Прикладная математика и механика. Том XVIII. 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ТЕОРИЙ РАСЧЕТА ПОЛОГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

С. А. Амбарцумян

(Ереван)

В теории цилиндрических оболочек приближенные методы расчета основаны на тех или иных упрощающих гипотезах, выбор которых в основном зависит от соотношени йразмеров срединной поверхности оболочки [1,2,3].

Из всех приближенных теорий расчета цилиндрических оболочек заслуженной популярностью пользуются теории длинных цилиндрических оболочек, разработанные В. З. Власовым [1,3,4]. Они в основном опираются на следующие гипотезы[1]:

а) гипотеза об отсутствии продольных изгибающих моментов ($M_1 = 0$);

б) гипотеза об отсутствии деформаций удлинения срединной поверхности оболочки по поперечным линиям $\alpha = \text{const}$ ($\varepsilon_2 = 0$);

в) гипотеза об отсутствии крутящих моментов ($H_{12} = H_{21} = H = 0$);

г) гипотеза об отсутствии сдвигов срединной поверхности ($\omega = 0$).

В основном на базе этих гипотез, как нами показано [5], построена также упрощенная теория длинных цилиндрических пластин В. В. Новожилова[2].

Наряду с приведенными гипотезами, интересны также следующие гипотезы;

д) об отсутствии поперечных изгибающих моментов ($M_2 = 0$);

е) об отсутствии деформаций удлинения срединной поверхности оболочки по продольным линиям $\beta = \text{const}$ ($\varepsilon_1 = 0$), которые могут служить основой для построения упрощенной теории существенно коротких цилиндрических пластин.

Для построения приближенных теорий можно воспользоваться некоторыми представлениями, которые вытекают из теории анизотропных оболочек.

1. Рассмотрим тонкостенную, достаточно пологую, ортотропную цилиндрическую оболочку.

За координатную поверхность примем среднюю поверхность оболочки. Пусть α и β являются ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны координатной поверхности. Положение точки на срединной поверхности будет определяться координатами α и β соответственно вдоль образующей и по дуге поперечного круга, при этом коэффициенты первой квадратичной формы $A = B = 1$.

Считаем, что одна из плоскостей упругой симметрии материала оболочки параллельна срединной поверхности оболочки, а остальные две перпендикулярны к координатным линиям.

Принимается гипотеза недеформируемых нормалей [1,2,6].

---

[1] Здесь приняты общеизвестные обозначения теории оболочек [2,3].

Для расчета таких оболочек под действием нормально приложенной нагрузки имеем уравнение [6,7]

$$P_1 \frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha^8} + P_3 \frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha^6\partial\beta^2} + P_5 \frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha^4\partial\beta^4} + P_4 \frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^6} + P_2 \frac{\partial^8\Phi}{\partial\beta^8} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} = Z \tag{1.1}$$

Здесь R — радиус кривизны срединной поверхности оболочки; $\Phi = \Phi(\alpha, \beta)$ — некоторая скалярная функция

$$\begin{gathered} P_1 = a_{11}D_{11}, \qquad P_3 = D_{11}(a_{66} - 2a_{12}) + 2a_{11}(D_{12} + 2D_{66}) \\ P_5 = a_{11}D_{22} + 2(a_{66} - 2a_{12})(D_{12} + 2D_{66}) + a_{22}D_{11} \\ P_2 = a_{22}D_{22}, \qquad P_4 = D_{22}(a_{66} - 2a_{12}) + 2a_{22}(D_{12} + 2D_{66}) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Через функцию $\Phi = \Phi(\alpha, \beta)$ расчетные величины определяются следующими формулами:

тангенциальные силы

$$N_1 = \frac{1}{R}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}, \qquad N_2 = \frac{1}{R}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}, \qquad S = -\frac{1}{R}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^3\partial\beta} \tag{1.3}$$

изгибающие и крутящие моменты

$$\begin{aligned} M_1 &= \left(D_{11}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + D_{12}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)L(a)\Phi \\ M_2 &= \left(D_{22}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + D_{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)L(a)\Phi \\ H &= -2D_{66}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}L(a)\Phi \end{aligned} \tag{1.4}$$

поперечные силы

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\left[D_{11}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}\right]L(a)\Phi \\ Q_2 &= -\left[D_{22}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3}{\partial\beta\partial\alpha^2}\right]L(a)\Phi \end{aligned} \tag{1.5}$$

