

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА ПО ПОВЕРХНОСТЯМ

А. А. И л ь ю ш и н

(Москва)

В работе даны математическое описание и расчет пластического течения (конечных деформаций) тел, имеющих форму сравнительно тонкостенных оболочек и подвергающихся одному из видов обработки давлением. При этом обрабатываемый материал вынужден деформироваться в соответствии с определенными движениями рабочих органов (жестких, практически недеформируемых поверхностей) машины, т. е. течь по жестким поверхностям или между поверхностями.

Существенные трудности при постановке этой задачи возникают при выборе основных кинематических гипотез, а также гипотез относительно контактного трения на жестких поверхностях. Закон Кулона не может быть принят для всей области контакта, так как следствием его является чрезмерно быстрое, экспоненциальное возрастание контактного давления вглубь от границы начала контакта и потому весьма большие значения контактного касательного напряжения, которое на самом деле не может быть больше предела текучести сжимаемого вещества при чистом сдвиге. Для устранения этого противоречия в теории течения на поверхностях принимается закон, вытекающий из известной работы Л. Прандтля^[1] по сжатию пластической массы между шероховатыми плитами и означающий, что вдали от края контакта касательное контактное напряжение в точности равно пределу текучести на сдвиг. Однако эта гипотеза не была еще достаточно обследована и казалась противоречащей другим гипотезам теории.

1. Некоторые следствия работы Л. Прандтля. Между жесткими шероховатыми сближающимися по оси z плитами без смазки сжимается пластическая масса, вынужденная течь в плоскости xz . Расстояние $h(t)$ между плитами весьма мало сравнительно с длиной $2L$, определяющей размер области, занятой массой, в направлении оси x (фиг. 1).

Начало координат O возьмем в области разветвления течения массы и будем рассматривать сечения x , достаточно удаленные от O и края $\pm L$:

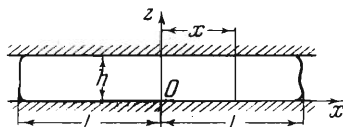
$$\frac{|x|}{h} \gg 1, \quad \frac{L - |x|}{h} \gg 1 \quad (1.1)$$

В этих сечениях отличны от нуля напряжения X_x , Z_z , X_z и $Y_y = \frac{1}{2} (X_x + Z_z)$. Интенсивность напряжений и условие текучести (для идеально пластического вещества) выражаются соответственно формулами

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\frac{X_x - Z_z}{2}\right)^2 + X_z^2}, \quad \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} = \tau_s = \text{const} \quad (1.2)$$

Пренебрегая силами инерции, для определения напряжений получаем как бы статически определимую задачу

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial x} = 0, \quad \left(\frac{Z_z - X_x}{2}\right)^2 + X_z^2 = \tau_s^2 \quad (1.3)$$



Фиг. 1

На самом деле задача не является статически определимой, поскольку основное граничное условие является кинематическим и нет возможности преобразовать его в статическое: заданы скорости сближения плит

$$z = \frac{h(t)}{2}, \quad w = \frac{1}{2} \frac{dh}{dt}; \quad z = -\frac{h(t)}{2}, \quad w = -\frac{1}{2} \frac{dh}{dt} \quad (1.4)$$

Следовательно, кроме уравнений (1.3), для решения задачи необходимо рассматривать еще условие несжимаемости массы

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

и соотношение

$$\frac{X_x - Z_z}{2X_z} = \frac{\partial u / \partial x - \partial w / \partial z}{\partial u / \partial z + \partial w / \partial x} \quad (1.6)$$

Необходимо также рассмотреть второе граничное условие на поверхностях контакта $z = \pm \frac{1}{2} h$, которое должно определить закон трения и граничные условия на свободных поверхностях $x = \pm L$.

Л. Прандтль, исходя из (1.3), выдвигает следующий постулат: «...надо ожидать, что при пластическом течении поверхности давления будут являться поверхностями скольжения», и далее пишет: «То напряженное состояние, которое асимптотически осуществляется на достаточно большом расстоянии от свободного края, доступно для расчета» [1], после чего находит известное решение системы (1.3), обладающее тем свойством, что $X_x - Z_z$ и X_z зависят только от координаты z .

Из (1.3) имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (X_x - Z_z) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) X_z = 0 \quad (1.7)$$

Поэтому X_z — линейная функция z , и следовательно,

$$X_z = -\tau_s \frac{2z}{h}, \quad X_x - Z_z = 2\tau_s \sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}}$$

Таким образом, согласно (1.3), решение Прандтля принимает вид

$$X_x = \tau_s \left(\frac{2x}{h} + 2\sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}} - C \right), \quad Z_z = \tau_s \left(\frac{2x}{h} - C \right), \quad X_z = -\tau_s \frac{2z}{h} \quad (1.8)$$

причем $C = 2L/h$ с точностью до величин порядка единицы.

Надаи рассматривает u , w в (1.5), (1.6), как перемещения точек массы и дает для них выражения, соответствующие решению Прандтля (1.8),

$$u = -w_0 \left(\frac{2x}{h} + 2\sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}} - C_1 \right), \quad w = w_0 \frac{2z}{h} \quad (1.9)$$

Отсюда он заключает, что точки, лежащие до деформации на вертикали ($x = \text{const}$, $y = 0$), после деформации располагаются на полуэллипсе и деформация сдвига обращается в ∞ при $z = \pm \frac{1}{2} h$.

Решение Прандтля (1.8) справедливо для малых и конечных деформаций. Кажущееся ограничение решения Надаи состоит в том, что урав-

нения (1.5), (1.6) в смысле Надаи справедливы лишь для весьма малых деформаций. Однако это ограничение отпадает, если u , w рассматривать как скорости течения, а x , y не как лагранжевы, а как эйлеровы координаты; решение (1.9) при этом сохраняется и, согласно (1.4), $w_0 = \frac{1}{2} dh/dt$.

Переходя на основании (1.9) к лагранжевым координатам $dx/dt = u$, $dz/dt = w$ и интегрируя уравнения

$$\frac{dx}{dh} = -\frac{x}{h} - \sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}} + C_2(h), \quad \frac{dz}{dh} = \frac{z}{h}$$

для совокупности точек, до начала течения лежавших на прямой $x_0 = \text{const}$, получим вновь уравнение эллипса

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad \left(\xi = (x)_z - (x)_z = \frac{1}{2} h, \quad a = \frac{h_0^2 - h^2}{h}, \quad b = \frac{h}{2} \right) \quad (1.10)$$

и убеждаемся, что первоначально вертикальные «ризки» в процессе течения превращаются в полуокружности и при еще больших деформациях эллипсы сильно вытягиваются в направлении оси x . Однако при фиксированном h (т. е. в определенный момент времени t) форма ризок не зависит от x_0 , т. е. все ризки в области (1.1) деформируются одинаково.

Весьма важен вопрос единственности решения задачи о сжатии массы между плитами в области (1.1). Можно утверждать, что решение Прандтля — Надаи (1.8), (1.9) в области (1.1) является единственным, имеющим физический смысл решением уравнений (1.3), (1.5), (1.6) при условии (1.4) с точностью до преобразования $h \rightarrow \alpha h$, где α — постоянное число, большее или равное 1. Мы считаем, что решение имеет физический смысл, если при $L \rightarrow \infty$ в области (1.1) $x \rightarrow \infty$ не является существенно особой точкой функций, имеющих физический смысл. Девiatorные напряжения X_z , $X_x - Z_z$ и скорость w , согласно (1.3), (1.4), при фиксированном z есть функции, ограниченные по абсолютной величине, и потому при $x \rightarrow \infty$ принимают конечные постоянные значения; следовательно, это функции только z , и решение Прандтля — Надаи в области (1.1) единственно.

Наиболее важным следствием этого решения является наличие проскальзывания пластической массы по поверхности контакта ($z = \pm \frac{1}{2} h$) и постоянство касательного напряжения. Постановка задачи с требованием полного сцепления вещества массы с плитой и непрерывности скорости u по z вблизи $z = \pm \frac{1}{2} h$ в области (1.1) лишена смысла, так как она противоречит уравнениям (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6). Как бы ни была шероховата плита, скольжение происходит в самом веществе массы. Учитывая наличие высокого давления, такое проскальзывание может и не приводить к видимому разрушению («холодная сварка»).

