Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ-МИЧЕЛЛА ИЗ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ КАСТИЛЬЯНО

В. Д. Клюшников

(Москва)

Доказательство того, что условия сплошности являются следствием вариацонного уравнения Кастильяно, можно найти в ряде работ. Так, в книге П. Ф. Папковича [1] рассматривается общий случай, когда учитывается поверхностный интеграл в вариационном уравнении Кастильяно. А. П. Филин в работе [3], кроме того, рассмотрел случай, когда закон Гука не соблюдается, и, наконец, в книге Л. С. Лейбензона [2] приводится доказательство Саутвелла, которое касается частного случая, когда в вариацонном уравнении Кастильяно отсутствует поверхностный интеграл. В этих доказательствах условия сплошности выражаются в перемещениях, тогда как вариационное уравнение Кастильяно записывается в напряжениях [1].

В настоящей работе общим методом вариационного исчисления дан вывод уравнений Бельтрами-Мичелла из вариационного уравнения Кастильяно

$$\delta V = \int_S (u\,\delta X_\nu + v\,\delta Y_\nu + w\,\delta Z_\nu)\,dS \tag{1}$$

Здесь

$$V = \frac{1}{2E}\int_\Omega [\,(X_x{}^2 + Y_y{}^2 + Z_z{}^2) - 2\sigma(X_xY_y + X_xZ_z + Y_yZ_z) + {}$$
$$+ 2(1+\sigma)(Y_z{}^2 + Y_x{}^2 + Z_x{}^2)\,]\,d\Omega$$

причем E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона.

Сформулируем задачу следующим образом. Дан функционал

$$\Phi = \frac{1}{2E}\int_\Omega [\,(X_x{}^2 + Y_y{}^2 + Z_z{}^2) - 2\sigma(X_xY_y + X_xZ_z + Y_yZ_z) + {}$$
$$+ 2(1+\sigma)(Y_z{}^2 + X_z{}^2 + Y_x{}^2)\,]\,d\Omega - \int_S (uX_\nu + vY_\nu + wZ_\nu)\,dS \tag{2}$$

Требуется найти экстремум этого функционала при условиях

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0\\
&\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0\\
&\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

---

[1] После сдачи этой заметки в печать в редакции журнала ПММ мое внимание было обращено на работы Кармана и Хаара (1909 г.) и Куранта и Гильберта [4] (1924 г.). Оказалось, что эти работы содержат указание о том, что условия сплошности являются дифференциальными уравнениями для вариационного уравнения Кастильяно, однако при этом не говорится, в какой форме имеются в виду условия сплошности: в форме Сен-Венана или в форме Бельтрами-Мичелла.

Теория таких смешанных задач на условный экстремум развита очень слабо. Однако здесь для строгого доказательства потребуются только некоторые качественные выводы этой теории.

Вместо того чтобы искать условный экстремум (2) при условии (3), пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, будем искать абсолютный экстремум функционала:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2E}\int\limits_{\Omega}\{(X_x{}^2 + Y_y{}^2 + Z_z{}^2) - 2\sigma(X_nY_y + X_xZ_z + Y_yZ_z) +$$

$$+ 2(1+\sigma)(Y_z{}^2 + X_z{}^2 + Y_x{}^2) + \lambda_1\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X\right) +$$

$$+ \lambda_2\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y\right) + \lambda_3\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z\right)\Bigg\} d\Omega +$$

$$+ \int\limits_{S}(uX_\nu + vY_\nu + wZ_\nu)\,dS \qquad (4)$$

Исследования в области смещенных задач вариационного исчисления позволяют утверждать [5], что на уравнения Остроградского интеграл меньшей кратности не влияет, поэтому уравнения Остроградского для (4) и для функционала

$$\Phi_2 = \frac{1}{2E}\int\limits_{\Omega}\Big\{(X_x{}^2 + Y_y{}^2 + Z_z{}^2) - 2\sigma(X_xY_y + X_xZ_z + Y_yZ_z) +$$

$$+ 2(1+\sigma)(Y_x{}^2 + X_z{}^2 + Y_x{}^2) + \lambda_1\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X\right) +$$

$$+ \lambda_2\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y\right) + \lambda_3\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z\right)\Big\} d\Omega \qquad (5)$$