перемещения

$$\begin{aligned} w &= L(a)\Phi \\ u &= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(a_{22}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - a_{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)\Phi \\ v &= -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[a_{22}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + (a_{66} - a_{12})\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right]\Phi \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь

$$L(a) = a_{11}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + (a_{66} - 2a_{12})\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + a_{22}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4} \tag{1.7}$$

$$a_{11} = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_{22} = \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad a_{66} = \frac{1}{C_{66}} \; a_{12} = \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad \Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2 \tag{1.8}$$

где для жесткостей растяжения — сжатия имеем

$$C_{11} = 2\frac{E_1\delta}{1 - \mu_1\mu_2}, \quad C_{22} = 2\frac{E_2\delta}{1 - \mu_1\mu_2}, \quad C_{66} = 2G_{12}\delta, \quad C_{12} = 2\frac{E_1\mu_2\delta}{1 - \mu_1\mu_2} \tag{1.9}$$

Наконец для жесткостей изгиба имеем (1.10)

$$D_{11}=\frac{2}{3}\frac{E_1\delta^3}{1-\mu_1\mu_2},\quad D_{22}=\frac{2}{3}\frac{E_2\delta^3}{1-\mu_1\mu_2},\quad D_{66}=\frac{2}{3}G_{12}\delta^3,\quad D_{12}=\frac{2}{3}\frac{E_1\mu_2\delta^3}{1-\mu_1\mu_2}$$

В этих формулах [6,8] E_1, E_2 — модули упругости, G_{12} — модуль сдвига, μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона, $\delta={}^1/_2 h$ — половина толщины стенка. Приведенные результаты позволяют с единой точки зрения теории анизотропных оболочек построить приближенные теории пологих изотропных оболочек, базирующихся на гипотезах, приведенных в начале.

2. В дальнейшем для простоты будем полагать, что $\mu_1=\mu_2=0$. Для коэффициентов a_{ik} и D_{ik} в случае изотропной оболочки получим

$$a_{11}=a_{22}=\frac{1}{Eh},\qquad a_{66}=\frac{2}{Eh}\qquad a_{12}=0$$
$$D_{11}=D_{22}=\frac{1}{12}Eh^3,\qquad D_{66}=\frac{1}{24}Eh^3\qquad D_{12}=0 \tag{2.1}$$

Учитывая (2.1), из (1.2) для коэффициентов P_i, в общем случае получим

$$P_1=P_2=\frac{1}{12}h^2,\qquad P_3=P_4=\frac{1}{3}h^2,\qquad P_5=\frac{1}{2}h^2 \tag{2.2}$$

Подставляя значения P_i из (2.2) в (1.1), получим известное разрешающее уравнение теории пологой цилиндрической оболочки [3,9,10]

$$\frac{h^2}{12}\nabla^4\nabla^4\Phi_0+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4\Phi_0}{\partial\alpha^4}=Z \tag{2.3}$$

где

$$\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4} \tag{2.4}$$

В такой постановке из (2.3) — (2.6) для расчетных величин получим

$$N_1=\frac{1}{R}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2},\quad N_2=\frac{1}{R}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4},\quad S=-\frac{1}{R}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^3\partial\beta} \tag{2.5}$$

$$M_1=\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\nabla^4\Phi,\quad M_2=\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\nabla^4\Phi,\ H=-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\nabla^4\Phi \tag{2.6}$$

$$u=\frac{1}{Eh}\frac{1}{R}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha\partial\beta^2},\quad v=-\frac{1}{Eh}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right]\Phi$$
$$w=\frac{1}{Eh}\nabla^4\Phi, \tag{2.7}$$

Здесь мы, следуя А. Л. Гольденвейзеру [11], подчеркиваем, что в общем случае приближенной задачи нет нулевых внутренних усилий и деформаций, а есть усилия и деформации, которые пренебрежимо малы по сравнению с другими деформациями и усилиями.

Таким образом, приведенные выше гипотезы об отсутствии той или иной геометрической или статической величины, в основном можно считать приемлемыми лишь при построении разрешающего уравнения. Что касается расчетных величин, то они в основном во всех случаях приближенных задач должны быть определены формулами (2.5), (2.6), (2.7).

