

## О ВОЛНАХ НАГРУЗКИ И РАЗГРУЗКИ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ДВИЖЕНИИ УПРУГОЙ ИЛИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ГИБКОЙ НИТИ

Н. Кристеску

(Бухарест)

Настоящая работа состоит из трех параграфов. В первом параграфе при помощи метода характеристик<sup>1</sup> рассматриваются поперечные и продольные волны, распространяющиеся в гибкой (упругой или пластической) нити. Напряжение предполагается данной функцией от удлинения (относительного). Эта функция изучается в следующих параграфах.

Во втором параграфе рассматриваются движения полубесконечной нити. Силовое воздействие в конце нити таково, что материал части переходит за предел упругости. Волны нагрузки и разгрузки исследуются при гипотезе идеальной пластичности. Разгрузку мы предполагаем линейной.

Третий параграф посвящен той же задаче в случае линейного упрочнения.

**§ 1. Волны, возникающие при движении гибкой, упругой или пластической нити.** Уравнения движения гибкой нити записываются в виде<sup>2</sup>

$$\frac{\partial}{\partial s_0} \left( \frac{T}{1+e} \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) - \rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + X = 0 \quad (x, y, z) \quad (1.1)$$

где  $s_0$  — начальное расстояние от произвольного начала отсчета дуги,  $e$  — относительное удлинение,  $\rho_0$  — начальная плотность,  $t$  — время,  $X, Y, Z$  — составляющие внешней силы,  $x, y, z$  — координаты точки нити,  $T = T(e)$  — напряжение, являющееся данной функцией от  $e$ .

К уравнениям (1.1) добавим соотношение

$$e = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial s_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial s_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial s_0} \right)^2} - 1 \quad (1.2)$$

Раскрывая скобки в (1.1) и дифференцируя (1.2) по  $s_0$ , получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2} + \frac{\partial y}{\partial s_0} \frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2} + \frac{\partial z}{\partial s_0} \frac{\partial^2 z}{\partial s_0^2} - (1+e) \frac{\partial e}{\partial s_0} &= 0 \\ \frac{T}{1+e} \frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{(1+e) dT/de - T}{(1+e)^2} \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial e}{\partial s_0} + X &= 0 \quad (xyz) \end{aligned} \quad (1.3)$$

<sup>1</sup> Этот метод дан Риманом<sup>[1]</sup> еще в 1860 г., им же сделано указание на существование разрывов производных. Кристоффель<sup>[2]</sup> в 1877 г. обобщает результаты Римана для пространственного случая. В 1887 г. Гюгоньо<sup>[3]</sup> независимо от упомянутых авторов получает часть этих результатов и в некоторой мере развивает их. Между прочим он указал на значение понятия о совместности, которое будет использовано в настоящей работе. Адамар в 1903 г. в своей книге<sup>[4]</sup> развил эти результаты. В настоящей статье мы пользуемся его книгой, а также книгой Леви-Чивита<sup>[5]</sup>.

<sup>2</sup> Здесь и в дальнейшем символ  $(xyz)$  справа от равенств означает, что остальные равенства получаются циклической перестановкой этих букв.

*Замечание.* Это дифференцирование необходимо для преобразования (1.2) в соотношение, линейное относительно производных второго порядка, а также для того, чтобы в уравнении, которое мы добавляем к системе (1.1) наибольший порядок производных неизвестных функций равнялся наибольшему порядку производных соответствующих функций в (1.1).

Обозначим через  $V(s_0, t)$  линию разрывов, расположенную на поверхности, порождаемой двигающейся нитью;  $s_0$  и  $t$  суть координаты на этой поверхности. Характеристики <sup>1</sup> системы (1.3) даются определителем

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z & U \\ W & 0 & 0 & B_x \\ 0 & W & 0 & B_y \\ 0 & 0 & W & B_z \end{vmatrix} = 0$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\partial x}{\partial s_0} \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2, & B_x &= \frac{(1+e)dT/de - T}{(1+e)^2} \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial V}{\partial s_0} \\ W &= \frac{T}{1+e} \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2, & U &= -(1+e) \frac{\partial V}{\partial s_0} \end{aligned} \quad (xyz)$$

Отсюда

$$(1+e) \frac{\partial V}{\partial s_0} \left[ \frac{T}{1+e} \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] \left[ \frac{dT}{de} \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.4)$$

В дальнейшем исключается из рассмотрения случай  $e = -1$ , — вследствие очевидных физических соображений; а также следующие случаи

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial s_0} \neq 0; \quad \frac{\partial V}{\partial s_0} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0; \quad \frac{\partial V}{\partial s_0} = \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

первый из которых соответствует стационарным разрывам, второй — разрывам, относящимся ко всем точкам нити, а третий — случаю неподвижных точек нити.

