leqslant \int_t^\infty (\tau^\beta |R_{21}'| |Y_1^{(k)} - Y_1^{(k-1)}| + \tau^{-\alpha} |R_{22}| |Y_2^{(k)} - Y_2^{(k-1)}|) d\tau <$$

$$< \mu\varepsilon^{k-1} \nu^k n^{k-1} \int_t^\infty (\tau^\beta |R_{21}'| \tau^{-(\alpha+\beta)} \| 1 \|_m^{n-m} + \tau^{-\alpha} |R_{22}| \tau^{-(\alpha-1)} \| 1 \|_{n-m}^{n-m}) d\tau <$$

$$< \mu\varepsilon^k \nu^k n^{k-1} \int_t^\infty \tau^{-\alpha} (\| 1 \|_{n-m}^m \| 1 \|_m^{n-m} + \| 1 \|_{n-m}^{n-m} \| 1 \|_{n-m}^{n-m}) d\tau =$$

$$= \mu\varepsilon^k \nu^k n^k \int_t^\infty \tau^{-\alpha} d\tau \| 1 \|_{n-m}^{n-m} < \mu\varepsilon^k \nu^{k+1} n^k t^{-(\alpha-1)} \| 1 \|_{n-m}^{n-m}$$

Из приведенных рассуждений следует, что оценки (3.18) действительно имеют место при всех k от 1 до ∞. Из этих оценок непосредственно получаем, что ряды (3.16) при всех $t \geqslant t_0$ мажорируются соответственно рядами

$$\begin{gathered} \mu\nu t^{-(\alpha+\beta)} (1 + \varepsilon\nu n + \varepsilon^2\nu^2 n^2 + \cdots + \varepsilon^k\nu^k n^k + \cdots) \| 1 \|_m^{n-m} \\ I + \mu\nu t^{-(\alpha-1)} (1 + \varepsilon\nu n + \varepsilon^2\nu^2 n^2 + \cdots + \varepsilon^k\nu^k n^k + \cdots) \| 1 \|_{n-m}^{n-m} \end{gathered} \tag{3.19}$$

Но ряд

$$1 + \varepsilon\nu n + \cdots + \varepsilon^k\nu^k n^k + \cdots$$

представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\varepsilon\nu n$. Эта прогрессия сходится, так как согласно (3.8) знаменатель ее меньше единицы. Следовательно, ряды (3.16) сходятся абсолютно и равномерно при всех $t \geqslant t_0$ и представляют при указанных значениях t решение системы (3.5). Из полученных оценок вытекает, что это решение может быть записано в виде

$$Y_1 = t^{-(\alpha+\beta)} V_1, \qquad Y_2 = I + t^{-(\alpha-1)} U_2 \tag{3.20}$$

где V_1 и U_2 — матрицы, ограниченные при $t \geqslant t_0$. Продолжая построенное решение на промежуток (t^*, t_0) и принимая во внимание, что на этом промежутке все решения системы (3.5) ограничены, мы можем наше решение представить в виде (3.20) при всех $t \geqslant t^*$.

Возвращаясь к матрицам X_1 и X_2 и обозначая $SV_1 = U_1$, мы и получаем, что исходная система (3.1) действительно имеет решение вида (3.2).

Замечание 1. Если все коэффициенты системы (3.1) вещественны, то и решение (3.2) может быть также построено вещественное.

Замечание 2. Ряды (3.19) дают возможность оценить построенное решение (3.2) при достаточно больших t.

Именно, вычисляя сумму прогрессии, входящей в выражения (3.19), и принимая во внимание подстановку (3.3), при $t \geqslant t_0$ будем иметь

$$|X_1| < t^{-(\alpha+\beta)} \frac{\mu\nu}{1-\varepsilon\nu n} |S| \, \| 1 \|_m^{n-m}, \qquad |X_2| < I + t^{-(\alpha-1)} \frac{\mu\nu}{1-\varepsilon\nu n} \| 1 \|_{n-m}^{n-m}$$

Замечание 3. Мы доказали теорему в предположении, что $\beta > -1$. Однако утверждение теоремы справедливо и при $\beta = -1$, но при дополнительных предположениях, что

$$\alpha + \lambda_s \neq 1 \qquad (\lambda_s = \operatorname{Re} \varkappa_s) \qquad (s = 1, \ldots, m)$$