Учитывая сказанное выше, для каждого приближенного случая следует построить лишь основное разрешающее уравнение, которое, будучи приближенным с точки зрения расчета изотропной оболочки, является точным уравнением для определенного класса ортотропных оболочек.

Случай I. Принимается гипотеза (а), в силу которой, на основании (1.4) в разрешающем уравнении надо принимать $D_{11}=0$. Совместно с основной гипотезой, учитывая (2.1), из (1.2) для коэффициентов P_i получим

$$P_1=0, \quad P_2=\frac{1}{12}h^2, \quad P_3=\frac{1}{6}h^2, \quad P_4=\frac{1}{3}h^2, \quad P_5=\frac{5}{12}h^2 \tag{2.8}$$

Подставляя значения P_i из (2.8) в (1.1), для первого приближенного случая получим следующее разрешающее уравнение

$$\frac{h^2}{12}\left(2\frac{\partial^8\Phi_1}{\partial\alpha^6\partial\beta^2}+5\frac{\partial^8\Phi_1}{\partial\alpha^4\partial\beta^4}+4\frac{\partial^8\Phi_1}{\partial\alpha^2\partial\beta^6}+\frac{\partial^8\Phi_1}{\partial\beta^8}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4\Phi_1}{\partial\alpha^4}=Z \tag{2.9}$$

Случай II. Принимается гипотеза (б), в силу которой, учитывая, что $\varepsilon_2=a_{11}\quad N_2$ [6,12], надо принимать $a_{11}=0$.

Далее, поступая так же, как и в первом случае, из (2.1), (1.2) и (1.1) получим

$$P_1=0, \quad P_2=\frac{1}{12}h^2, \quad P_3=\frac{1}{6}h^2, \quad P_4=\frac{1}{3}h^2, \quad P_5=\frac{5}{12}h^2 \tag{2.10}$$

$$\frac{h^2}{12}\left(2\frac{\partial^8\Phi_1}{\partial\alpha^6\partial\beta^2}+5\frac{\partial^8\Phi_1}{\partial\alpha^4\partial\beta^4}+4\frac{\partial^8\Phi_1}{\partial\alpha^2\partial\beta^6}+\frac{\partial^8\Phi_1}{\partial\beta^8}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4\Phi_1}{\partial\alpha^4}=Z \tag{2.11}$$

Случай III. Принимается гипотеза (в), в силу которой, на основании (1.4) и (2.1) надо принимать $D_{66}=0$. Далее, из (2.1), (1.2) и (1.1) получим

$$P_1=\frac{1}{12}h^2, \quad P_2=\frac{1}{12}h^2, \quad P_3=\frac{1}{6}h^2, \quad P_4=\frac{1}{6}h^2, \quad P_5=\frac{1}{6}h^2 \tag{2.12}$$

$$\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^8\Phi_2}{\partial\alpha^8}+2\frac{\partial^8\Phi_2}{\partial\alpha^6\partial\beta^2}+2\frac{\partial^8\Phi_2}{\partial\alpha^4\partial\beta^4}+2\frac{\partial^8\Phi_2}{\partial\alpha^2\partial\beta^6}+\frac{\partial^8\Phi_2}{\partial\beta^8}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4\Phi_2}{\partial\alpha^4}=Z \tag{2.13}$$

Случай IV. Принимается гипотеза (г), в силу которой, учитывая [6,12], что $\omega=a_{66}S$, надо принимать $a_{66}=0$. Далее из (2.1), (1.2) и (1.1) получим

$$P_1=\frac{1}{12}h^2, \quad P_2=\frac{1}{12}h^2, \quad P_3=\frac{1}{6}h^2, \quad P_4=\frac{1}{6}h^2, \quad P_5=\frac{1}{6}h^2 \tag{2.14}$$

$$\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^8\Phi_2}{\partial\alpha^8}+2\frac{\partial^8\Phi_2}{\partial\alpha^6\partial\beta^2}+2\frac{\partial^8\Phi_2}{\partial\alpha^4\partial\beta^4}+2\frac{\partial^8\Phi_2}{\partial\alpha^2\partial\beta^6}+\frac{\partial^8\Phi_2}{\partial\beta^8}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4\Phi_2}{\partial\alpha^4}=Z \tag{2.15}$$