Обозначая через  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  коэффициенты скачка, условия динамической совместности (см.<sup>[5]</sup>, § 7) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s_0} \left[ \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial V}{\partial s_0} \alpha + \frac{\partial y}{\partial s_0} \frac{\partial V}{\partial s_0} \beta + \frac{\partial z}{\partial s_0} \frac{\partial V}{\partial s_0} \gamma - (1+e) \delta \right] &= 0 \\ \left[ \frac{T}{1+e} \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] \alpha + \frac{(1+e)dT/de - T}{(1+e)^2} \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial V}{\partial s_0} \delta &= 0 \quad (xyz) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будем различать два случая, которые приводят к двум типам волн.

*Первый тип.* Имеем

$$\frac{T}{1+e} \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 = 0 \quad (1.6)$$

или иначе

$$\sqrt{\frac{T}{\rho_0(1+e)}} \frac{\partial V}{\partial s_0} \pm \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (1.7)$$

<sup>1</sup> Для линейных систем второго порядка см. книгу Адамара<sup>[4]</sup>, стр. 276—280. Обобщение понятия характеристики для систем произвольного порядка и тех, в которых наибольшие порядки производных неизвестных функций могут быть различными, дано Г. К. Моисилом<sup>[6]</sup>. Мы пользовались этими понятиями в работе<sup>[7]</sup>.

Следовательно, появляются две волны, распространяющиеся со скоростью соответственно

$$v_I = \frac{\partial V / \partial t}{\partial V / \partial s_0} = \mp \sqrt{\frac{T}{\rho_0(1+e)}} \quad (1.8)$$

Пока будем предполагать, что равенство

$$(1+e) \frac{dT}{de} - T = 0 \quad (1.9)$$

не имеет места. Этот случай рассматривается ниже.

Тогда три соотношения (1.5) дают  $\delta = 0$ ; отсюда вытекает, что вдоль этих волн  $\partial e / \partial s_0$  есть непрерывная функция.

Первое соотношение (1.5), если  $\delta = 0$ , запишется (в координате  $s$ )

$$\frac{\partial x}{\partial s} \alpha + \frac{\partial y}{\partial s} \beta + \frac{\partial z}{\partial s} \gamma = 0 \quad (1.10)$$

Из этого следует, что волны первого типа — *поперечные*. Единственными возможными разрывами будут разрывы координат. Что касается относительного удлинения  $e$ , то оно является непрерывной функцией вместе со всеми своими производными ( $\delta = 0$ ). Следовательно, поперечные разрывы не вызывают удлинений

*Второй тип.* Имеем]

$$\frac{dT}{de} \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 = 0 \quad (1.11)$$

или иначе

$$\sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{de} \frac{\partial V}{\partial s_0}} \pm \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (1.12)$$

Для скоростей распространения волн получаем

$$v_{II} = \frac{\partial V / \partial t}{\partial V / \partial s_0} = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{de}} \quad (1.13)$$

а условия (1.5) динамической совместности принимают следующий вид:

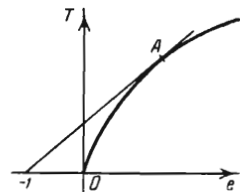
$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s_0} \left[ \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial V}{\partial s_0} \alpha + \frac{\partial y}{\partial s_0} \frac{\partial V}{\partial s_0} \beta + \frac{\partial z}{\partial s_0} \frac{\partial V}{\partial s_0} \gamma - (1+e) \delta \right] &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial s_0} \left[ \frac{T}{1+e} - \frac{dT}{de} \right] \left[ \frac{\partial V}{\partial s_0} \alpha - \frac{1}{(1+e)^2} \frac{\partial x}{\partial s_0} \delta \right] &= 0 \quad (xyz) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Если (1.9) не выполнено, последние три соотношения (1.14) (в координате  $s$ ) запишутся

$$\frac{\alpha}{\partial x / \partial s} = \frac{\beta}{\partial y / \partial s} = \frac{\gamma}{\partial z / \partial s} = \frac{\delta}{(1+e) \partial V / \partial s_0} \quad (1.15)$$

