Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УСТАНОВИВШИХСЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

А. Г. Свешников

(Москва)

В предыдущей статье автора [1] дано недостаточно строгое обоснование возможности использования «принципа предельного поглощения» для определения решения внешних краевых задач теории установившихся упругих колебаний. При обосновании этого принципа использовалась лемма, сформулированная на стр. 448. Однако в приведенной формулировке лемма неверна. На это обстоятельство автору было указано И. Н. Векуа и В. Д. Купрадзе, за что автор приносит им глубокую благодарность

Ниже приводится новый метод доказательства, позволяющий строго обосновать применимость «принципа предельного поглощения» для определения решения внешних краевых задач теории установившихся колебаний.

Начнем со случая скалярного волнового уравнения. При исследовании внешних краевых задач для волнового уравнения

$$\triangle u + k_0^2 u = 0 \tag{0.1}$$

в области, внешней к замкнутой ограниченной поверхности S, при краевых условиях первого или второго рода

$$u\,|_S = \varphi(P) \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi(P) \tag{0.2}$$

для доказательства существования и единственности решения, удовлетворяющего «условиям излучения» на бесконечности, обычно пользуются сведением краевой задачи к интегральному уравнению. При этом особая трудность возникает в том случае, когда k_0^2 является собственным значением внутренней краевой задачи для области, ограниченной поверхностью S. Дело в том, что в этом случае нужно проводить дополнительное обоснование разрешимости полученного интегрального уравнения [2,3].

1. Рассмотрим первую краевую задачу. В области T, ограниченной поверхностью S, выберем некоторую сферу Σ_0, целиком лежащую внутри S (способ построения сферы Σ_0 будет следовать из дальнейшего изложения), и построим функцию $G(M_0, M)$, являющуюся функцией источника второй внешней краевой задачи для уравнения (0.1) в области вне Σ_0:

$$G(M_0, M) = \frac{e^{ik_0 r}}{r} + w(M_0, M) \tag{1.1}$$

где $w(M_0, M)$ — регулярная функция, являющаяся решением внешней краевой задачи для уравнения (0.1), удовлетворяющим условию

$$\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Sigma_0} = -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ik_0 r}}{r}\right)\Big|_{\Sigma_0} \tag{1.2}$$

и условию излучения на бесконечности.

В том случае, когда k_0^2 не является собственным значением первой краевой задачи для области внутри Σ_0, возможность построения функции $G(M_0, M)$ очевидна.

При помощи функции $G(M_0, M)$ образуем функции

$$v(M_0) = \iint\limits_S G(M_0, Q)\,\mu(Q)\,d\sigma, \qquad w(M_0) = \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_Q} G(M_0, Q)\,\nu(Q)\,d\sigma \tag{1.3}$$

которые назовем потенциальными простого и двойного слоя. Всюду вне S функции $v(M_0)$ и $w(M_0)$ удовлетворяют уравнению (0.1). Легко видеть, что на S они обладают обычными свойствами потенциалов простого и двойного слоя:

$$v_{\text{н}}\big|_S = v_{\text{вн}}\big|_S \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{\text{н}}\bigg|_S &= -2\pi\mu(P) + \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_P} G(P, Q)\,\mu(Q)\,d\sigma \\ \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{\text{вн}}\bigg|_S &= +2\pi\mu(P) + \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_P} G(P, Q)\,\mu(Q)\,d\sigma \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} w_{\text{н}}\,\big|_S &= +2\pi\nu(P) + \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P, Q)\,\nu(Q)\,d\sigma \\ w_{\text{вн}}\,\big|_S &= 2\pi\nu(P) + \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P, Q)\,\nu(Q)\,d\sigma \end{aligned} \tag{1.6}$$

На Σ_0 функции $v(M_0)$ и $w(M_0)$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n}\bigg|_{\Sigma_0} = 0 \tag{1.7}$$

Покажем, что решение внешней краевой задачи для уравнения (0.1) может быть представлено в виде потенциала двойного слоя

$$u(M_0) = w(M_0, \nu) \tag{1.8}$$

При этом будем основываться на известной теореме единственности решения внешней краевой задачи уравнения (0.1), удовлетворяющего условию излучения [2,3].