Случай V. Принимается гипотеза (д), в силу которой, на основании (1.4) и (2.1), надо принимать $D_{22}=0$. Далее из (2.1), (1.2) и (1.1) получим

$$P_1=\frac{1}{12}h^2, \quad P_2=0, \quad P_3=\frac{1}{3}h^2, \quad P_4=\frac{1}{6}h^2, \quad P_5=\frac{5}{12}h^2 \tag{2.16}$$

$$\frac{h_2}{12}\left(\frac{\partial^8\Phi_3}{\partial\alpha^8}+4\frac{\partial^8\Phi_3}{\partial\alpha^6\partial\beta^2}+5\frac{\partial^8\Phi_3}{\partial\alpha^4\partial\beta^4}+2\frac{\partial^8\Phi_3}{\partial\alpha^2\partial\beta^6}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4\Phi_3}{\partial\alpha^4}=Z \tag{2.17}$$

Случай VI. Принимается гипотеза (е), в силу которой, учитывая, что $\varepsilon_1 = a_{22} N_1$ [6,12], надо принимать $a_{22} = 0$. Из (2.1), (1.2) и (1.1) получим

$$P_1 = \tfrac{1}{12} h^2, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = \tfrac{1}{3} h^2, \quad P_4 = \tfrac{1}{6} h^2, \quad P_5 = \tfrac{5}{12} h^2 \tag{2.18}$$

$$\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^8 \Phi_3}{\partial \alpha^8} + 4\frac{\partial^8 \Phi_3}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + 5\frac{\partial^8 \Phi_3}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + 2\frac{\partial^8 \Phi_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 \Phi_3}{\partial \alpha^4} = Z \tag{2.19}$$

Разрешающие уравнения приведенных шести случаев попарно одинаковы. Отсюда вытекает важное свойство приведенных гипотез: каждой статической гипотезе соответствует своя эквивалентная геометрическая гипотеза, которая, в разрешающих уравнениях, может заменить данную статическую гипотезу, или наоборот, каждой геометрической гипотезе соответствует своя эквивалентная статическая гипотеза, которая, в разрешающих уравнениях, может заменить данную геометрическую гипотезу. Например, гипотезы (а) и (б), (в) и (г), (д) и (е) взаимно заменимы.

Рассмотрим следующие случаи попарного применения вышеуказанных гипотез.

Случай VII. Совместно принимаются гипотезы (а) и (б), в силу которых надо принимать: $D_{11} = 0$, $a_{11} = 0$. Далее из (2.1), (1.2) и (1.1) получим

$$P_1 = 0, \quad P_2 = \tfrac{1}{12} h^2, \quad P_3 = 0, \quad P_4 = \tfrac{1}{3} h^2, \quad P_5 = \tfrac{1}{3} h^2 \tag{2.20}$$

$$\frac{h^2}{12}\left(4\frac{\partial^8 \Phi_4}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + 4\frac{\partial^8 \Phi_4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} + \frac{\partial^8 \Phi_4}{\partial \beta^8}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 \Phi_4}{\partial \alpha^4} = Z \tag{2.21}$$

Случай VIII. Совместно принимаются гипотезы (д) и (е), в силу которых надо принимать $D_{22} = 0$, $a_{22} = 0$. Далее из (2.1), (1,2) и (1.1) получим

$$P_1 = \tfrac{1}{12} h^2, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = \tfrac{1}{3} h^2, \quad P_4 = 0, \quad P_5 = \tfrac{1}{3} h^2 \tag{2.22}$$

$$\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^8 \Phi_5}{\partial \alpha^8} + 4\frac{\partial^8 \Phi_5}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + 4\frac{\partial^8 \Phi_5}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 \Phi_5}{\partial \alpha^4} = Z \tag{2.23}$$

Случай IX. Совместно принимаются гипотезы (в) и (г), в силу которых надо принимать: $D_{66} = 0$, $a_{66} = 0$. Далее из (2.1), (1.2) и (1.1) получим

$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{12} h^2, \quad P_3 = 0, \quad P_4 = 0, \quad P_5 = \tfrac{1}{6} h^2 \tag{2.24}$$

$$\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^8 \Phi_6}{\partial \alpha^8} + 2\frac{\partial^8 \Phi_6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + \frac{\partial^8 \Phi_6}{\partial \beta^8}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 \Phi_6}{\partial \alpha^4} = Z \tag{2.25}$$

Наконец, рассмотрим два более упрощенных случая.