Невозможность условия $u = 0$ при $z = \pm \frac{1}{2} h$ в (1.1) при напряженном состоянии Прандтля (1.8) легко проверить еще и следующим образом: введем функцию тока $\Psi(x, y)$ и, рассматривая окрестность линии $z = \pm \frac{1}{2} h$, положим $\zeta = 2z/h$, $\xi = 2x/h$. Из (1.6) и (1.8) получаем дифференциальное уравнение

$$\zeta^{1/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \zeta} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \right) - \sqrt{2} (1 - \zeta) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta \partial \xi} = 0 \quad (1.11)$$

с особой точкой при $\zeta = 0$. В окрестности $\zeta = 0$ решение представимо в виде

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{0n} \zeta^n + \zeta^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{1n} \zeta^n \quad (1.12)$$

При этом

$$\Psi_{10} \neq 0, \quad \Psi'_{00}(\xi) = -\frac{h}{4} \frac{dh}{dt}, \quad \Psi''_{00} = 0, \quad \alpha > 0$$

Внося (1.12) в (1.11), находим

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \Psi'_{01}(\xi) = \frac{3}{4\sqrt{2}} \Psi_{10} \neq 0$$

Поскольку

$$u = -\frac{2}{h} [\Psi_{01}(\xi) + 2\sqrt{2}\Psi'_{01}(\xi)\zeta^{\frac{1}{2}} + \dots]$$

то $u \neq 0$ при $\zeta \rightarrow 0$. Из сказанного выше получаем такие следствия.

1. Девиаторные компоненты напряжений в области (1.1) по отношению к среднему гидростатическому напряжению суть малые порядка $\frac{1}{2} h/L$ сравнительно с 1.

2. Среднее гидростатическое напряжение с той же точностью постоянно по z .

3. Контактное напряжение трения равно пределу текучести на сдвиг, а скорость скольжения отлична от нуля.

4. Среднее по толщине значение полуразности нормальных напряжений близко к пределу текучести на сдвиг

$$\left(\frac{X_x - Z_z}{2} \right)_{\text{cp}} = \frac{\pi}{4} \tau_s$$

5. Скорость течения пластической массы в направлении оси x в области (1.1) практически не зависит от z . Разность осевой ($z = 0$) и средней по z скоростей суть малая порядка $h/4L$ от средней скорости, причем эта разность наблюдается за счет падения скорости в тонких слоях, прилегающих к контактными поверхностям.

6. Скорости деформаций и их интенсивность не зависят от x

$$\varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{8}{h} \frac{z/h}{\sqrt{1-4z^2/h^2}}, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \left| \frac{dh}{dt} \right| \frac{1}{\sqrt{1-4z^2/h^2}}$$

Средние значения скоростей деформаций по толщине

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = -\bar{\varepsilon}_{zz} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}, \quad \bar{\varepsilon}_{xz} = 0$$

имеют интенсивность

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \left(\frac{dh}{dt} \right)$$

Следовательно, средние значения отношений скоростей деформаций к их интенсивности пропорциональны с постоянным множителем отношениям средних скоростей деформаций к их интенсивности

$$\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_i} \right)_{\text{cp}} = \frac{\pi}{4} \frac{\bar{\varepsilon}_{xx}}{\bar{\varepsilon}_i}, \quad \left(\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_i} \right)_{\text{cp}} = \frac{\pi}{4} \frac{\bar{\varepsilon}_{zz}}{\bar{\varepsilon}_i}, \quad \left(\frac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_i} \right)_{\text{cp}} = \frac{\pi}{4} \frac{\bar{\varepsilon}_{xz}}{\bar{\varepsilon}_i} = 0$$

§ 2. Основные гипотезы и уравнения теории течения пластической массы на поверхностях. Пусть неизменная во времени поверхность совершает заданное поступательное и вращательное движение. В осях координат x, y, z , совершающих такое же движение, уравнение этой поверхности не будет содержать времени, и такие оси будем называть жестко связанными с поверхностью. Тело инструмента, ограниченного этой поверхностью, и, в частности, его точки, выходящие на поверхность, могут двигаться относительно поверхности. Примером является вращающееся относительно своей оси тело вращения. Движение физических точек границы тела инструмента относительно неподвижного геометрического образа — поверхности

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2.1)$$

будем называть внутренним и считать известным.

По нормали к поверхности (2.1) отложим линейный отрезок h , длина которого мала сравнительно с другими ее размерами (радиусами кривизны). Пусть отрезок $h(x, y, z, t)$ задан как функция координат точек поверхности и времени. Тогда он определяет вторую поверхность, имеющую вполне определенное движение относительно первой. Будем считать, что это вторая поверхность также ограничивает тело второго рабочего органа инструмента и внутреннее движение физических точек его также известно, а значит, оно известно и относительно первой поверхности.

Криволинейные координаты точек поверхности (2.1) вместе с координатой z , отсчитываемой по нормали к (2.1), определяют неподвижное пространство между поверхностями, в котором происходит течение пластического вещества и движение физических поверхностей инструмента. Следуя Эйлеру, движение массы будем изучать, не следя за каждой физической ее точкой, а наблюдая, что происходит с различными физическими точками, проходящими через фиксированную точку пространства. Отрезок h при этом представляет толщину слоя пластической массы.

Если второй рабочий орган инструмента отсутствует, то пластическое вещество будет течь по поверхности (2.1) и функции h определит толщину слоя деформированной массы. Если отсутствует также и основной рабочий орган, то (2.1) будет определять форму внутренней поверхности свободно текущей в пространстве массы и $h(x, y, z, t)$ — толщину слоя.

В дальнейшем принимаем следующие гипотезы:

а) Проекция на касательную к (2.1) плоскость скоростей физических частиц пластического вещества, расположенных на общей нормали к поверхности (2.1), мало отличаются между собой и могут быть заменены средней по толщине слоя скоростью;

б) Скорости деформации частиц, расположенных на общей нормали к (2.1), в направлении этой нормали мало отличаются между собой и равны средней скорости деформации толщины слоя; средние по толщине значения отношений скоростей деформаций к их интенсивности с точностью до множителя, близкого к единице, равны отношению средних по толщине скоростей деформаций к их интенсивности.

Эти общие кинематические гипотезы вытекают из результатов § 1 и определяют все основные упрощения общей теории пластического течения, которые возможны в теории течения на поверхностях. Следующие гипотезы относятся к закону трения на материальных поверхностях.

в) При сухом трении и наличии относительного скольжения пластической массы по физической поверхности инструмента касательное напряжение трения определяется законом Кулона, пока оно меньше предела текучести на сдвиг или равно пределу текучести пластической массы на сдвиг; направление этого напряжения противоположно направлению относительной скорости скольжения массы.

Эта гипотеза основана на законе Кулона и результатах § 1.

г) При наличии смазки напряжение трения является заданной (известной из опыта) функцией относительной скорости скольжения массы и нормального давления; направление этого напряжения определяется, как и в случае в).

д) Если нормальное давление на контактной поверхности отсутствует, то касательное контактное напряжение отсутствует или пренебрежимо мало.

Переходя к анализу течения пластической массы, рассмотрим сначала геометрические и кинематические соотношения. Если уравнение (2.1) записать в векторной параметрической форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta) \quad (2.2)$$

причем α, β выбрать так, чтобы векторы $\partial \mathbf{r} / \partial \alpha, \partial \mathbf{r} / \partial \beta$ были ортогональны, то α и β будут ортогональными криволинейными координатами поверхности (2.1). Первая квадратичная форма (квадрат дифференциала дуги) поверхности будет

$$(d\mathbf{r})^2 = ds_1^2 + ds_2^2, \quad d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} d\beta, \quad ds_1 = A d\alpha, \quad ds_2 = B d\beta$$

где ds_1, ds_2 — дифференциалы дуг поверхности, взятых по криволинейным координатам, $A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta)$ — коэффициенты первой квадратичной формы. Если, кроме A и B , задать еще главные радиусы кривизны поверхности R_1, R_2 , соответственно для линий ds_1 и ds_2 , т. е. считать α, β линиями кривизны, то поверхность (2.1) этим вполне определяется с точностью до ее переносного движения. Величины A, B, R_1, R_2 выражаются через уравнение поверхности в форме (2.2) по известным формулам теории поверхностей. Поскольку ось z мы направляем по нормали к поверхности (2.2) внутрь области пластического течения, то положительным является тот радиус кривизны, для которого центр кривизны лежит на отрицательном направлении оси z .