$$\frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u = o(r^{-1}) \tag{1.9}$$

Из граничного условия (0.2) и формулы (1.6) следует, что функция $\nu(P)$ является решением интегрального уравнения

$$\nu(P) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P, Q)\,\nu(Q)\,d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\varphi(P) \tag{1.10}$$

Покажем, что уравнение (1.10) разрешимо для любой функции $\varphi(P)$. Для этого достаточно доказать, что соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Будем доказывать от противного. Пусть уравнение

$$\nu(P) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P, Q)\,\nu(Q)\,d\sigma = 0 \tag{1.11}$$

имеет нетривиальное решение. Тогда и союзное с ним уравнение

$$\mu(P) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_P} G(P, Q)\,\mu(Q)\,d\sigma = 0 \tag{1.12}$$

имеет нетривиальное решение $\mu_0(P)$. Составим потенциал простого слоя:

$$v(M_0, \mu_0) = \iint\limits_S G(M_0, Q)\,\mu_0(Q)\,d\sigma \tag{1.13}$$

Функция $v(M_0, \mu_0)$ удовлетворяет уравнению (0.1) всюду вне S, в частности, в области T_{Σ_0}, ограниченной поверхностями S и Σ_0. Из формул (1.5), (1.12) и (1.7) получим

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{\text{вн}}\bigg|_S = 0, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)\bigg|_{\Sigma_0} = 0 \qquad (1.1$$

т. е. функция $v(M_0, \mu_0)$ является решением второй внутренней краевой задачи уравнения (0.1) для области T_{Σ_0}.

Но всегда можно радиус сферы Σ_0 выбрать так, чтобы вторая краевая задача для области T_{Σ_0} имела только тривиальное решение (причем условие отсутствия нетривиальных решений первой краевой задачи внутри Σ_0 будет сохранено). Отсюда следует, что

$$v(M_0, \mu_0) \equiv 0 \quad \text{в } T_{\Sigma_0}$$

а следовательно, и на S. В силу теоремы единственности

$$v(M_0, \mu_0) \equiv 0 \quad \text{вне } S$$

Отсюда следует, что $\mu_0(P) \equiv 0$, а следовательно, уравнение (1.10) разрешимо для любой правой части. Тем самым доказано существование решения внешней краевой задачи уравнения (0.1) для любого k_0^2.

2. Рассмотренный метод легко может быть применен и для обоснования «принципа предельного поглощения» [1] для уравнения (0.1).

Теорема 1. Предел ограниченного на бесконечности решения внешней краевой задачи

$$\text{(A)} \qquad \Delta u + k^2 u = 0, \quad u|_S = \varphi(P, k) \qquad (k = k_0 + i\varepsilon,\ \varepsilon > 0)$$

при $\varepsilon \to 0$ существует и является решением внешней краевой задачи

$$\text{(B)} \qquad \Delta u_0 + k_0^2 u_0 = 0, \qquad u_0|_S = \varphi_0(P, k_0)$$

удовлетворяющим условию излучения (1.9).

При этом будем предполагать, что функция $\varphi(P, k)$ является непрерывной функцией параметра k, причем

$$\lim \varphi(P, k) = \varphi_0(P, k_0) \qquad \text{при } k \to k_0 \tag{2.1}$$

Существование решения задачи (A) очевидно, так как комплексное k^2 не может быть собственным значением внутренней краевой задачи. Чтобы обосновать возможность предельного перехода, будем искать решение задач (A) и (B) в виде потенциалов двойного слоя, определенных по формуле (1.3):

$$u(M_0) = w(M_0, \nu), \qquad u_0(M_0) = w_0(M_0, \nu_0) \tag{2.2}$$

Для функций ν и ν_0 получим интегральные уравнения

$$\nu(P) - \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P, Q, k,)\, \nu(Q, k)\, d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \varphi(P, k) \tag{2.3}$$

$$\nu_0(P) - \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial n_Q} G_0(P, Q, k_0)\, \nu_0(Q, k_0)\, d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \varphi_0(P, k_0) \tag{2.4}$$

которые в силу изложенного выше имеют единственные решения при соответствующем выборе функции $G_0(P, Q, k_0)$.