Случай X. Совместно принимаются гипотезы (а), (б), (в) и (г). В силу принятых гипотез, наряду с (2.1), надо считать

$$D_{11} = 0, \qquad D_{66} = 0, \qquad a_{11} = 0, \qquad a_{66} = 0 \tag{2.26}$$

Далее, поступая так же, как и в предыдущих случаях, получим

$$P_1 = 0, \quad P_2 = \tfrac{1}{12} h^2, \quad P_3 = 0, \quad P_4 = 0, \quad P_5 = 0 \tag{2.27}$$

$$\frac{h^2}{12}\frac{\partial^8 \Phi_7}{\partial \beta^8} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 \Phi_7}{\partial \alpha^4} = Z \tag{2.28}$$

Уравнение (2.28), как известно, является разрешающим уравнением упрощенной теории длинных цилиндрических пластин [2,5].

Случай XI. Совместно принимаются гипотезы (в), (г), (д) и (е). В силу этих гипотез, наряду с (2.1), надо считать

$$D_{22}=0, \quad D_{66}=0, \quad a_{22}=0, \quad a_{66}=0 \tag{2.29}$$

Далее получим

$$P_1=\frac{1}{12}h^2, \quad P_2=0, \quad P_3=0, \quad P_4=0, \quad P_5=0 \tag{2.30}$$

$$\frac{h^2}{12}\frac{\partial^8 \Phi_8}{\partial\alpha^8}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 \Phi_8}{\partial\alpha^4}=Z \tag{2.31}$$

Уравнение (2.31) является разрешающим уравнением упрощенной теории существенно коротких цилиндрических пластин. В этом мы убедимся в дальнейшем.

Таким образом, здесь приведены одиннадцать случаев построения приближенных разрешающих уравнений теории изотропных, пологих цилиндрических оболочек. Учитывая тождественность некоторых из уравнений, в дальнейшем будем анализировать лишь восемь приближенных уравнений: (2.9), (2.13), (2.17), (2.21), (2.23), (2.25), (2.28), (2.31) и одно уравнение (2.3), которое не содержит дополнительных упрощений, связанных с рассмотренными гипотезами.

3. Для установления пределов применимости полученных уравнений, тем самым и рассмотренных гипотез, решим задачу о прочности изотропной цилиндрической оболочки, свободно опертой по всему контуру и несущей распределенную, нормально приложенную нагрузку, которая меняется по закону

$$Z=q\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b} \tag{3.1}$$

где q — интенсивность нагрузки в центре оболочки, a — размер оболочки по образующей, b — размер оболочки по дуге поперечного круга. Координаты α и β, которые направлены соответственно по образующей и по дуге поперечного круга оболочки, отсчитываются от точки пересечения продольного и поперечного краев оболочки.

Задачу будем решать как при помощи полученных девяти уравнений, так и при помощи следующего уравнения:

$$\frac{h^2}{12}\nabla^4\nabla^4\Phi+\frac{1}{6}\frac{h^2}{R^2}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\beta^6}+\frac{7}{12}\frac{h^2}{R^2}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^4}+\frac{1}{2}\frac{h^2}{R^2}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\alpha^4\partial\beta^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}=Z \tag{3.2}$$

которое является разрешающим уравнением теории цилиндрических оболочек Лява — Тимошенко [10,13] и не содержит гипотез, ограничивающих пологость и длину оболочки. Правда, это уравнение имеет некоторую погрешность с точки зрения энергостатики сплошных упругих тел [3], однако, как показали многочисленные исследования, уравнение (3.2) не содержит математических погрешностей, превосходящих погрешность исходных допущений теории тонких оболочек [2, 3, 10].

Граничные условия задачи таковы:

$$\begin{aligned} &w=0, \quad v=0, \quad M_1=0, \quad N_1=0 \quad \text{при } \alpha=0,\ \alpha=a \\ &w=0, \quad u=0, \quad M_2=0, \quad N_2=0 \quad \text{при } \beta=0,\ \beta=b \end{aligned} \tag{3.3}$$

Граничным условиям удовлетворим, представляя искомые функции Φ, Φ_0, Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \Phi_8$ в виде

$$\Phi_i = A_i \sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b} \tag{3.4}$$

Здесь A_i коэффициенты, которые определяются из условий удовлетворения рассматриваемого уравнения. Подставляя значения z и Φ_i соответственно из (3.1) и (3.4) во все анализируемые уравнения (2.3), (2.9), (2.13), (2.17), (2.21), (2.23), (2.25), (2.28), (2.31) и (3.2), для A_i получим значения, подставляя которые в (3.4), для искомых функций в общем виде получим

$$\Phi_i = \frac{12b^8}{\pi^8 h^2}\frac{q}{\Delta_i}\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b} \tag{3.5}$$

где Δ_i является параметром, характеризующим то или иное уравнение. Выражения для Δ_i приведены в табл. 1.