Направление оси z определяется единичным вектором нормали к поверхности

$$\mathbf{n} = \frac{1}{AB} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}$$

Единичные векторы осей α и β даются формулами

$$\mathbf{i} = \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}$$

Коэффициенты второй дифференциальной формы поверхности (2.2)

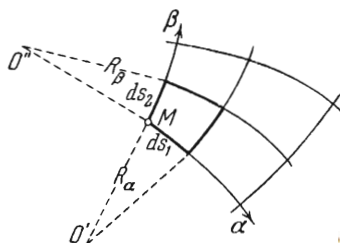
$$d^2\mathbf{r} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\alpha^2} d\alpha^2 + 2 \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\alpha\partial\beta} d\alpha d\beta + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\beta^2} d\beta^2$$

как и первой

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta} d\beta$$

в рассматриваемом случае можно выразить через единичные векторы

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha} &= A\mathbf{i}, & \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta} &= B\mathbf{j} \\ \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\alpha^2} &= \frac{\partial A}{\partial\alpha} \mathbf{i} - \frac{A}{B} \frac{\partial A}{\partial\beta} \mathbf{j} - \frac{A^2}{R_1} \mathbf{n} \\ \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\beta^2} &= \frac{\partial B}{\partial\beta} \mathbf{j} - \frac{B}{A} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \mathbf{i} - \frac{B^2}{R_2} \mathbf{n} \\ \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\alpha\partial\beta} &= \frac{\partial A}{\partial\beta} \mathbf{i} + \frac{\partial B}{\partial\alpha} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.2')$$



Фиг. 2

В тех случаях, когда оба материальных тела инструмента с поверхностями (2.2), (2.3) отсутствуют, формы этих поверхностей, т. е. коэффициенты первой квадратичной формы A , B и радиусы R_1 , R_2 , а также h , будут неизвестными функциями. Однако первые четыре из них должны удовлетворять уравнениям Гаусса-Кодацци

$$\begin{aligned} A \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{1}{R_1} \right) + \frac{\partial A}{\partial\beta} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) &= 0, & B \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{1}{R_2} \right) + \frac{\partial B}{\partial\alpha} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) &= 0 \\ \frac{AB}{R_1 R_2} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial\beta} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2'')$$

Поскольку толщина слоя является известной функцией координат и времени, то уравнение второй поверхности, ограничивающей слой, будет

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}(\alpha, \beta) + h(\alpha, \beta, t) \mathbf{n} \quad (2.3)$$

Считая обе поверхности (2.2) и (2.3) достаточно гладкими и h — малым, получим следующее выражение для единичного вектора нормали к поверхности (2.3) в проекциях на основной трехгранник (\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{n})

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{n} \\ l &= -\frac{\partial h}{A\partial\alpha}, & m &= -\frac{\partial h}{B\partial\beta}, & n &= 1 - \frac{1}{2}(l^2 + m^2) \approx 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рассмотрим произвольную точку (α, β) на поверхности (2.2) и бесконечно малую ее окрестность. Проведем в этой точке касательную плоскость к поверхности и спроектируем на нее окрестность поверхности с сеткой криволинейных координат. С точностью до малых высшего порядка кривизны линий поверхности в проекциях на касательную плоскость будут равны кривизнам проекций тех же линий на касательную плоскость.

Из фиг. 2 видно, что радиусы кривизны линий α и β удовлетворяют соотношениям

$$\frac{ds_1}{R_\alpha} = \frac{\partial(ds_1)}{\partial\beta} \frac{d\beta}{ds_2} \quad \frac{ds_2}{R_\beta} = \frac{\partial(ds_2)}{\partial\alpha} \frac{d\alpha}{ds_1}$$

Отсюда находим радиусы кривизны линий α , β в касательной плоскости

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \frac{1}{R_\beta} = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad (2.5)$$

Таким образом, нам известны теперь нормальные R_1 , R_2 и касательные R_α , R_β радиусы кривизны линий на поверхности (2.2); координаты z , отсчитываемые внутрь массы от этой поверхности, являются прямолинейными; вторая поверхность (2.3) задана толщиной слоя h и направлением ее нормали (2.4). Значит геометрия пространства, в котором происходит течение, с необходимой нам точностью вполне определена.

Среднее по толщине h значение скоростей частиц пластической массы, лежащих на общей нормали \mathbf{n} , в проекции на касательную плоскость в рассматриваемой фиксированной точке (α, β) обозначим вектором

$$\mathbf{w} = \mathbf{i}u(\alpha, \beta, t) + \mathbf{j}v(\alpha, \beta, t) \quad (2.6)$$

так что u, v суть компоненты средней скорости массы по осям α, β .

Вектор скорости внутреннего движения физических точек первого тела относительно его поверхности (относительно координат α, β) обозначим

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{i}u_1(\alpha, \beta, t) + \mathbf{j}v_1(\alpha, \beta, t) \quad (2.7)$$

Проекцию вектора скорости внутреннего движения физических точек второго тела на касательную плоскость к поверхности (2.2) обозначим

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{i}u_2(\alpha, \beta, t) + \mathbf{j}v_2(\alpha, \beta, t) \quad (2.8)$$

Скорость скольжения пластического вещества относительно физической поверхности первого тела будет $\mathbf{w} - \mathbf{w}_1$, а ее направление относительно осей α, β дается единичным вектором $(\mathbf{w} - \mathbf{w}_1) / (|\mathbf{w} - \mathbf{w}_1|)$. Обозначая $|\mathbf{w} - \mathbf{w}_1| = \Delta w_1$ и направляющие косинусы относительной скорости $\mathbf{w} - \mathbf{w}_1$ в осях α, β через l, m , имеем

$$\begin{aligned} \Delta w_1 &= + \sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2} \\ l_1 &= \cos(\Delta w_1 \alpha) = \frac{u - u_1}{\Delta w_1}, \quad m_1 = \cos(\Delta w_1 \beta) = \frac{v - v_1}{\Delta w_1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для скольжения относительно второго тела получим аналогично

$$\begin{aligned} \Delta w_2 &= + \sqrt{(u - u_2)^2 + (v - v_2)^2} \\ l_2 &= \cos(\Delta w_2, \alpha) = \frac{u - u_2}{\Delta w_2}, \quad m_2 = \cos(\Delta w_2, \beta) = \frac{v - v_2}{\Delta w_2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Найдем теперь скорости деформации пластического вещества. В момент времени t рассмотрим физическое волокно длиной ds_1 (фиг. 2); через dt оно переместится вдоль α на $u dt$, причем получит удлинение $[(\partial u / \partial s_1) ds_1] dt$; кроме того, переместится вдоль линии β на расстояние $v dt$ и получит удлинение

$$(R_\alpha + v dt) \frac{ds_1}{R_\alpha} - ds_1 = \frac{v ds_1}{R_\alpha} dt$$

Таким образом, можно определить полную скорость $\epsilon_{\alpha\alpha}$ относительного удлинения в направлении линии α , а также и скорость относительно удлинения $\epsilon_{\beta\beta}$

$$\epsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{v}{R_\alpha}, \quad \epsilon_{\beta\beta} = \frac{\partial v}{\partial s_2} + \frac{u}{R_\beta}$$

Волокно ds_1 за dt повернется против часовой стрелки, во-первых, за счет разности скоростей v (в направлении β) на его концах на угол $[(\partial v / \partial s_1) ds_1 dt] / ds_1$ и, во-вторых, в обратную сторону за счет переноса точки вдоль линии β , на угол $-v dt / R_\beta$, т. е. в сумме на угол

$$\frac{\partial v}{\partial s_1} dt - \frac{v}{R_\beta} dt$$

против часовой стрелки. Волокно ds_2 за это же время повернется по часовой стрелке на аналогичный угол

$$\frac{\partial u}{\partial s_2} dt - \frac{u}{R_\alpha} dt$$

Значит, скорость деформации сдвига будет

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial v}{\partial s_1} + \frac{\partial u}{\partial s_2} - \frac{v}{R_\beta} - \frac{u}{R_\alpha}$$

Переходя к криволинейным координатам и упрощая обозначения скоростей деформаций, получим

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\alpha} = \epsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, & \epsilon_{\beta\beta} = \epsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \\ \gamma_{\alpha\beta} = \epsilon_{12} &= \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Рассмотрим теперь волокно длины h , нормальное к поверхности (2.2) в точке (α, β) в момент времени t . Через dt оно, во-первых, удлинится на $(\partial h / \partial t) dt$ за счет удаления (или сближения) второй поверхности, во-вторых, на величину $(\partial h / \partial s_1) u dt$ за счет переноса $u dt$ и, в-третьих, на величину $(\partial h / \partial s_2) v dt$ за счет переноса вдоль линии β .