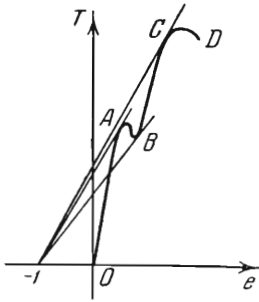
Отсюда следует, что волны второго типа суть *продольные* волны. Из (1.15) и (1.14) следует, что  $\delta \neq 0$ . На этих волнах мы имеем разрывы первого порядка по отношению к  $e$ .

Возвратимся теперь к соотношению (1.1). В случае материалов с упрочнением оно представляет собой уравнение прямой линии, проходящей через точку  $(-1, 0)$  и касательной к диаграмме  $T = T(e)$  (фиг. 1).



Фиг. 1

Для материалов с разупрочнением могут существовать три или больше таких прямых (фиг. 2). По интервалам на диаграмме  $T = T(e)$  имеем:



Фиг. 2

$$(1 + e) \frac{dT}{de} > T \quad \text{на } OA \text{ и } BC$$

$$(1 + e) \frac{dT}{de} < T \quad \text{на } AB \text{ и } CD$$

$$(1 + e) \frac{dT}{de} = T \quad \text{в точках } A, B, C$$

Сравним скорости распространения (1.8) и (1.13). Из приведенных соотношений следует, что

$$|v_I| < |v_{II}| \quad \text{на } OA \text{ и на } BC$$

т. е. поперечные волны распространяются медленнее продольных;

$$|v_I| > |v_{II}| \quad \text{на } AB \text{ и } CD$$

т. е. продольные волны распространяются медленнее поперечных. Наконец,

$$|v_I| = |v_{II}| \quad \text{в точках } A, B, C$$

т. е. обе скорости одинаковы. (Это может случиться лишь в конечном числе точек диаграммы. В этих точках рассмотренные два типа волн накладываются и соображения насчет двух типов волн теряют силу, поскольку условия динамической совместности (1.5) приводят только к первому условию.)

В дальнейшем мы воспользуемся следующими выражениями для напряжения:

$$T = \text{const} \neq 0 \tag{1.16}$$

$$T = T_0 + E(e - e_0) \tag{1.17}$$

$$T = T_s + E'(e - e_s) \tag{1.18}$$

Отсюда вытекает, что в идеально пластической нити поперечные волны распространяются с большей скоростью, чем продольные. Для упругих нитей они распространяются медленнее. Наконец, для пластических нитей с упрочнением (линейным) и то и другое возможно в зависимости от характера упрочнения данного материала.

В случае  $E' > T_s / (e_s + 1)$  поперечные волны распространяются с большей скоростью; в случае  $E' < T_s / (e_s + 1)$  они распространяются медленнее. Наконец, для  $E' = T_s / (e_s + 1)$  они накладываются и соображения о двух типах волн теряют свое значение.

**§ 2. Случай идеально пластической нити.** Условие пластичности Мизеса<sup>[8]</sup> для идеального пластического тела

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + 6(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2)} = \text{const} \tag{2.1}$$

в случае нити запишется в виде

$$T = \text{const} \tag{2.2}$$

В этом случае соотношение (1.4) принимает вид:

$$\rho_0 (1 + e) \frac{\partial V}{\partial s_0} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \left[ \frac{T}{1 + e} \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] = 0$$

и, следовательно, существуют лишь поперечные волны.



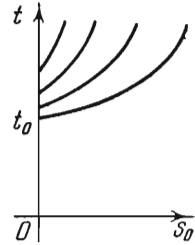
Предположим, что в точке полубесконечной нити прилагается в момент  $t = t_0$  нагрузка. Пусть нить движется каким-нибудь образом. Пусть точка, в которой приложена нагрузка, соответствует значению  $s_0 = 0$  и пусть нагрузка такова, что нить переходит за предел упругости. Пусть, далее, функция  $e(s_0, t)$  есть во время нагрузки монотонно возрастающая, а во время разгрузки монотонно убывающая функция от  $t$ . Следовательно, для данного сечения наибольшее значение  $e$  соответствует прохождению волны разгрузки через это сечение (волна Рахматулина<sup>[9]</sup>).