Это утверждение доказывается так же, как и предыдущая теорема. Отличие заключается лишь в том, что система интегральных уравнений (3.13) в данном случае будет иметь вид:

$$Y_1 = \int\limits_{\{t_s\}}^{t} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{K'} (\tau^{-1} Q' Y_1 + \tau^{-\alpha} R_{12}' Y_2)\, d\tau$$

$$Y_2 = I + \int\limits_{\infty}^{t} (\tau^{-1} R_{21}' Y_1 + \tau^{-\alpha} R_{22} Y_2)\, d\tau$$

где $\{t_s\}$ попрежнему означает, что в каждой строчке матрицы, стоящей справа в первом из написанных уравнений, нижний предел интегрирования равен t_s, причем в данном случае $t_s = t_0$ при $\lambda_s + \alpha < 1$ и $t_s = \infty$ при $\lambda_s + \alpha > 1$.

Кроме того, при оценке членов рядов (3.16) вместо неравенства (2.4) мы должны пользоваться очевидным неравенством

$$\left| \int\limits_{\{t_s\}}^{t} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\Lambda} \tau^{-\alpha} d\tau \right| \leqslant \nu t^{-(\alpha-1)} I \qquad (t \geqslant t_0)$$

где $\nu > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от t_0.

Доказанную теорему можно распространить на системы более общего вида. Именно рассмотрим систему n линейных уравнений, записанную в виде системы l матричных уравнений следующего вида:

$$
\begin{aligned}
\frac{dX_1}{dt} &= t^{\beta_1}(P_{11}+Q_{11})X_1 + t^{\beta_2}Q_{12}X_2 + \cdots + t^{\beta_{l-1}}Q_{1,\,l-1}X_{l-1} + t^{-\alpha}R_{1l}X_l \\
\frac{dX_2}{dt} &= t^{\beta_1}R_{21}X_1 + t^{\beta_2}(P_{22}+Q_{22})X_2 + \cdots + t^{\beta_{l-1}}Q_{2,\,l-1}X_{l-1} + t^{-\alpha}R_{2l}X_l \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dX_{l-1}}{dt} &= t^{\beta_1}R_{l-1,1}X_1 + t^{\beta_2}R_{l-1,2}X_2 + \cdots + \\
&\quad + t^{\beta_{l-1}}(P_{l-1,\,l-1}+Q_{l-1,\,l-1})X_{l-1} + t^{-\alpha}R_{l-1,\,l}X_l \\
\frac{dX_l}{dt} &= t^{\beta_1}R_{l1}X_1 + t^{\beta_2}R_{l2}X_2 + \cdots + t^{\beta_{l-1}}R_{l,\,l-1}X_{l-1} + t^{-\alpha}R_{ll}X_l
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_{l-1}$, α — вещественные числа, P_{ss}, Q_{ss} $(s=1,\ldots,l-1)$ и R_{ll} — квадратные матрицы, остальные коэффициенты — матрицы вообще прямоугольные соответствующего размера.

Будем предполагать, что в системе (3.21) все матрицы $R_{s\sigma}$ и $Q_{s\sigma}$ суть функции t, определенные, непрерывные и ограниченные при $t \geqslant t^*$, причем все $Q_{s\sigma} \to 0$ при $t \to \infty$, матрицы же P_{ss} $(s=1,\ldots,l-1)$ постоянные, причем такие, что характеристические уравнения

$$D(P_{ss} - \varkappa I) = 0 \qquad (s=1,\ldots,l-1)$$

имеют корни лишь с отличными от нуля вещественными частями. Пользуясь тем же методом, каким мы пользовались при доказательстве предыдущей теоремы, можно доказать следующую теорему.

Теорема. Если выполнены условия

$$\alpha > 1, \qquad \beta_s > -1 \qquad (s=1,\ldots,l-1)$$

и матрица R_{ll} имеет порядок m, то система (3.21) имеет m-столбцовое решение следующего вида:

$$X_s = t^{-(\alpha+\beta_s)}U_s \quad (s=1,\ldots,l-1), \qquad X_l = I + t^{-(\alpha-1)}U_l$$

где U_s $(s=1,\ldots,l)$ — матрицы, ограниченные при всех $t \geqslant t^*$.

По отношению к только что сформулированной теореме имеет место высказанное выше замечание 1, а также замечания, аналогичные замечаниям 2 и 3.