Относя сумму этих удлинений к длине в момент t и к интервалу времени dt , получим

$$\epsilon_{22} = \epsilon_3 = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u}{A} \frac{\partial h}{\partial \alpha} + \frac{v}{B} \frac{\partial h}{\partial \beta} \right) \quad (2.12)$$

Стоящее справа выражение представляет собой полную или субстанциальную производную по времени от логарифма h и обозначается еще

$$\epsilon_3 = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = \frac{d \ln h}{dt}$$

Условие несжимаемости вещества пластически деформируемой среды можно написать в виде

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \quad (2.13)$$

и пояснить следующим образом. Рассмотрим баланс втекающей и вытекающей за dt массы в объеме $ds_1 ds_2 h$.

Избыток массы, вытекающей в направлении линии α , и избыток в направлении β будут соответственно равны

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (u dt ds_2 h) d\alpha, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} (v dt ds_1 h) d\beta$$

Кроме того, сам объем увеличивается на $ds_1 ds_2 (\partial h / \partial t) dt$. Для несжимаемой массы, сплошь заполняющей объем, сумма этих величин должна равняться нулю, т. е. имеем

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} (hBu) + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} (hAv) = 0 \quad (2.14)$$

Легко видеть, что (2.13) и (2.14) тождественно совпадают.

Интенсивность скоростей деформаций при условии (2.13) равна

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{12}^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{12}^2} \quad (2.15)$$

Главные компоненты скорости деформации в касательной к поверхности (2.2) плоскости будут

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{1}{2} \left(-\varepsilon_3 + \sqrt{(2\varepsilon_3 + \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_{12}^2} \right) \\ \varepsilon'' &= \frac{1}{2} \left(-\varepsilon_3 - \sqrt{(2\varepsilon_3 + \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_{12}^2} \right) \end{aligned}$$

и главные скорости сдвигов в области течения массы имеют выражения

$$\gamma' = -\varepsilon' + \varepsilon_3, \quad \gamma'' = \varepsilon'' - \varepsilon_3, \quad \gamma''' = \varepsilon' - \varepsilon''$$

Какая-то из этих трех скоростей сдвигов будет максимальной по абсолютной величине и величина интенсивности скоростей деформации (2.15) может быть с достаточно хорошей точностью заменена максимальной скоростью сдвигов с некоторым постоянным числовым множителем. Это обстоятельство может сильно упрощать расчеты в тех случаях, когда главные оси скоростей деформаций заранее известны. Через главные скорости сдвигов ε_i записывается так:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\gamma'^2 + \gamma''^2 + \gamma'''^2}$$

Учитывая, что $\gamma' + \gamma'' + \gamma''' = 0$ и обозначая через γ_{\max} наибольшее (по модулю) из этих слагаемых, легко установить неравенство (стр. 29^[11])

$$\frac{2}{3} \geq \frac{\varepsilon_i}{|\gamma_{\max}|} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2.16)$$

Переходя к выражениям для напряжений, обозначим средние нормальные напряжения по толщине в направлении линий α и β соответственно σ_1 , σ_2 и касательное напряжение σ_{12} , принимая для них обычное в теории пластичности и упругости правило знаков. Растягивающее напряжение в направлении оси z обозначим $+\sigma_3$. Интенсивность средних по толщине напряжений обозначим σ_i :

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 + \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6\sigma_{12}^2} \quad (2.17)$$

Как и при анализе работы Прандтля, будем в основном исходить из уравнений пластичности типа Сен-Венана, а именно будем считать, что направляющие тензоры напряжений и скоростей деформаций совпадают [2]. Как и в теории вязко-пластического течения, будем считать, что интенсивность напряжений σ_i величина постоянная или, может быть, заданная функция интенсивности скоростей деформации ε_i .

Если же материал пластической массы обладает заметной способностью к упрочнению, то будем считать что σ_i зависит еще от величины $\lambda(\alpha, \beta, t)$, которую назовем степенью деформации. В общем случае, следовательно, имеем

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i, \lambda) = \delta \sigma_s(\varepsilon_i \lambda) \quad (2.18)$$

Поскольку мы рассматриваем здесь только процессы активной пластической деформации, причем в основном монотонные, за степень деформации естественно принять функцию, полная производная по времени от которой равна интенсивности скоростей деформаций, т. е. λ определить уравнением

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{u}{A} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} + \frac{v}{B} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = \varepsilon_i \quad (2.19)$$

В соответствии с гипотезой (б) начала этого параграфа имеем следующие выражения напряжений через скорости деформации и степень деформации

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma + \frac{2\delta}{3} \frac{\sigma_s}{\varepsilon_i} \varepsilon_1, & \sigma_3 &= \sigma + \frac{2\delta}{3} \frac{\sigma_s}{\varepsilon_i} \varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= \sigma + \frac{2\delta}{3} \frac{\sigma_s}{\varepsilon_i} \varepsilon_2, & \sigma_{12} &= \frac{\delta}{3} \frac{\sigma_s}{\varepsilon_i} \varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (2.20)$$

где σ — среднее напряжение, являющееся неизвестной функцией (α, β, t) , и δ — постоянный числовой множитель порядка единицы: если одно или оба тела, ограничивающие течение пластического вещества, отсутствуют то $\delta = 1$; в противном случае $1 \geq \delta \geq \frac{1}{4} \pi$.

Обозначим через p_1 и p_2 — нормальные давления на пластическое вещество со стороны первого и второго тел инструмента соответственно. Поскольку напряжения (2.20) постоянны по толщине, то для σ_3 можно принять следующее среднее значение

$$\sigma_3 = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2) \quad (2.21)$$

Обозначим, наконец, через T_1 , T_2 касательные контактные напряжения трения, действующие на слой пластического вещества; они направлены в стороны, противоположные относительным скоростям скольжения (2.9) и (2.10) и потому дают следующие составляющие по направлениям осей α и β соответственно

$$-\left(T_1 \frac{u - u_1}{\Delta w_1} + T_2 \frac{u - u_2}{\Delta w_2}\right) ds_1 ds_2, \quad -\left(T_1 \frac{v - v_1}{\Delta w_1} + T_2 \frac{v - v_2}{\Delta w_2}\right) ds_1 ds_2 \quad (2.22)$$

В соответствии с гипотезами (в), (г), (д) имеем

$$T_1 = \tau_s F\left(\frac{p_1}{\tau_s}, \Delta w_1, \mu_1\right), \quad T_2 = \tau_s F\left(\frac{p_2}{\tau_s}, \Delta w_2, \mu_2\right), \quad \tau_s \approx \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \quad (2.23)$$

Здесь τ_s — сопротивление пластического вещества на сдвиг, μ_1, μ_2 — коэффициент трения, F — известная из опыта функция.

Например, в области кулонова трения при $T_1, T_2 < \tau_s$ имеем $T_1 = \mu_1 p_1$, $T_2 = \mu_2 p_2$, в области прандтлевского скольжения $T_1 = T_2 = \tau_s$ и т. д.

Чтобы составить уравнения сохранения импульсов, действующих на массу $\rho h ds_1 ds_2$, в момент t находящуюся в объеме $h ds_1 ds_2$, необходимо учесть следующее. По направлениям векторов \mathbf{i}, \mathbf{j} все компоненты напряжений и внешних сил дают составляющие, кроме давления p_1 , направленного по нормали \mathbf{n} . Проекция T_1, T_2 даны формулами (2.22); проекция давления p_2 , согласно (2.4), будут

$$p_2 ds_1 ds_2 \frac{\partial h}{A \partial \alpha}, \quad p_2 ds_1 ds_2 \frac{\partial h}{B \partial \beta}$$

Проекция результирующих сил от напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$ в направлении \mathbf{i} равна

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\sigma_1 h ds_2) d\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} (\sigma_{12} h ds_1) d\beta - \sigma_2 h ds_1 \frac{ds_2}{R_\beta} + \sigma_{12} h ds_2 \frac{ds_1}{R_\alpha}$$

и аналогичное выражение получим в направлении \mathbf{j} .