Дадим теперь приближенное представление волн нагрузки и разгрузки. Для этого надо учесть (2.2) и (1.7):

$$\sqrt{\frac{T}{\rho_0(1+e)}} \frac{\partial V}{\partial s_0} \pm \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{2.3}$$

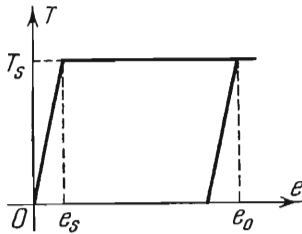
Бихарактеристики ([4], стр. 272) этих линейных уравнений суть

$$\sqrt{\frac{\rho_0(1+e)}{T}} ds_0 = \pm dt \tag{2.4}$$



Интегрируя, получаем искомые волны. Но пока функция  $e(s_0, t)$  неизвестна.

Предположим, что в каком-нибудь сечении  $s_0 = s_1$  функция  $e$  линейно зависит от  $t$ , т. е.  $e_1 = \lambda t + e_s$ , где  $\lambda$  — положительный параметр (индекс 1 указывает на точку координаты  $s_1$ ). Итак, мы можем проинтегрировать (2.4) в окрестности  $s = s_1$  и получить два семейства волн (параболы в плоскости  $t s_0$ ),



$$\sqrt{\frac{\rho_0}{T}} s_0 + C = \pm \frac{2}{\lambda} \sqrt{1 + \lambda t + e_s} \tag{2.5}$$

распространяющиеся со скоростями

$$v_{\Pi} = \pm \sqrt{\frac{T}{\rho_0(1 + \lambda t + e_s)}}$$

На фиг. 3 изображено первое семейство таких парабол (волны Римана) для полубесконечной нити в предположении, что пластические деформации появляются в момент  $t = t_0$ . Характеристики, соответствующие недеформированному состоянию, получаются из (2.4) при  $e = 0$ . В интервале  $0 < t < t_0$  характеристики, соответствующие упругому состоянию, получаются также из (2.4) при  $T = ke$ .

В случае разгрузки материал следует линейной диаграмме (фиг. 4)

$$T = T_0 + E(e - e_0) \tag{2.6}$$

где  $T_0 = T_s$  и  $e_0$  — постоянные, характеризующие начало разгрузки.

В этом случае функция  $e(s_0, t)$  будет убывающей и для приближенного представления можно взять в каждом сечении  $s_0 = s_1$

$$e = e_s + \lambda t^* - \mu \tau \quad \left( 0 \leq \tau \leq \frac{e_s}{\mu} \right) \tag{2.7}$$

Здесь  $t^*$  — момент начала разгрузки,  $\mu$  — положительный параметр.

Вводя (2.6) и (2.7) в (2.4), получим

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{E}} \sqrt{\frac{1 + e_s + \lambda t^* - \mu \tau}{2e_s + \lambda t^* - \mu \tau}} ds_0 = \pm d\tau$$

и после интегрирования

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\rho_0}{E}} s_0 + C = \mp \frac{1}{\mu} [(1 + e_s + \lambda t^*)(2e_s + \lambda t^*) - \mu(1 + 3e_s + 2\lambda t^*)\tau - \mu^2 \tau^2]^{1/2} \pm \\ \pm \frac{e_s - 1}{2\mu} \ln \{2\mu^2 \tau - \mu(1 + 3e_s + 2\lambda t^*) + \\ + 2\mu [(1 + e_s + \lambda t^*)(2e_s + \lambda t^*) - \mu(1 + 3e_s + 2\lambda t^*)\tau - \mu^2 \tau^2]^{1/2} \} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Эти волны изображены на фиг. 5. Фронт волн разгрузки (волна Рахматулина) соответствует значению  $\tau = 0$ . Скорости распространения будут

$$v_{12} = \mp \sqrt{\frac{E(2e_s + \lambda t^* - \mu \tau)}{\rho_0(1 + e_s + \lambda t^* - \mu \tau)}}$$

Волна полной разгрузки соответствует значению  $\tau = e_s/\mu$ . Волны разгрузки изображены в предположении  $e_s < 1$ . Для материалов, где  $e_s > 1$ , пред-

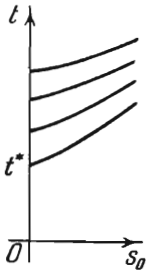
ставление то же самое, но вогнутость кривых меняется (фиг. 6).