Из способа построения функции $G(M_0, M)$ следует, что функция $G(P, Q, k)$ является непрерывной функцией параметра k, причем

$$\lim G(P, Q, k) = G_0(P, Q, k_0) \qquad \text{при } k \to k_0$$

Легко видеть, что при выполнении этих условий имеет место непрерывная зависимость решения интегрального уравнения от параметра, т. е.

$$\lim \nu(P) = \nu_0(P) \qquad \text{при } k \to k_0$$

что и доказывает теорему

3. Приведенный способ рассуждений может быть легко применен при рассмотрении внешних краевых задач для установившихся колебаний, описываемых уравнениями, отличными от уравнения (0.1). В частности, это может быть сделано для задачи об установившихся упругих колебаниях. Имеет место теорема.

Теорема 2. Предел ограниченного на бесконечности решения внешней краевой задачи

$$(A)\qquad \begin{gathered}(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + k^2\mathbf{u} = 0 \quad (k = k_0 + i\varepsilon,\ \varepsilon > 0)\\ \mathbf{u}\,|_S = \varphi(P, k)\end{gathered} \qquad (3.1)$$

при $\varepsilon \to 0$ существует и является решением внешней краевой задачи

$$(B)\qquad \begin{gathered}(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_0 - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_0 + k_0^2\mathbf{u}_0 = 0\\ u\,|_S = \varphi_0(P, k_0)\end{gathered}$$

удовлетворяющим условиям излучения.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 причем вместо функции источника $G(M_0, M)$ надо ввести тензор $D(M_0, M)$, соответствующий решению уравнения установившихся упругих колебаний под действием сосредоточенной силы в области, внешней к сфере Σ_0, с граничным условием второго рода на поверхности сферы.

В. Д. Купрадзе был построен тензор $\Gamma(M_0, M)$, соответствующий решению уравнения (3.1) в бесконечном пространстве под действием сосредоточенной силы [2]. Каждый столбец тензора $\Gamma(M_0, M)$ представляет собой вектор $\mathbf{w}^{(i)}$, являющийся решением уравнения (3.1), обладающим особенностью вида r^{-1}. Для построения тензора $D(M_0, M)$ потребуем, чтобы каждый его столбец представлял собой вектор

$$g^{(i)} = \mathbf{w}^{(i)} + \omega^{(i)} \qquad (3.2)$$

являющийся решением уравнения (3.1), обладающим особенностью r^{-1} и удовлетворяющим граничному условию

$$N\mathbf{g}^{(i)}\,|_{\Sigma_0} = 0 \qquad (3.3)$$

Операция N соответствует взятию нормальной производной. При помощи тензора $D(M_0, M)$ образуем функции

$$\mathbf{v}(M_0) = \iint\limits_S D(M_0, Q)\,\mu(Q)\,d\sigma, \qquad \mathbf{w}(M_0) = \iint\limits_S ND(M_0, Q)\,\nu(Q)\,d\sigma \qquad (3.4)$$

которые обладают свойствами потенциалов простого и двойного слоя на S.

Для доказательства теоремы будем искать решение задач (A) и (B) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}(M_0, \nu), \qquad \mathbf{u}_0 = \mathbf{w}_0(M_0, \nu_0) \qquad (3.5)$$

где функции $\nu(P)$ и $\nu_0(P)$ определяются из интегральных уравнений

$$\nu(P) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S ND(P, Q)\,\nu(Q)\,d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\varphi(P, k) \qquad (3.6)$$

$$\nu_0(P) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S ND_0(P, Q)\,\nu_0(Q)\,d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\varphi_0(P, k_0) \qquad (3.7)$$

При соответствующем выборе сферы Σ_0 нетрудно показать, что $\nu(P) \to \nu_0(P)$ при $k \to k_0$, что и доказывает теорему.

Аналогичные рассмотрения могут быть проведены и для задач дифракции электромагнитных волн на ограниченных объектах.

Поступила 28 XII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. Г. Единственность решения внешних задач теории упругих колебаний. ПММ, т. XVII, вып. 4, 1953.
2. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. Гостехиздат, 1950.
3. Векуа И. Н. О метагармонических функциях. Труды Тбилисского мат. ин-та, т. XII, 1943.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953.