§ 4. Построение решений уравнения (0.1). Обратимся теперь к рассмотрению уравнения (0.1) в предположениях, сделанных в начале работы. Обозначим корни уравнения (0.3) через $\varkappa_s = \lambda_s + i\mu_s$ $(s=1,\ldots,n)$ и допустим, что один из них, например $\varkappa_n = \lambda_n$, простой вещественный корень, а остальные корни удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re}(\varkappa_s) \neq \lambda_n \qquad (s=1,\ldots,n-1) \tag{4.1}$$

В дальнейшем будем предполагать, что матрица P в уравнении (0.1) имеет вид:

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-1,\,1} & \cdots & p_{n-1,\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{Vmatrix} \tag{4.2}$$

Сделанное предположение нисколько не уменьшает общности рассуждений, ибо, как известно, этого всегда можно достигнуть при помощи некоторого линейного неособенного преобразования переменных с постоянными вещественными коэффициентами.

Если ввести в рассмотрение матрицы [1]

$$P_{11} = \begin{Vmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1,\, n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-1,\, 1} & \ldots & p_{n-1,\, n-1} \end{Vmatrix}$$

$$Q_{11} = \begin{Vmatrix} q_{11} & \ldots & q_{1,\, n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n-1,\, 1} & \ldots & q_{n-1,\, n-1} \end{Vmatrix}, \qquad Q_{12} = \begin{Vmatrix} q_{1n} \\ \vdots \\ q_{n-1,\, n} \end{Vmatrix}, \qquad Q_{21} = \| q_{n1} \ldots q_{n,\, n-1} \|$$

$$X_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{Vmatrix}, \qquad x_n = \| x_n \|$$

то при сделанных предположениях уравнение (0.1) будет эквивалентно следующей системе двух матричных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= (P_{11} + t^{-\gamma} Q_{11}) X_1 + t^{-\gamma} Q_{12}\, x_n \\ \frac{dx_n}{dt} &= t^{-\gamma} Q_{21} X_1 + (\lambda_n + t^{-\gamma} q_{nn})\, x_n \end{aligned} \tag{4.3}$$

Установим вид решения этой системы, отвечающего корню λ_n. С этой целью рассмотрим возможные здесь три случая.

Первый случай: $\gamma > 1$. Подстановка

$$X_1 = e^{\lambda_n t}\, Y_1, \qquad x_n = e^{\lambda_n t}\, y_n$$

где

$$Y_1 = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{Vmatrix}, \qquad y_n = \| y_n \|$$

новые неизвестные матрицы, приводит систему (4.3) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= (P_{11} - \lambda_n + t^{-\gamma} Q_{11}) Y_1 + t^{-\gamma} Q_{12} y_n \\ \frac{dy_n}{dt} &= t^{-\gamma} Q_{21} Y_1 + t^{-\gamma} q_{nn}\, y_n \end{aligned} \tag{4.4}$$

Полученная система удовлетворяет всем условиям теоремы § 3. Действительно, здесь $\alpha = \gamma > 1$, $\beta = 0$, $m = n - 1$ и корни уравнения

$$D\,(P_{11} - \lambda_n - \varkappa) = 0 \tag{4.5}$$

[1] Всюду в дальнейшем матрицы, состоящие из одного элемента, будем обозначать тем же значком, каков элемент этой матрицы. При этом при преобразованиях матричных уравнений указанный значок будет всегда означать матрицу, а в окончательном выражении решения может рассматриваться как скалярная функция.

имеют согласно (4.1) отличные от нуля вещественные части. Следовательно, система (4.4) имеет решение вида

$$Y_1 = t^{-\gamma} U_1, \qquad y_n = 1 + t^{-(\gamma-1)} u_n$$

где одностолбцовая матрица U_1 и функция u_n ограничены при всех $t \geqslant t^*$. Соответственно система (4.3) имеет решение вида[1]

$$X_1 = e^{\lambda_n t} t^{-\gamma} U_1, \qquad x_n = e^{\lambda_n t}(1 + t^{-(\gamma-1)} u_n)$$

Второй случай: $\frac{1}{2} < \gamma \leqslant 1$. Подстановка

$$X_1 = \left[\exp\left(\lambda_n t + \int_{t^*}^{t} \tau^{-\gamma} q_{nn}\, d\tau\right)\right] t^{\gamma} Y_1, \qquad x_n = \left[\exp\left(\lambda_n t + \int_{t^*}^{t} \tau^{-\gamma} q_{nn}\, d\tau\right)\right] y_n$$