Если  $e_s = 1$ , волны разгрузки суть два семейства прямых (фиг. 7)

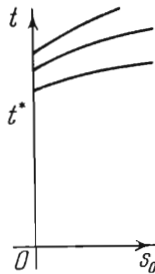
$$ds_0 = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} dt \quad (2.9)$$

а скорости распространения суть

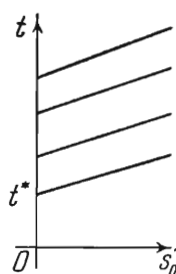
$$v_{12}' = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

§ 3. Случай линейного упрочнения. Будем теперь предполагать материал с линейным упрочнением (фиг. 8).

Рассмотрим *случай нагрузки*. Пусть напряжение

$$T = T_s + E'(e - e_s) \quad (3.1)$$

где  $E'$  — модуль упрочнения. Соотношение (1.4) принимает вид:

$$(1 + e) \frac{\partial V}{\partial s_0} \left[ \frac{T_s + E'(e - e_s)}{1 + e} \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] \left[ E' \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] = 0$$

При этом снова, как и в § 1, получаем два типа волн.

*Первый тип*

$$\sqrt{\frac{T_s + E'(e - e_s)}{\rho_0(1 + e)}} \frac{\partial V}{\partial s_0} \pm \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

Бихарактеристики суть

$$\sqrt{\frac{\rho_0(1 + e)}{T_s + E'(e - e_s)}} ds_0 = \pm dt \quad (3.3)$$

Поперечно для волн нагрузки в окрестности  $s_0 = s_1$  положим

$$e = e_s + \lambda t \tag{3.4}$$

Отсюда

$$\frac{ds_0}{dt} = \pm \sqrt{\frac{T_s + E'\lambda t}{\rho_0(1 + e_s + \lambda t)}}$$

и после интегрирования

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho_0} s_0 + C = & \pm \frac{1}{\lambda} \sqrt{T_s(1 + e_s) + \lambda [T_s + (1 + e_s) E'] t + \lambda^2 E' t^2} \pm \\ & \pm \frac{T_s - E'(1 + e_s)}{2\lambda \sqrt{E'}} \ln \{ 2\lambda^2 E' t + \lambda [T_s + (1 + e_s) E'] + \\ & + 2\lambda \sqrt{E'} \sqrt{T_s(1 + e_s) + \lambda [T_s + (1 + e_s) E'] t + \lambda^2 E' t^2} \} \end{aligned}$$

Возможны три случая: а) материал нити удовлетворяет неравенству

$$(1 + e_s) E' - T_s < 0 \tag{3.5}$$

оба семейства волн нагрузки даны на фиг. 9;

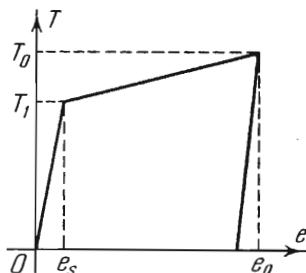
б) материал нити удовлетворяет равенству

$$T_s = E'(1 + e_s) \tag{3.6}$$

получаем для волн нагрузка два семейства прямых, изображенных на фиг. 11;

в) материал нити удовлетворяет неравенству

$$(1 + e_s) E' - T_s > 0 \tag{3.7}$$



Фиг. 8

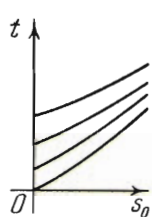
и волны изображены на фиг. 10.

Волны (3.3) распространяются соответственно со скоростью

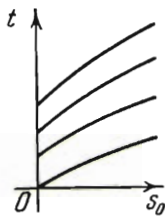
$$v_{I3} = \mp \sqrt{\frac{T_s + E'\lambda t}{(1 + e_s + \lambda t) \rho_0}}$$

Они являются поперечными волнами Римана для мгновенной нагрузки.