В направлении z $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$ дают составляющую

$$- \left(\sigma_1 h ds_2 \frac{ds_1}{R_1} + \sigma_2 h ds_1 \frac{ds_2}{R_2} \right)$$

т. к. α, β суть главные направления на поверхности; T_2 дает составляющую

$$- \left(T_2 ds_1 ds_2 \frac{u - u_2}{\Delta w_2} \frac{\partial h}{A \partial \alpha} + T_2 ds_1 ds_2 \frac{v - v_2}{\Delta w_2} \frac{\partial h}{B \partial \beta} \right)$$

причем T_1 составляющей по z не дает; наконец, давления p_1, p_2 дают

$$+ (p_1 - p_2) ds_1 ds_2$$

Обозначая g_1, g_2, g_3 проекции вектора полного ускорения массы и ρ — ее плотность, получаем основные уравнения движения

$$\rho h g_1 = \frac{\partial (\sigma_1 h)}{A \partial \alpha} + \frac{\partial (\sigma_{12} h)}{B \partial \beta} + h \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + 2h \frac{\sigma_{12}}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \quad (2.24)$$

$$+ p_2 \frac{\partial h}{A \partial \alpha} - T_1 \frac{u - u_1}{\Delta w_1} - T_2 \frac{u - u_2}{\Delta w_2}$$

$$\rho h g_2 = \frac{\partial (\sigma_2 h)}{B \partial \beta} + \frac{\partial (\sigma_{12} h)}{A \partial \alpha} + h \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} +$$

$$+ 2h \frac{\sigma_{12}}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial h}{B \partial \beta} - T_1 \frac{v - v_1}{\Delta w_1} - T_2 \frac{v - v_2}{\Delta w_2}$$

$$\rho h g_3 = \frac{\sigma_1 h}{R_1} + \frac{\sigma_2 h}{R_2} + T_2 \left(\frac{u - u_2}{\Delta w_2} \frac{\partial h}{A \partial \alpha} + \frac{v - v_2}{\Delta w_2} \frac{\partial h}{B \partial \beta} \right) + p_2 - p_1$$

Заметим, что ускорения g_1, g_2 считаются положительными, если они направлены по положительным направлениям линий α, β (векторов \mathbf{i}, \mathbf{j}), а g_3 — положительным, если оно направлено в сторону, обратную поло-

жительному направлению оси z , т. е. от движущейся массы к первой поверхности; при $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ ускорение будет центростремительным.

С принятой нами степенью точности ускорения всех точек, лежащих на общей нормали к поверхности (2.2), следует считать одинаковыми, равными ускорению точки, лежащей на этой поверхности. Рассмотрим в момент времени t физическую точку вещества пластической массы, совпадающую с точкой (α, β) поверхности (2.2). За малое время она сместится вдоль линий α и β соответственно на

$$d\alpha = \frac{u dt}{A}, \quad d\beta = \frac{v dt}{B}$$

Вектор скорости точки будет

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dt} = \frac{u}{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} + \frac{v}{B} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \quad (2.25)$$

Отсюда вектор ускорения

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha^2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta^2} \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{B} \right) \quad (2.26)$$

причем в последние два члена входят полные производные

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{v}{B} \frac{\partial}{\partial \beta}$$

Учитывая введенные обозначения ускорений

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = g_1 \mathbf{i} + g_2 \mathbf{j} - g_3 \mathbf{n}$$

и пользуясь формулами (2.2), получим выражения ускорений:

$$\begin{aligned} g_1 &= A \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{u^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial \alpha} - \frac{v^2}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{2uv}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \\ g_2 &= B \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{v^2}{B^2} \frac{\partial B}{\partial \beta} - \frac{u^2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{2uv}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \\ g_3 &= \frac{u^2}{R_1} + \frac{v^2}{R_2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

причем первые две формулы несколько упрощаются

$$g_1 = \frac{du}{dt} + \frac{uv}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{v^2}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad g_2 = \frac{dv}{dt} + \frac{uv}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{u^2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad (2.28)$$

§ 3. Три основные задачи течения на поверхностях. *Первая основная задача* ставится так: оба рабочих органа инструмента даны, дано их движение, и значит, геометрические величины A, B, R_1, R_2 известны как функции α, β , толщина пластического слоя $h(\alpha, \beta, t)$ задана, скорости внутренних движений тел u_1, v_1, u_2, v_2 известны как функции α, β, t . Известны также пластические свойства вещества, т. е. функция $\sigma_s(\varepsilon_i, \lambda)$ (2.18) и закон трения на поверхностях (2.23), т. е. T_1, T_2 как функции $p_1, p_2, \Delta w_1, \Delta w_2$.

Искомые функции суть напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \sigma_3, \sigma$, давления p_1, p_2 , скорости u, v и степень деформации λ , т. е. 10 функций; скорости деформаций и их интенсивность выражаются через u, v , согласно (2.11), (2.12), (2.15) и потому их не будем включать в число неизвестных.

Одно уравнение несжимаемости (2.14), одно уравнение, определяющее степень деформации λ (2.19), четыре уравнения, выражающих $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}$ через σ, u, v, λ , одно соотношение между σ_3, p_1, p_2 (2.21) и три уравнения движения (2.24), где g_1, g_2, g_3 определяются формулами (2.27), составляют 10 уравнений, определяющих процесс течения, т. е. указанные 10 функций.

По краю $L(\alpha, \beta, t) = 0$, ограничивающему область деформации пластического вещества, в которой имеют место указанные выше уравнения, должны быть заданы нормальное и касательное напряжения

$$\sigma_1 l_L + \sigma_{12} m_L = \sigma_\alpha, \quad \sigma_{12} l_L + \sigma_2 m_L = \sigma_\beta \quad (3.1)$$

где l_L, m_L — направляющие косинусы нормали к контуру L , лежащей в касательной плоскости к поверхности (2.2), с линиями α и β соответственно; $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ — заданные на этом контуре внешние напряжения.

Вместо (3.1) могут быть заданы скорости

$$u = f_1(\alpha, \beta, t), \quad v = f_2(\alpha, \beta, t) \quad \text{на } L(\alpha, \beta, t) = 0 \quad (3.2)$$

или другие, смешанные условия.

Основное упрощение системы дифференциальных уравнений течения в большинстве практически важных случаев первой основной задачи вытекает из того, что давления p_1, p_2 должны быть порядка или больше σ_s

$$p_1, p_2 \gtrsim \sigma_s$$

и потому из третьего уравнения динамики (2.24) и (2.21) с ошибкой не более h/R имеем

$$p_1 = p_2 = -\sigma_3 = p \quad (3.3)$$

если только выполняется неравенство

$$\rho(u^2 + v^2) \ll \sigma_s$$

Кроме того, часто в первой задаче главные скорости удлинений $\varepsilon', \varepsilon''$ в плоскости (α, β) оказываются одного знака (например, материал растягивается так, что оба они положительны); тогда с достаточно хорошей степенью точности можно считать $\varepsilon_i = \delta_1 |\varepsilon_3|$, где δ_1 — постоянный множитель порядка единицы, и потому формулы (2.20) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma + 2\mu\varepsilon_1, & -p &= \sigma + 2\mu\varepsilon_3 & \left(\mu = \frac{\sigma_s}{3|\varepsilon_3|} \frac{\delta}{\delta_1} \right) \\ \sigma_2 &= \sigma + 2\mu\varepsilon_2, & \sigma_{12} &= \mu\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (3.4)$$

причем из (2.12) и (2.19) получаем уравнение для степени деформации λ (при $\varepsilon_3 < 0$):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\lambda + \delta_1 \ln h) + \frac{u}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\lambda + \delta_1 \ln h) + \frac{v}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (\lambda + \delta_1 \ln h) = 0$$

показывающее, что

$$\lambda = \delta_1 \ln \frac{h_0}{h} \quad (3.5)$$

где h_0 — начальная толщина слоя тех физических частиц, которые в момент t переместились в точку $(\alpha\beta)$. В ряде случаев формулы (3.4) и (3.5) позволяют полностью линеаризовать систему дифференциальных уравнений пластического течения, поскольку μ становится известной функцией координат и времени, т. е. может рассматриваться как коэффициент вязкости.