Таблица 1

Номер уравнения	Искомая функция	Δ_i	Значения Δ_i
(3.2)	Φ	Δ	$(\lambda^2+1^4+C)\lambda^4-b^2(2+7\lambda^2+6\lambda^4)/\pi^2R^2$
(2.3)	Φ_0	Δ_0	$(\lambda^2+1)^4+C\lambda^4$
(2.9)	Φ_1	Δ_1	$(2\lambda^6+5\lambda^4+4\lambda^2+1)+C\lambda^4$
(2.13)	Φ_2	Δ_2	$(\lambda^8+2\lambda^6+2\lambda^4+2\lambda^2+1)+C\lambda^4$
(2.17)	Φ_3	Δ_3	$(\lambda^8+4\lambda^6+5\lambda^4+2\lambda^2)+C\lambda^4$
(2.21)	Φ_4	Δ_4	$(4\lambda^4+4\lambda^2+1)+C\lambda^4$
(2.23)	Φ_5	Δ_5	$(\lambda^8+4\lambda^6+4\lambda^4)+C\lambda^4$
(2.25)	Φ_6	Δ_6	$(\lambda^8+2\lambda^4+1)+C\lambda^4$
(2.28)	Φ_7	Δ_7	$1+C\lambda^4$
(2.31)	Φ_8	Δ_8	$\lambda^8+C\lambda^4$

Для параметров, входящих в Δ_i, имеем

$$\lambda = \frac{b}{a}, \qquad C = \frac{12b^4}{\pi^4 R^2 h^2} \tag{3.6}$$

Результаты сравнения точного и приближенных решений рассмотренной задачи в случае $h/R = {}^1/_{25}$ при различных $\lambda = b/a$ и $k = b/R$ помещены в табл. 2, 3 и 4. В этих таблицах незаполненными оставлены те клетки, в которых

$$1.2 \leqslant \Phi/\Phi_i \leqslant 0.8$$

Анализируя полученные результаты, замечаем, что рассмотренные гипотезы делятся на три группы. В первую группу входят гипотезы (а) и (б), которые как совместно, так и в отдельности применимы для построения приближенных теорий длинных оболочек (уравнения (2.9)) и (2.21)) с отношением сторон $b/a \leqslant 0.5$. Во вторую группу входят гипотезы (д) и (е), которые как совместно, так и в отдельности применимы для построения приближенных теорий коротких оболочек (уравнения (2.17)) и (2.23)) с отношением сторон $b/a \geqslant 2$. В третью группу входят гипотезы (в) и (г), которые как совместно, так и в отдельности применимы для построения приближенных теорий как существенно длинных оболочек, с отношением сторон $b/a \leqslant 0.2$, так и для существенно коротких оболочек, с отношением сторон $b/a \geqslant 5$ (уравнения (2.13) и (2.25)).

Особое место занимают уравнения (2.28) и (2.31), каждое из которых является результатом применения четырех гипотез.

$b/R=0$ *Таблица 2*

λ	10.0	5.0	3.0	2.0	1.0	0.5	0.333	0.2	0.1
Φ/Φ_0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Φ/Φ_1						0.960	0.990	0.999	0.999
Φ/Φ_4						0.922	0.980	0.997	0.999
Φ/Φ_7								0.855	0.961
Φ/Φ_2	0.980	0.926	0.820				0.820	0.926	0.980
Φ/Φ_6	0.961	0.858						0.858	0.961
Φ/Φ_3	0.999	0.998	0.990	0,960					
Φ/Φ_5	0.999	0.997	0.980	0.922					
Φ/Φ_8	0.960	0.855							