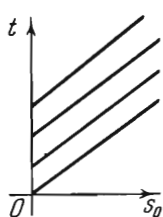
Второй тип



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

$$\sqrt{\frac{E'}{\rho_0}} \frac{\partial V}{\partial s_0} \pm \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{3.8}$$

Бихарактеристики суть

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{E'}} ds_0 = \pm dt \tag{3.9}$$

или, интегрируя:

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{E'}} s_0 = \pm t + C \tag{3.10}$$

Они изображены на фиг. 11 и распространяются соответственно со скоростью

$$v_{II1} = \mp \sqrt{\frac{E'}{\rho_0}}$$

Они являются продольными волнами нагрузки Римана. Очевидно, они совпадают с поперечными волнами, соответствующими (3.6).

Рассмотрим *случай разгрузки*. Здесь напряжение  $T = T_0 + E(e - e_0)$ , где  $T_0$  и  $e_0$  — напряжение и относительное удлинение, соответствующие моменту начала разгрузки. Соотношение (1.4) принимает вид:

$$(1 + e) \frac{\partial V}{\partial s_0} \left[ \frac{T_0 + E(e - e_0)}{1 + e} \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] \left[ E \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] = 0$$

*Первый тип*

$$\frac{T_0 + E(e - e_0)}{1 + e} \left( \frac{\partial V}{\partial s_0} \right)^2 - \rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 = 0 \quad (3.11)$$

Бихарактеристики суть

$$\sqrt{\rho_0} ds_0 = \pm \sqrt{\frac{T_0 + E(e - e_0)}{1 + e}} dt \quad (3.12)$$

Для разгрузки возьмем  $e = e_0 - \mu\tau$ , где  $0 \leq \tau \leq e_s/\mu$ ; интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho_0} s_0 + C = \mp \frac{1}{\mu} \sqrt{(1 + e_0)T_0 - \mu [T_0 + E(1 + e_0)]\tau + \mu^2 E\tau^2} \mp \\ \mp \frac{E(1 + e_0) - T_0}{\mu^2 \sqrt{E}} \ln \{ 2\mu^2 E\tau - \mu [T_0 + E(1 + e_0)] + \\ + 2\mu E \sqrt{(1 + e_0)T_0 - \mu [T_0 + E(1 + e_0)]\tau} + \mu^2 E\tau^2 \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

В этом случае имеем только один тип волн разгрузки, поскольку всегда  $T_0 < E(1 + e_0)$ . Соответствующие скорости распространения суть

$$v_{I4} = \mp \sqrt{\frac{T_0 - \mu E\tau}{\rho_0(1 + e_0 - \mu\tau)}}$$

Эти волны изображены на фиг. 5. Кривые, которые пересекают ось  $t$  в точке  $\tau = 0$ , дают фронт волн разгрузки (волну Рахматулина).

*Второй тип*

$$\sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \frac{\partial V}{\partial s_0} \pm \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (3.14)$$

Этот случай является подобным второму случаю нагрузки. Получим

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{E}} s_0 = \pm t + C, \quad v_{II2} = \mp \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad (3.15)$$

Эти волны совпадают (фиг. 5) по типу и скоростям с волнами (2.9).

Поступила 24 XI 1953

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Riemann B. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Ab. Ges. Wiss. Göttingen, t. VIII, 1860.
2. Christoffel E. B. Über die Fortpflanzung von Stößen durch elastische feste Körper. Annali di Matematica, t. VIII, 1877.
3. Hugoniot. Sur la propagation du mouvement dans les corps. Journal de l'Ecole Polytechnique, t. LVII, 1887.
4. Hadamard J. Leçons sur la propagation des ondes. Paris, Hermann, 1903.
5. Levi-Civita T. Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes. Paris, Félix Alcan, 1932.
6. Moisil Gr. C. O definitie invariantă a caracteristicelor unui sistem de ecuații cu derivate parțiale. Bul. St. Acad. R. P. R., Ser. Mat., Fiz., Chim., t. II, No 9, 1950.
7. Cristescu N. Discontinuități în mișcarea firelor perfect flexibile și elastice. Com. Acad. R. P. R., t. I, No 6, 1954; Discontinuități în mișcarea firelor vâscose-elastice perfect flexibile. Rev. Univ. C. I. Parnon, No 1, 1952.
8. Ильюшин А. А. Пластичность. ОГИЗ, 1948.
9. Рахматулин X. А. О распространении волны разгрузки. ПММ, т. IX, 1945.