совпадают. Эти уравнения имеют вид:

$$F_{\omega_i} - \frac{\partial}{\partial x}F_{\omega'_{ix}} - \frac{\partial}{\partial y}F_{\omega'_{iy}}\frac{\partial}{\partial z}F_{\omega'_{iz}} = 0$$

где F — подинтегральная функция в выражении (5),

$$\omega_1 = X_x, \quad \omega_2 = Y_y, \ldots, \omega_6 = X_y, \quad \omega_7 = \lambda_1, \ldots, \omega_9 = \lambda_3$$

То есть для функционала (5) имеем

$$\begin{aligned} 2X_x - 2\sigma Y_y - 2\sigma Z_z &= \frac{\partial\lambda_1}{\partial x} \\ 2Y_y - 2\sigma Z_z - 2\sigma X_x &= \frac{\partial\lambda_2}{\partial y} \\ 2Z_z - 2\sigma X_x - 2\sigma Y_y &= \frac{\partial\lambda_3}{\partial z} \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} 4(1+\sigma)Y_z - \frac{\partial\lambda_2}{\partial z} - \frac{\partial\lambda_3}{\partial y} &= 0 \\ 4(1+\sigma)X_z - \frac{\partial\lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial\lambda_3}{\partial x} &= 0 \\ 4(1+\sigma)X_y - \frac{\partial\lambda_1}{\partial y} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

Последнее уравнение (8) продифференцируем по x и по y: первое уравнение (6) два раза по y, а второе из (6) два раза по x. В результате получим

$$4(1+\sigma)\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^3\lambda_1}{\partial y^2\partial x}-\frac{\partial^3\lambda_2}{\partial x^2\partial y}=0$$

$$2\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2}-2\sigma\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2}-2\sigma\frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}=\frac{\partial^3\lambda_1}{\partial x\partial y^2}$$

$$2\frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2}-2\sigma\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2}-2\sigma\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2}=\frac{\partial^3\lambda_2}{\partial x^2\partial y}$$

Исключая из этих уравнений λ_1 и λ_2, получим

$$2(1+\sigma)\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2}-$$
$$-\frac{\partial^2 Y_z}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 Z_z}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2}=0 \tag{9}$$

Дальше вывод уравнений Бельтрами-Мичелла из числа первой группы системы производится так, как это сделано в работе [1] (стр. 114 и далее). Формула (9) повторяет формулу (а) работы [1].

Продифферерцируем теперь первое уравнение (7) два раза по x, второе по x и по y, третье по x и по z и из первого вычтем второе и третье:

$$4(1+\sigma)\left(\frac{\partial^2 Y_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 X_z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial z}\right)+2\frac{\partial^3\lambda_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0 \tag{10}$$

Продифференцируем первое уравнение (6) по y и по z и исключим из полученного выражения и из (10) множитель λ_1; тогда

$$(1+\sigma)\left(\frac{\partial^2 Y_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X_z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial z}\right)+\frac{\partial^2 X_x}{\partial y\,\partial z}-\sigma\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y\,\partial z}-\sigma\frac{\partial^2 Z_z}{\partial y\,\partial z}=0 \tag{11}$$

Далее вывод уравнений Бельтрами-Мичелла из числа второй группы системы полностью совпадает с выводом в работе [1] (стр. 116). Формула (9) повторяет формулу (ж) работы [1].

Таким образом, уравнения совместности в напряжениях при наличии массовых сил являются следствием вариационного уравнения Кастильяно.

Поступила 2 XII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
2. Филин А. П. Об одном следствии вариационного принципа теории упругости. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.
3. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. Собр. соч., т. I. Изд. АН СССР, 1951.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. I. ГТТИ, 1951.
5. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. Гостехиздат, 1941.