$b/R=0.25$ *Таблица 3*

λ	10.0	5.0	3.0	2.0	1.0	0.5	0.333	0.2	0.1
Φ/Φ_0	1.000	1.000	1.000	1.001	1.006	1.011	1.012	1.013	1.014
Φ/Φ_1						0.971	0.002	0.011	1.013
Φ/Φ_4						0.932	0.992	1.010	1.013
Φ/Φ_7								0.865	0.976
Φ/Φ_2	0.980	0.926	0.821				0.830	0.938	0.993
Φ/Φ_6	0.961	0.858						0.869	0.974
Φ/Φ_3	0.999	0.999	0.990	0.962					
Φ/Φ_5	0.999	0.997	0.982	0.923					
Φ/Φ_8	0.961	0.855							

$b/R = 0.5$ *Таблица 4*

λ	10.0	5.0	3.0	2.0	1.0	0.5	0.333	0.2	0.1
Φ/Φ_0	1.000	1.000	1.001	1.005	1.019	1.040	1.048	1.052	1.053
Φ/Φ_1					0.823	1.003	1.038	1.050	1.052
Φ/Φ_4						0.967	1.028	1.049	1.052
Φ/Φ_7								0.900	1.013
Φ/Φ_2	0.980	0.926	0.828				0.866	0.974	1.032
Φ/Φ_6	0.961	0.858						0.903	1.012
Φ/Φ_3	0.999	0.999	0.992	0.969	0.823				
Φ/Φ_5	0.999	0.982	0.983	0.935					
Φ/Φ_8	0.961	0.856							

Уравнение (2.28) применимо для расчета существенно длинных оболочек с отношением сторон $b/a < 0.2$, а уравнение (2.31) — для расчета существенно коротких оболочек с отношением сторон $b/a > 5$.

Здесь следует отметить, что изменение пологости оболочки в пределах $0 \leqslant b/R \leqslant 0.5$ незначительно влияет на пределы применимости рассмотренных гипотез и тем самым на пределы применимости полученных приближенных уравнений теории изотропных цилиндрических оболочек.

4. Выводы, сделанные на базе сравнения искомых функций Φ и Φ_i при $h/R = {}^1/_{25}$ и при определенно заданной нагрузке (3.1), сохраняются также и при сравнении искомых расчетных величин в случае различных h/R и при существенно различных внешних нагрузках.

Для доказательства справедливости вышесказанного рассмотрим решение следующих двух задач.

I. Изотропная круговая цилиндрическая оболочка $(a \times b)$ свободно оперта по всему контуру и несет нормально приложенную равномерно распределенную нагрузку с интенсивностью q.

II. Та же оболочка несет сосредоточенную силу P, приложенную в центре оболочки $(\alpha = {}^1/_2\, a,\ \beta = {}^1/_2\, b)$.

Эти задачи решаем одновременно при помощи уравнений (2.3) и (3.2), с учетом коэффициента Пуассона $(\sigma = 0{,}3)$ [3, 9, 10, 13].

Решая задачу при помощи двойных тригонометрических рядов [3, 10, 14], для нормального перемещения центра оболочки при равномерно распределенной нагрузке q, получим

$$w_q{}^0 = Б_q \sum_m \sum_n \frac{(m^2\lambda^2 + n^2)^2 \sin({}^1/_2\, m\pi) \sin({}^1/_2\, n\pi)}{mn\,[(m^2\lambda^2 + n^2)^4 + Cm^4]}$$

$$w_q = Б_q \sum_m \sum_n \frac{(m^2\lambda^2 + n^2)^2 \sin({}^1/_2\, m\pi) \sin({}^1/_2\, n\pi)}{mn\,\{(m^2\lambda^2 + n^2)^4 + B_1\lambda^4 m^4 - 2B_2 n^6 - B_2\lambda^2 m^2 n^2 [(7+\sigma)n^2 + (6+\sigma-\sigma^2)\lambda^2 m^2]\}} \tag{4.1}$$

$$Б_q = \frac{192\,(1-\sigma^2)\,b^4\,q}{\pi^6 E h^3}, \quad B_1 = \frac{12\,(1-\sigma^2)\,b^4}{\pi^4 R^2 h^2}, \quad B_2 = \frac{b^2}{\pi^2 R^2}, \quad \lambda = \frac{b}{a} \tag{4.2}$$