Наиболее сильное упрощение первой основной задачи получается в тех случаях, когда все линейные размеры области течения по линиям α, β оказываются значительно больше толщины слоя h . Пусть L — характерный размер области. Анализируя порядок величин слагаемых в правых частях уравнений (2.24), имеем по порядку величин соотношения

$$\begin{aligned} \rho h g_1 &\approx \frac{\sigma h}{L} + \sum_{n=1}^4 \frac{h s_{1n}}{L} + p \frac{h}{L} - T_1 - T_2 \\ \rho h g_2 &\approx \frac{\sigma h}{L} + \sum_{n=1}^4 \frac{h s_{2n}}{L} + p \frac{h}{L} - T_1 - T_2 \end{aligned}$$

где s_{1n}, s_{2n} — девиаторные составляющие напряжений типа $\sigma_1 - \sigma, \sigma_1 - \sigma_2, \sigma_{12}, \dots$, т. е. величины, по модулю ограниченные порядком не более σ_s . Напряжения трения T_1, T_2 в этом случае, согласно результатам § 1, будут порядка σ_s и могут быть приняты равными τ_s (2.23). Отсюда ясно, что с точностью h/L девиаторные слагаемые следует опустить, т. е. уравнения (2.24) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho g_1 &= -\frac{\partial p}{A \partial \alpha} - \frac{\tau_s}{h} \left(\frac{u - u_1}{\Delta w_1} + \frac{u - u_2}{\Delta w_2} \right) \\ \rho g_2 &= -\frac{\partial p}{B \partial \beta} - \frac{\tau_s}{h} \left(\frac{v - v_1}{\Delta w_1} + \frac{v - v_2}{\Delta w_2} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если $\rho(u^2 + v^2) \ll \sigma_s$, то силами инерции $\rho g_1, \rho g_2$ можно пренебречь; если, кроме того, внутренние движения тел инструментов относительно поверхности (2.2) одинаковы ($u_1 = u_2, v_1 = v_2$), то для определения давления p в области пластического течения получается уравнение

$$\frac{1}{A^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{\tau_s^2}{h^2} \quad (3.7)$$

а для определения скоростей течения — условие несжимаемости (2.14) и соотношение

$$\frac{u - u_1}{B} \frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{v - v_1}{A} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \quad (3.8)$$

Если на границе $L(\alpha, \beta, t)$ области течения никаких внешних сил не приложено, то давление p должно равняться σ_s , если же приложено «бужовое» давление $q_0(\alpha, \beta, t)$, то

$$L(\alpha, \beta, t) = 0, \quad p = q_0 + \sigma_s \quad (3.9)$$

При заданном σ_s это условие вполне определяет интеграл уравнения (3.7) внутри L , если только это односвязный контур; в случае многосвязного контура, т. е. когда хотя бы на поверхности одного из тел внутри области течения имеются «отверстия» заданной формы, на их границах также должны быть заданы величины q , через которые контурные значения p выражаются аналогично (3.9).

Вторая основная задача теории течения на поверхностях ставится так: поверхность (2.2) и внутреннее движение относительно нее первого тела инструмента заданы, второе же тело инструмента отсутствует, т. е. поверхность (2.3) является свободной поверхностью текущей массы.

Из третьего уравнения системы (2.24) и из (2.21) следует, что так как $p_2 = 0$, $T_2 = 0$, то $p_1 - p_2$ и σ_3 есть малые сравнительно с σ_s порядка h/R сравнительно с единицей, так как из (2.20) видно, что $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$ — порядка σ_s . Пренебрегая σ_3 сравнительно с σ_s , из (2.20) имеем:

$$\sigma_1 = \frac{4\delta}{3} \frac{\sigma_s}{\varepsilon_i} \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right), \quad \sigma_2 = \frac{4\delta}{3} \frac{\sigma_s}{\varepsilon_i} \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right), \quad \sigma_{12} = \frac{\delta}{3} \frac{\sigma_s}{\varepsilon_i} \varepsilon_{12} \quad (3.10)$$

Первые два уравнения (2.24), пренебрегая силами инерции, запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma_1 h)}{A \partial \alpha} + \frac{\partial(\sigma_{12} h)}{B \partial \beta} + h \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + 2h \frac{\sigma_{12}}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \mu p_1 \frac{u - u_1}{\Delta w_1} &= 0 \\ \frac{\partial(\sigma_2 h)}{B \partial \beta} + \frac{\partial(\sigma_{12} h)}{A \partial \alpha} + h \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + 2h \frac{\sigma_{12}}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \mu p_1 \frac{v - v_1}{\Delta w_1} &= 0 \quad (3.11) \\ \frac{\sigma_1 h}{R_1} + \frac{\sigma_2 h}{R_2} &= p_1 \end{aligned}$$

поскольку в этом случае можно принять закон трения Кулона (μ — коэффициент трения).

Учитывая еще условие несжимаемости (2.14) и уравнение для степени деформации λ (2.19), получаем полную систему 5 уравнений с 5 неизвестными u, v, p_1, h, λ , так как уравнения (3.11) на основании (3.10) можно считать выраженными через эти неизвестные.

На контуре $L(\alpha, \beta, t) = 0$, ограничивающем область течения массы, могут быть поставлены условия (3.1) или (3.2) или смешанные.

Дальнейшие упрощения системы уравнений второй основной задачи можно сделать в следующих направлениях: во-первых, часто задача сильно упрощается, если вместо отношения σ_s / ε_i в (3.10) взять на основании (2.16) τ_s / γ_{\max} с определенным числовым множителем.

Например, решение задачи при наличии осевой симметрии при этом удастся довести до конца [2].

Во-вторых, если процесс течения массы по поверхности происходит при наличии хорошей смазки, так что μ мало сравнительно с единицей, то, как легко видеть, последние слагаемые первых двух уравнений (3.11) можно отбросить, число неизвестных понижается на одну (p_1), которая находится из третьего уравнения системы (3.11), после того как остальные неизвестные будут найдены.

Третья основная задача теории течения на поверхностях состоит в определении динамических, кинематических и геометрических элементов пластической массы, в виде тонкой оболочки текущей в пространстве за счет сил, приложенных по краю $L(x, \beta, t) = 0$, который является известным. В области течения теперь оба рабочих тела инструмента отсутствуют и потому $p_1 = p_2 = T_1 = T_2 = 0$. Уравнения движения имеют вид (3.11) (при $p_1 = 0$) и напряжения через скорости выражаются формулами (3.10). Таким образом, считая, что $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$ уже выражены через u, v, λ , имеем три уравнения (3.11) и два уравнения (2.14), (2.19), содержащие четыре неизвестных u, v, h, λ и, кроме того, неизвестную форму поверхности (2.2) в пространстве. Решение задачи становится возможным, если к указанным пяти уравнениям присоединить уравнения Гаусса-Кодацци (2.2).

Возможные упрощения задач третьего типа в общем случае могут основываться только на замене отношения σ_s / ε_i на τ_s / γ_{\max} . Сравнительно просто могут быть формулированы в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений только осесимметричные задачи стационарного течения.

Ниже мы рассмотрим примеры решения первой основной задачи теории течения на поверхностях.

§ 4. Сжатие пластической массы между жесткими поверхностями; аналогия формы эпюры давлений с формой песчаной насыпи. Пусть пластическое вещество сжимается между двумя параллельными, сближающимися по нормали жесткими, шероховатыми плитами и в некоторый момент $t = 0$, принимаемый за начальный момент, ограничено заданным произвольным контуром в плане x, y . Оси координат показаны на фиг. 3. Начальная толщина h_0 — постоянна, скорость сближения плит dh/dt дана как функция времени.

Степень деформации λ , согласно (3.5), в данном случае является, следовательно, известной функцией времени

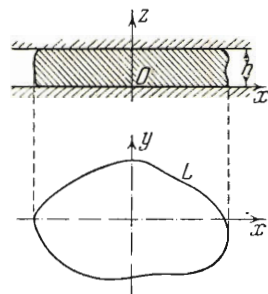
$$\lambda = \ln \frac{h_0}{h} \quad (4.1)$$

Будем считать, что на контуре $L(x, y, t) = 0$ боковая нагрузка отсутствует во все время процесса и потому вещество может свободно растекаться.

Координаты α, β в нашем случае совпадают с x, y , т. е.

$$\alpha = x, \quad \beta = y, \quad A = B = 1$$

$$R_1 = R_2 = R_\alpha = R_\beta = \infty$$



Фиг. 3

Скорости внутренних движений плит $w_1 = w_2 = 0$, так как плиты не перемещаются в плоскости x, y . Из (2.11) и (2.12) имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{d\lambda}{dt} \quad (4.2)$$

и, поскольку в этом случае можно принять $\varepsilon_1 = -\varepsilon_3$, и так как

$$\mu = \frac{\sigma_s}{3d\lambda/dt} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda}$$

то уравнения (3.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma + \frac{2}{3} \sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x}, & \sigma_2 &= \sigma + \frac{2}{3} \sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial v}{\partial y} \\ -p &= \sigma - \frac{2}{3} \sigma_s, & \sigma_{12} &= \frac{1}{3} \sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Условие несжимаемости (2.14) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt} \quad (4.4)$$

Из этих соотношений и уравнений (2.24), в которых мы не будем учитывать силы инерции, видно, что время t не является существенной переменной и при помощи преобразования

$$U = u \frac{dt}{d\lambda}, \quad V = v \frac{dt}{d\lambda}$$

может быть исключено. Значит, соотношения (4.3), по форме напоминающие аналогичные соотношения для вязкой жидкости, в новых переменных вполне с ними совпадут.