приводит систему (4.3) к виду

$$\frac{dY_1}{dt} = [P_{11} - \lambda_n + t^{-\gamma}(Q_{11} - q_{nn}) + \gamma t^{-1}] Y_1 + t^{-2\gamma} Q_{12} y_n$$

$$\frac{dY_2}{dt} = Q_{21} Y_1$$

Полученная система также удовлетворяет всем условиям теоремы предыдущего параграфа (здесь $\alpha = 2\gamma > 1$, $\beta = 0$, $m = n - 1$), следовательно, она имеет решение

$$Y_1 = t^{-2\gamma} U_1, \qquad y_n = 1 + t^{-(2\gamma-1)} u_n$$

а система (4.3) соответственно имеет решение

$$X_1 = \left[\exp\left(\lambda_n t + \int_{t^*}^{t} \tau^{-\gamma} q_{nn}\, d\tau\right)\right] t^{-\gamma} U_1$$

$$x_n = \left[\exp\left(\lambda_n t + \int_{t^*}^{t} \tau^{-\gamma} q_{nn}\, d\tau\right)\right] (1 + t^{-(2\gamma-1)} u_n)$$

где матрица U_1 и функция u_n ограничены при всех $t \geqslant t^*$.

Третий случай: $0 < \gamma \leqslant \frac{1}{2}$. Обозначим через k целое положительное число, удовлетворяющее неравенствам $k\gamma \leqslant 1 < (k+1)\gamma$, и сделаем в системе (4.3) замену переменных, положив

$$X_1 = Y_1 + \sum_{j=1}^{k-1} t^{-j\gamma} A^{(j)} y_n, \qquad x_n = y_n \tag{4.6}$$

где

$$A^{(j)} = \left\| \begin{matrix} a_1^{(j)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1}^{(j)} \end{matrix} \right\| \qquad (j = 1, \ldots, k-1)$$

[1] Если $\gamma > 1$ и уравнение (0.3) имеет m корней с одинаковыми вещественными частями, которым отвечают только простые элементарные делители матрицы P, причем выполнены условия, аналогичные (4.1), то подобным образом можно построить m-столбцовое решение уравнения (0.1).

есть некоторые, пока неопределенные матрицы, ограниченные при всех $t \geqslant t^*$. Подставляя выражения (4.6) в систему (4.3), получим

$$\frac{dY_1}{dt} + \sum_{j=1}^{k-1} t^{-j\gamma}\left(-j\gamma\, t^{-1} A^{(j)} y_n + \frac{dA^{(j)}}{dt} y_n + A^{(j)} \frac{dy_n}{dt}\right) =$$

$$= (P_{11} + t^{-\gamma} Q_{11}) Y_1 + \left[(P_{11} + t^{-\gamma} Q_{11}) \sum_{j=1}^{k-1} t^{-j\gamma} A^{(j)} + t^{-\gamma} Q_{12}\right] y_n$$

$$\frac{dy_n}{dt} = t^{-\gamma} Q_{21} Y_1 + \left(\lambda_n + t^{-\gamma} q_{nn} + t^{-\gamma} Q_{21} \sum_{j=1}^{k-1} t^{-j\gamma} A^{(j)}\right) y_n$$

Разрешим первое из полученных уравнений относительно dY_1 / dt и подставим в него значение dy_n / dt из второго уравнения (выполняя указанную подстановку, мы в выражении dy_n / dt заменим значок суммирования j на j_1).

В результате придем к системе

$$\frac{dY_1}{dt} = (P_{11} + \Phi_{11}(t)) Y_1 + \Phi_{12} y_n, \qquad \frac{dy_n}{dt} = t^{-\gamma} Q_{21} Y_1 + (\lambda_n + \varphi(t)) y_n \tag{4.7}$$

где

$$\Phi_{11}(t) = t^{-\gamma}\left(Q_{11} - \sum_{j=1}^{k-1} t^{-j\gamma} A^{(j)} Q_{21}\right), \qquad \varphi(t) = t^{-\gamma}\left(q_{nn} + \sum_{j=1}^{k-1} t^{-j\gamma} Q_{21} A^{(j)}\right) \tag{4.8}$$

$$\Phi_{12} = t^{-\gamma} Q_{12} + \sum_{j=1}^{k-1} t^{-j\gamma}\left[-\frac{dA^{(j)}}{dt} + P_{11} A^{(j)} - A^{(j)} \lambda_n + \right. \tag{4.9}$$

$$\left. + t^{-\gamma}\left(Q_{11} A^{(j)} - A^{(j)} q_{nn} - \sum_{j_1=1}^{k-1} t^{-j_1\gamma} A^{(j)} Q_{21} A^{(j_1)}\right)\right] + \sum_{j=1}^{k-1} j\gamma t^{-(j\gamma+1)} A^{(j)}$$