Для нормального перемещения центра оболочки, при сосредоточенной в центре оболочки силе P, имеем

$$w_p{}^0 = Б_p \sum_m \sum_n \frac{(m^2\lambda^2 + n^2)^2 \sin^2({}^1/_2\, m\pi) \sin^2({}^1/_2\, n\pi)}{(m^2\lambda^2 + n^2)^4 + Cm^4} \tag{4.3}$$

$$w_p = Б_p \sum_m \sum_n \frac{(m^2\lambda^2 + n^2)^2 \sin^2({}^1/_2\, m\pi) \sin^2({}^1/_2\, n\pi)}{(m^2\lambda^2 + n^2)^4 + B_1\lambda^4 m^4 - 2B_2 n^6 - b_2\lambda^2 m^2 n^2 [(7+\sigma)n^2 + (6+\sigma-\sigma^2)\lambda^2 m^2 I} \tag{4.4}$$

В этих формулах

$$Б_p = \frac{48\,(1-\sigma^2)\,b^2\,P}{\pi^4 E h^3}\,\lambda \tag{4.5}$$

Результаты сравнения значений $w_p / w_p{}^0$ с $w_q / w_q{}^0$ помещены в табл. 5 и 6. Рассматривая табл. 5 и 6, замечаем, что существенное изменение относительной толщины оболочки, а также резкое изменение характера внешней нагрузки незначительно влияют на рассмотренные отношения w/w_0. Далее, рассматривая табл. 3, 4, 5 и 6, замечаем, что сравнение искомых функций Φ и Φ_0 дает почти такие же результаты, что и сравнение искомых расчетных величин w и w_0.

Таким образом, мы заключаем, что установленные выше пределы применимости рассмотренных гипотез и соответствующих приближенных уравнений справедливы для весьма широкого класса пологих изотропных цилиндрических оболочек.

$b/R = 0.25$ *Таблица 5*

$\frac{h}{R}$	$\frac{1}{25}$			$\frac{1}{50}$			$\frac{1}{100}$		
λ	1.0	0.5	0.333	1.0	0.5	0.333	1.0	0.5	0.333
w_p/w_p°	1.006	1.009	1.008	1.005	1.009	1.008	1.004	1.008	1.008
w_q/w_q°	1.007	1.010	1.008	1.005	1.011	1.007	1.006	1.009	1.008

$b/R = 0.5$ *Таблица 6*

$\frac{h}{R}$	$\frac{1}{25}$			$\frac{1}{50}$			$\frac{1}{100}$		
λ	1.0	0.5	0.333	1.0	0.5	0.333	1.0	0.5	0.333
w_p/w_p°	1.017	1.033	1.032	1.009	1.023	1.027	1.003	1.009	1.017
w_q/w_q°	1.020	1.145	1.046	1.015	1.032	1.050	1.013	1.052	1.016

Здесь мы попутно отметим, что результаты, помещенные в таблицах, наглядно показывают, что предел применимости технической теории пологих цилиндрических оболочек (уравнение (2.3)) уменьшается с увеличением подъемистости оболочки, однако даже при $b/R = 0{,}5$ эта теория применима в широком диапазоне изменения λ (от 10 до 0.1).

Поступила 27 I 1954

Институт сооружений
Академии наук Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Строительная механика оболочек. Госстройиздат, 1936.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
4. Власов В. З. Новый метод расчета тонкостенных призматических перекрытий и оболочек. Госстройиздат, 1933.
5. Амбарцумян С. А. Длинные цилиндрические оболочки двоякой кривизны. Изв. АН Арм. ССР (ФМЕТ науки), № 5, 1953.
6. Амбарцумян С. А. Некоторые вопросы теории анизотропных оболочек. Изв. АН Арм. ССР (ФМЕТ науки), № 9, 1947.
7. Амбарцумян С. А. Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев. Изв. АН Арм. ССР (ФМЕТ науки), № 5, 1951.
8. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1947.
9. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
10. Хачатурян Т. Т. Пологие цилиндрические оболочки. Сообщения Института математики и механики АН Арм. ССР, № 4, 1949.
11. Гольденвейзер А. Л. О приближенных методах расчета тонких оболочек нулевой гауссовой кривизны, ПММ, т. XI, вып. 4, 1947.
12. Амбарцумян А. С. Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. Изв. АН Арм. ССР (ФМЕТ науки), № 6, 1952.
13. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.
4. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. Гостехиздат, 1949.