Введем функцию Ψ , удовлетворяя (4.4)

$$u = \frac{d\lambda}{dt} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{x}{2} \right), \quad v = -\frac{\partial \lambda}{dt} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{y}{2} \right) \quad (4.5)$$

Тогда вместо (4.3) получим

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -p + \sigma_s + \frac{2}{3} \sigma_s \Psi_{xy} \\ \sigma_2 &= -p + \sigma_s - \frac{2}{3} \sigma_s \Psi_{xy} \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{3} \sigma_s (\Psi_{yy} - \Psi_{xx}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Силы трения $T_1 = T_2 = T$ зависят от величины давления ($\tau_3 = -p$), причем

$$T = \mu p, \quad \text{если } \mu p \leq \tau_s; \quad T = \tau_s, \quad \text{если } \mu p \geq \tau_s \quad (4.7)$$

Уравнения (2.24) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} - \frac{2T}{h} \frac{u}{V \sqrt{u^2 + v^2}} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - \frac{2T}{h} \frac{v}{V \sqrt{u^2 + v^2}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

или после подстановки (4.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\sigma_s}{3} \nabla^2 \Psi_y - \frac{2T(p)}{h} \frac{\Psi_y + 1/2x}{\sqrt{(\Psi_y + 1/2x)^2 + (\Psi_x - 1/2y)^2}} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\sigma_s}{3} \Delta^2 \Psi_x + \frac{2T(p)}{h} \frac{\Psi_x - 1/2y}{\sqrt{(\Psi_y + 1/2x)^2 + (\Psi_x - 1/2y)^2}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Две неизвестные функции — давление p и функция Ψ определяются этими двумя уравнениями и граничными условиями на контуре L , который известен лишь в начальный момент времени ($t = 0, h = h_0$). Однако, поскольку время или толщина h или степень деформации λ входит в (4.5) лишь как параметр, например, $\sigma_s = \sigma_s(\lambda, d\lambda/dt)$, то, решая систему (4.9) при $t = 0$, когда контур L известен, найдем p, Ψ, u, v и потому будем знать контур L через малое время Δt . Повторяя последовательно аналогичные вычисления, найдем как угодно сильно деформированный контур и соответствующее распределение p, Ψ, u, v .

Если размер области течения в направлениях, по которым нет кинематических ограничений, весьма велик сравнительно с h , то, как уже указывалось, следует принять $T = \tau_s$, причем обычно $\tau_s = \sigma_s/\sqrt{3}$, и первые слагаемые в правых частях (4.9) оказываются малыми сравнительно со вторыми. Действительно, пусть R — характерный размер области в плане; из (4.4), (4.5)

$$\Psi \sim uR \frac{dt}{d\lambda} \sim vR \frac{dt}{d\lambda} \sim R^2$$

следовательно

$$\nabla^2 \Psi_y \sim \nabla^2 \Psi_x \sim \frac{1}{R}$$

и отношение вторых слагаемых (4.9) к первым будет порядка R/h . Это обстоятельство с указанной степенью точности позволяет систему (4.9) в первом приближении записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} = -\frac{2\tau_s}{h} \cos \theta \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = -\frac{2\tau_s}{h} \sin \theta \end{aligned} \quad (4.10)$$

где θ — угол наклона вектора скорости (u, v) с осью x .

Отсюда возникают уже указанные ранее (3.7), (3.8) уравнения

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2}, \quad \frac{u}{v} = \frac{\partial p}{\partial x} : \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.11)$$

Эти соотношения показывают, что модуль градиента давления p в каждый момент течения массы постоянен для всей области и изменяется лишь по t

$$|\text{grad } p| = \frac{2\tau_s}{h} = -\frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.12)$$

и что вектор скорости течения $w = ui + vj$ по направлению совпадает с вектором градиентом давления p (n — внешняя нормаль к линии уровня $p = \text{const}$).

В рассматриваемом приближении напряжения σ_1, σ_2 (4.6) одинаковы и равны

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -p + \sigma_s \quad (4.13)$$

а касательное напряжение $\tau_{12} \approx 0$. Значит, на свободном контуре области $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, т. е.

$$p = \sigma_s \quad (4.14)$$

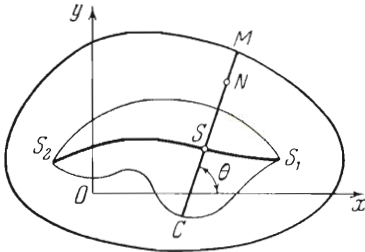
а на контурах, где задано значение напряжений $\sigma_1 = \sigma_2 = -q$

$$p = q + \sigma_s \quad (4.15)$$

Например, если контур области является многосвязным, так что L_1, L_2, L_3, \dots суть контуры отверстий в одной или обеих плитах, или при сплошных плитах контуры областей, не заполненных массой (пустот), то через эти контуры будет происходить истечение массы, причем, полагая $q = m\sigma_s$ на L_n , получим

$$p = (1 + m)\sigma_s \quad (4.16)$$

если контур L_n удален от наружного контура L хотя бы на h . Как известно из решения задачи Прандтля, в случае наличия отверстий в плитах (фиг. 4)



Фиг. 4

$$p = \left(1 + \frac{1}{2} \pi\right) \sigma_s \quad (4.17)$$

Формулы (4.11), (4.14), (4.16) показывают, что между формой эшюры контактного давления p сжимаемой пластической массы и формой насыпи из сухого однородного песка существует полная аналогия. Пусть в некоторый момент времени t нам известен контур L

области течения пластической массы. Осуществим пластинку такой же формы и, положив ее горизонтально, будем через сито насыпать на нее сухой песок с коэффициентом трения ν . В результате образуется определенной формы предельная насыпь, которая уже не будет изменяться. Вертикальные ординаты поверхности насыпи обозначим через $z_1(x, y)$. Функция z_1 удовлетворяет уравнению

$$|\text{grad } z_1| = \nu = -\frac{\partial z_1}{\partial n} \quad (\nu = \text{tg } \varphi) \quad (4.18)$$

Здесь φ — угол предельного трения, n — внешняя нормаль к линии уровня $z_1 = \text{const}$. На контуре L

$$z_1 = 0 \quad (4.19)$$

Поскольку уравнения для $p - \sigma_s$ и z_1 и граничные условия тождественно совпадают, значит тождественно совпадают и величины z_1/ν и $(p - \sigma_s)/(2\tau_s/h)$, т. е. если форма и размер пластинки в основании насыпи тождественно совпадают с формой и размером в плане сжимаемой массы, то

$$p = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} \frac{z_1}{\nu} \quad (4.20)$$

во всех соответствующих точках.

Если мы хотим, чтобы давление p выражалось через ординату z поверхности песчанной насыпи линейной однородной функцией

$$p = \frac{2\tau_s}{h} \frac{z}{v} \quad (4.21)$$

то должны сделать преобразование

$$z = z_1 + vh \frac{\sigma_s}{2\tau_s} = z_1 + vh \quad (4.22)$$

т. е. по контуру пластинки сделать вертикальный борт (цилиндрическую оболочку) высотой vh и ординаты z отсчитывать от основания пластинки.

Полная сила, необходимая для сжатия массы, очевидно, выражается через объем песчаной насыпи V по формуле

$$P = \iint p \, dx \, dy = \frac{2\tau_s}{hv} V \quad (4.23)$$

Чтобы распространить аналогию на случай многосвязной области, ясно, что в пластинке, лежащей в основании насыпи, предварительно должны быть сделаны соответствующей формы и одинаковых размеров отверстия и вокруг них возведены борта высотой $(1+m)vh$ (например, $(1 + \frac{1}{2}\pi)vh$). Получающаяся в таком случае насыпь будет давать эпору контактных давлений в сжимаемой массе, и пересчет можно производить по формуле (4.21).

Учитывая установленную аналогию, задачу о сжатии пластической массы жесткими плитами, даже при наличии в них отверстий, можно считать до конца решенной при любой степени сжатия и с учетом как зависимости сопротивления ее от степени деформации λ , т. е. упрочнения, так и от скорости деформации $d\lambda/dt$ (при постоянной температуре). Действительно, если в момент t мы знаем контур L и внутренние контуры L_n , то на основании опыта с песчаной насыпью и формулы (4.21) знаем распределение давления p и линии уровня $p = \text{const}$.

Линии тока $\theta = \text{const}$, по которым в данный момент идет течение (траектории вектора скорости w), как это видно из (4.10), являются семейством прямых линий, ортогональных семейству линий уровня $p = \text{const}$. Действительно, из (4.10) имеем, исключая p

$$\cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (4.24)$$

причем общее решение этого уравнения суть

$$y \cos \theta - x \sin \theta = \varphi(\theta) \quad (4.25)$$

где φ произвольная функция.