Обратимся к выражению (4.9). Разлагая левую часть этого выражения по возрастающим степеням $t^{-\gamma}$, мы можем матрицу Φ_{12} представить в виде

$$\Phi_{12} = \sum_{j=1}^{k-1} t^{-j\gamma}\left[-\frac{dA^{(j)}}{dt} + (P_{11} - \lambda_n) A^{(j)} + R^{(j)}\right] + t^{-k\gamma} R^{(k)} \tag{4.10}$$

где $R^{(1)} = Q_{12}$, а $R^{(j)}$ $(j = 2, \ldots, k)$ — матрицы, элементы которых суть целые рациональные функции от элементов матриц Q_{11}, Q_{12}, Q_{21} и тех $A^{(i)}$, для которых $i < j$ (матрица $R^{(k)}$ зависит также и от t).

Выберем теперь коэффициенты $A^{(j)}$ подстановки (4.6) так, чтобы в выражении (4.10) коэффициенты первых $k-1$ членов разложения по степеням $t^{-\gamma}$ обратились в нуль. Приравнивая нулю указанные коэффициенты, получим для определения $A^{(j)}$ следующую последовательность линейных неоднородных матричных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dA^{(j)}}{dt} = (P_{11} - \lambda_n) A^{(j)} + R^{(j)} \qquad (j = 1, \ldots, k-1) \tag{4.11}$$

Характеристическое уравнение (4.5), отвечающее каждому из уравнений (4.11), имеет все корни с отличными от нуля вещественными частями. Поэтому, принимая во внимание отмеченную выше форму зависимости элементов матриц $R^{(j)}$ от элементов матриц $A^{(j)}$, а также то, что $R^{(1)} = Q_{12}$ есть матрица ограниченная, заключаем, что из уравнений (4.11) можно последовательно найти все матрицы $A^{(j)}$ $(j=1, \ldots, k-1)$ как ограниченные функции t.

Выбрав указанным образом коэффициенты $A^{(j)}$ подстановки (4.6), получим, что матрица Φ_{12}, определяемая равенством (4.9), имеет вид:

$$\Phi_{12} = t^{-k\gamma} R^{(k)}$$

где $R^{(k)}$ — ограниченная матрица.

Теперь преобразованием переменных

$$Y_1 = \left[\exp\left(\lambda_n t + \int_{t^*}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau\right)\right] t^{\gamma} Z_1, \qquad y_n = \left[\exp\left(\lambda_n t + \int_{t^*}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau\right)\right] z_n \quad (4.12)$$

где Z_1 и z_n — новые неизвестные матрицы, а функция $\varphi(t)$ определяется равенством (4.8), система (4.7) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dt} &= (P_{11} - \lambda_n + \Phi_{11}(t) - \varphi(t) - \gamma t^{-1}) Z_1 + t^{-(k+1)\gamma} R^{(k)} z_n \\ \frac{dz_n}{dt} &= Q_{21} Z_1 \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Система (4.13) удовлетворяет всем условиям теоремы предыдущего параграфа (здесь $\alpha = (k+1)\gamma > 1$, $\beta = 0$, $m = n-1$), следовательно, она имеет решение

$$Z_1 = t^{-(k+1)\gamma} V_1, \qquad z_n = 1 + t^{-[(k+1)\gamma - 1]} u_n$$

где матрица V_1 и функция u_n ограничены при всех $t \geqslant t^*$. Отсюда, принимая во внимание подстановки (4.6) и (4.12), приходим к заключению, что исходная система (4.3) имеет решение вида

$$X_1 = \left[\exp\left(\lambda_n t + \int_{t^*}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau\right)\right] (A^{(1)} t^{-\gamma} + t^{-[(k+2)\gamma - 1]} U_1$$

$$x_n = \left[\exp\left(\lambda_n t + \int_{t^*}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau\right)\right] (1 + t^{-[(k+1)\gamma - 1]} u_n)$$

в котором U_1 — матрица, также ограниченная при $t \geqslant t^*$.