Из (4.25) видно, что линии $\theta = \text{const}$ суть прямые, причем, как уже сказано, ортогональные семейству $p = \text{const}$, а значит, ортогональные к линиям контура L и L_n .

Рассмотрим точку M контура L , в которой нормаль к нему составляет угол θ с осью x (фиг. 4). Центр кривизны контура для точки M пусть находится в точке C , так что отрезок MC есть радиус кривизны R . Пусть точка $N(x, y)$ лежит на луче CM , отрезок NC обозначим через r .

Поскольку геометрическое место точек C для замкнутого контура L есть замкнутая кривая L' (или точка), причем движению точки M по L против часовой стрелки соответствует движение C по L' против часовой стрелки, то для односвязных контуров внутри области должен существовать отрезок кривой S_1S_2 , на котором p имеет максимум, а скорость $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ обращается в нуль. Очевидно, этот отрезок S_1S_2 является проекцией на плоскость x, y ребра эпюры давлений $p(x, y)$ и потому может быть назван следом ребра.

Укажем некоторые свойства следа ребра для односвязных контуров.

а) Центры минимальной кривизны контура являются конечными точками следа ребра, и отсюда для контуров, имеющих n точек относительно минимума кривизны, может быть n конечных точек следа (разветвленное ребро).

б) След ребра фигуры, имеющей ось симметрии, симметричен относительно этой оси и в случае двух точек минимума кривизны, лежащих на оси симметрии, представляет отрезок прямой.

в) Каждой точке следа ребра соответствуют по крайней мере две точки контура, расстояние до которых по нормали к контуру одинаково и минимально.

Другие свойства вытекают из аналогии с песчаной насыпью. Для многосвязных контуров, как видно из этой аналогии и граничных условий (2.14), (2.16), след ребра представляет совокупность замкнутых линий, окружающих отверстия в плите, соединенных между собой криволинейными отрезками и имеющих ответвления в виде криволинейных отрезков, направленных к наружному контуру L и заканчивающихся в центрах минимальной кривизны наружного контура. Перечисленные и ряд других, очевидных из аналогии свойств следа ребра позволяют без особого труда его построить графически, как только контур L и внутренние L_n известны.

Пусть луч MC пересекает ребро в точке S . Обозначим

$$MC = R, \quad NC = r, \quad SC = r_0 \quad (4.26)$$

Из (4.10) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \theta = \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\tau_s}{h}$$

Отсюда и из условий (4.14), (4.16) имеем для точек M , лежащих на наружном контуре L ,

$$p = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(R - r) \quad (4.27)$$

и для точек M , лежащих на внутреннем контуре L_n ,

$$p = (1 + m)\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(r - R) \quad (4.28)$$

так как в этом случае внешняя к контуру нормаль направлена внутрь области течения. Учитывая выражения (4.10) и, в частности, равенства $u = w \cos \theta$, $v = w \sin \theta$, условие несжимаемости преобразуем к виду

$$\frac{\partial w}{\partial r} + w \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta \right) = \frac{d\lambda}{dt} \quad (4.29)$$

Из (4.25) находим входящие сюда производные от θ , после чего получим

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{\varphi'(\theta) + y \sin \theta + x \cos \theta} = \frac{d\lambda}{dt}$$

Но так как $\theta = \text{const}$ — линии тока, то это уравнение должно иметь вид

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} = \frac{d\lambda}{dt} \quad (4.30)$$

Отсюда находим

$$\varphi'(\theta) = r - y \sin \theta - x \cos \theta \quad (4.31)$$

На линии ребра $S_1 S_2$ скорость w должна обращаться в нуль и потому для скоростей w_e точек, текущих к наружной границе L , и для скоростей w_i точек, текущих к внутренней границе L_n , имеем соответственно

$$w_e = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right), \quad w_i = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(\frac{r_0^2}{r} - r \right) \quad (4.32)$$

В частности, для точек контуров L и L_n имеем

$$w_e = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(R - \frac{r_0^2}{R} \right), \quad w_i = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(\frac{r_0^2}{R} - R \right) \quad (4.33)$$

Эти формулы позволяют построить контуры L и L_n в момент $t + \Delta t$, если они известны в момент t , так как $w\Delta t$ есть нормальное перемещение точек этих контуров. В случае, если внутренний контур L_n — неизменяемый (т. е. имеются отверстия в жестких плитах), $\rho \oint w dt ds$ дает поток массы через L_n , т. е. изменение за Δt объема, получающегося вследствие истечения через L_n цилиндрического «прилива».

Два простейших примера, которые мы рассмотрим, относятся к радиальному движению массы, представляющей двухсвязную область. Наружный контур L имеет радиус b , внутренний L_1 — радиус a .

Пусть край L — свободный, край L_1 (отверстие в плитах) неподвижный ($a = \text{const}$), причем на внутреннем крае давление q — порядка σ_s ($m = \text{const}$ порядка 1). Для L имеем $R = b(t)$, для L_1 имеем $R = a$, радиус круга ребра r_0 найдем из сравнения при $r = r_0$ величин (4.27) и (4.28):

$$r_0 = \frac{1}{2} (b + a) - \frac{1}{2} mh \approx \frac{1}{2} (b + a)$$

Из (4.33) для L имеем

$$\frac{db}{d\lambda} = \frac{(3b + a)(b - a)}{8b}$$

и потому закон изменения радиуса b по мере утоньшения слоя массы ($\lambda = \ln(h_0/h)$) будет определяться уравнением

$$\left(\frac{3b(\lambda) + a}{3b_0 + a} \right)^{2/3} \left(\frac{b(\lambda) - a}{b_0 - a} \right)^2 = e^\lambda = \frac{h_0}{h} \quad (4.34)$$

Максимальное давление на ребре равно

$$p_{\max} = \left(1 + \frac{m}{2} \right) \sigma_s + \frac{\tau_s}{h} (b - a)$$

и тем самым задача решена.

Заметим, что при $a \rightarrow 0$ формула не переходит в решение задачи об односвязном контуре, так как в начале координат имеется сток. (Это ясно и из аналогии с песчаной насыпью.)

Во втором примере будем считать, что плиты сплошные, но масса в начальный момент занимала кольцевую область (b_0, a_0) и оба контура изменяются, оставаясь свободными от нагрузки ($m = 0$). Вновь имеем для L , $R = b$, для L_1 , $R = a$ и из сравнения (4.27) и (4.28) на ребре r_0 находим $r_0 = \frac{1}{2}(b + a)$. Уравнения (4.33) принимают вид

$$\frac{d}{d\lambda}(b^2) = b^2 - r_0^2, \quad \frac{d}{d\lambda}(a^2) = a^2 - r_0^2, \quad r_0 = \frac{b+a}{2}$$

Они имеют очевидный первый интеграл

$$b^2 - a^2 = (b_0^2 - a_0^2) e^\lambda \quad (4.35)$$

Полагая еще

$$b^2 + a^2 = (b_0^2 + a_0^2) \zeta(\lambda) e^\lambda \quad (4.36)$$

найдем для ζ дифференциальное уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

Его интеграл, удовлетворяющий условию

$$\lambda = 0, \quad \zeta = \frac{b_0^2 + a_0^2}{b_0^2 - a_0^2} = \zeta_0 \quad (4.37)$$

имеет вид

$$\lambda = \ln \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta_0 - \sqrt{\zeta_0^2 - 1}} - \frac{1}{2} [(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^2 - (\zeta_0 - \sqrt{\zeta_0^2 - 1})^2] \quad (4.38)$$

и дает значение ζ в зависимости от λ . Ребро всегда находится посередине между a и b , максимальное давление на ребре выражается той же формулой, что и в предыдущем примере (при $m = 0$). Полная сила, необходимая для деформирования, равна площади контакта с одной из плит в рассматриваемый момент (λ), умноженной на среднее давление

$$\sigma_s + \tau_s \frac{b-a}{2h}$$

Более точные решения о сжатии пластического вещества между плитами можно найти из уравнений (4.9), причем у свободного края нужно учесть небольшую зону, в которой вместо условия Прандтля $T = \tau_s$ следует принять закон Кулона $T = \mu p$.

Поступила 8 III 1954

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Прандтль Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел (ZAMM, Bd. 3, S. 401—406, 1923). Теория пластичности. Сб. статей. Под ред. Ю. Н. Работнова. Гос. изд. иностр. лит., 1948.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. ГТТИ, 1948.