Изложенный метод дает возможность построить решение уравнения (0.1), отвечающее всякому простому вещественному корню уравнения (0.3), удовлетворяющему условию (4.1). Отсюда непосредственно следует, что если все корни уравнения (0.3) вещественные и простые, то мы можем таким образом построить всю фундаментальную систему решений уравнения (0.1). Если же допустить, что среди корней уравнения (0.3) имеются хотя бы два, обладающие одинаковой вещественной частью, то при $0<\gamma\leqslant 1$, вообще говоря, нельзя построить всей фундаментальной системы решений уравнения (0.1), если, конечно, относительно коэффициента $Q(t)$ этого уравнения не делать дополнительных предположений.

В самом деле, рассмотрим, например, систему уравнений

$$\frac{dX}{dt}=t^{-\gamma}Q(t)X \tag{4.14}$$

где $Q(t)$ — произвольная, непрерывная и ограниченная матрица любого порядка (больше единицы). Характеристическое уравнение, отвечающее этой системе, имеет кратный нулевой корень. Сделаем в системе (4.14) замену независимой переменной, положив

$$\tau=\begin{cases}t^{1-\gamma} & \text{при } \gamma<1\\ \ln t & \text{при } \gamma=1\end{cases}$$

В результате получим

$$\frac{dX}{d\tau}=Q^*(\tau)X, \qquad Q^*(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{1-\gamma}Q\left(\tau^{1/(1-\gamma)}\right) & \text{при } \gamma<1\\ Q(e^{\tau}) & \text{при } \gamma=1\end{cases}$$

Видим, что вопрос о построении решений системы (4.14) эквивалентен вопросу о построении решений для системы уравнений с произвольными непрерывными коэффициентами.

В другой работе мы покажем, что если сделать дополнительное предположение относительно матрицы $Q(t)$, например, предположить, что эта матрица представима в виде

$$Q(t)=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{t^{(i-1)\gamma}}Q_i(t)$$

где $Q_i(t)$ при $t\leqslant k$ — вещественные постоянные матрицы или матрицы, представляющие вещественные периодические функции t одного и того же периода ω, $Q_{k+1}(t)$ — произвольная непрерывная матрица, ограниченная при $t\geqslant t^*$, k — целое положительное число такое, что

$$k\gamma\leqslant l\leqslant(k+1)\gamma$$

где l — наибольшая кратность корня уравнения (0.3), то, выполняя некоторые преобразования уравнения и используя теорему, сформулированную в конце § 3, можно построить всю фундаментальную систему решений уравнения (0.1) при любой канонической структуре матрицы P. Это дает возможность обобщить результаты, полученные в работах В. В. Хорошилова [3] и Л. И. Донской [4].

Замечание. При помощи изложенного в настоящей работе метода можно также построить решение уравнения вида

$$\frac{dX}{dt}=t^{\alpha}\left(P+\frac{1}{t^{\beta}}Q(t)\right)X \tag{4.15}$$

где α и β — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам $\alpha \geqslant -1$, $\beta > 0$, а относительно матриц P и $Q(t)$ имеют место те же предположения, что и для уравнения (0.1).

Действительно, заменой переменной $\tau = t^{\alpha+1}$ уравнение (4.15) сводится к виду (0.1), причем $\gamma = \beta/(\alpha+1)$.

Отметим в заключение, что построенное здесь решение дает возможность установить необходимое и достаточное условие устойчивости нулевого решения уравнения (0.1) в предположении, что уравнение (0.3) имеет один корень, равный нулю, а все остальные корни с отрицательными вещественными частями [9].

Поступило 25 I 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Приводимые системы. Труды Математ. ин-та, т. XIII, 1946.
2. Хорошилов В. В. О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой. Ученые записки Ленинградского университета, сер. математ. наук, вып. 19, № 137, 1950.
3. Хорошилов В. В. О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой. ПММ, т. XV, вып. 1, 1951.
4. Донская Л. И. О структуре решения системы трех линейных однородных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой. Вестник Ленинградского университета, сер. математики, физики и химии, № 5, 1953.
5. Рапопорт И. М. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. LXXVIII, № 6, 1951.
6. Басов В. П. О решениях одного класса систем линейных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. LXXX, № 3, 1951.
7. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., 1949.
8. Персидский К. П. О характеристичных числах дифференциальных уравнений. Известия Академии наук Казахской ССР, серия математики и механики, № 42, вып. 1, 1947.
9. Басов В. П. Необходимые и достаточные условия устойчивости решений некоторого класса систем линейных дифференциальных уравнений в одном сомнительном случае. ДАН СССР, т. LXXXI, № 1, 1951.