Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ

Ш. Е. Микеладзе

(Тбилиси)

Работа посвящена приближенному решению задачи Коши для общих нелинейных дифференциальных уравнений с дифференцируемыми достаточное число раз начальными данными.

§ 1. Общие замечания. Рассмотрим нелинейное уравнение в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_p$ следующего вида:

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = F\left(t, x_1, \ldots, x_p, u, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}\right) \tag{1.1}$$

с начальными условиями Коши

$$\frac{\partial^k u(0, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^k} = \varphi_k(x_1, \ldots, x_p) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{1.2}$$

определенными в некоторой конечной p-мерной области G_0 на гиперплоскости $t = 0$.

В дальнейшем уравнение (1.1) будем считать нормальным (следуя С. В. Ковалевской), т. е. будем считать, что

$$\alpha_0 < n, \qquad m \leqslant n$$

Мы будем считать также, что уравнение (1.1) имеет единственное решение в некоторой области G пространства $(t, x_1, \ldots, x_p)$, примыкающей к куску G_0 гиперплоскости $t = 0$, где заданы начальные условия. Во всем дальнейшем, говоря о решениях уравнений вида (1.1) и функциях $\varphi_k(x_1, \ldots, x_p)$, мы будем предполагать их непрерывно дифференцируемыми в G столько раз, сколько это потребуется для конструирования формул, приводящих к приближенным решениям задачи Коши.

Поскольку наличие незначительных ошибок в данных Коши может повлечь значительную погрешность в окончательном результате, мы ограничимся только такими уравнениями (1.1), для которых задача Коши корректно поставлена в смысле Адамара на области G.

§ 2. Основные формулы. Рассматривая функцию $u(t, x_1, \ldots, x_p)$ как функцию t, сконструируем для нее представление, аналогичное представлению (9) § 135 книги[1] для функции от одного переменного. Это приведет к системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^k u(rh, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^k} = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{(rh)^\lambda}{\lambda!} \varphi_{k+\lambda}(x_1, \ldots, x_p) +$$

$$+ \frac{h^{n-k}}{(n-k-1)!} \int_0^r (r-t)^{n-k-1} F\left(th, x_1, \ldots, x_p, u, \ldots, \frac{\partial^m u(th, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}\right) dt \tag{2.1}$$

справедливой для любого r, принимающего целые значения.

Система (2.1) вместе с квадратурными формулами замкнутого и незамкнутого типа удобна для вычисления интеграла дифференциального уравнения (1.1) для последовательности равноотстоящих значений независимой переменной t.

Так, при $n \geqslant 2$ и $k \leqslant n-2$ при помощи формул Котеса замкнутого типа с тремя и четырьмя абсциссами мы получим формулы

$$\frac{\partial^k u(2qh, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^k} = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{(2qh)^\lambda}{\lambda!} \varphi_{k+\lambda}(x_1, \ldots, x_p) + \tag{2.2}$$

$$+ \frac{(2h)^{n-k}}{6(n-k-1)!} \sum_{s=1}^{q} \left\{ (q-s+1)^{n-k-1} F_{2s-2} + \right.$$

$$\left. + 4\left(q-s+\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} F_{2s-1} + (q-s)^{n-k-1} F_{2s} \right\}$$

$$\frac{\partial^k u((2q+1)h, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^k} = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{[(2q+1)h]^\lambda}{\lambda!} \varphi_{k+\lambda}(x_1, \ldots, x_p) + \tag{2.3}$$

$$+ \frac{3}{16} \frac{(2h)^{n-k}}{(n-k-1)!} \left\{ \left(q+\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} F_0 + 3q^{n-k-1} F_1 + \right.$$

$$\left. + 3\left(q-\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} F_2 + (q-1)^{n-k-1} F_3 \right\} + \frac{(2h)^{n-k}}{6(n-k-1)!} \sum_{s=2}^{q} \left\{ (q-s+1)^{n-k-1} F_{2s-1} + \right.$$

$$\left. + 4\left(q-s+\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} F_{2s} + (q-s)^{n-k-1} F_{2s+1} \right\}$$

где, например, F_{2s} — значение функции

$$F\left(th, x_1, \ldots, x_p, u(th, x_1, \ldots, x_p), \ldots, \frac{\partial^m u(th, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}\right)$$

при $t = 2s$. При $q = 1$ последняя сумма, стоящая в правой части (2.3), принимается равной нулю.

Подобным же образом можно сконструировать формулы для $k = n - 1$.

Чтобы можно было начать вычисление, необходимо знать два последовательных значения $F = F_0$ и $F = F_1$. Значение F_0 нам известно:

$$F_0 = F\left(0, x_1, \ldots, x_p, \varphi_0, \ldots, \frac{\partial^{m-\alpha_0} \varphi_{\alpha_0}(x_1, \ldots, x_p)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_p}}\right)$$

Значение F_1 может быть вычислено различными способами. Оно может быть найдено во многих случаях с достаточной степенью точности посредством ряда Тейлора, доведенного до члена пятого порядка относительно h.

Значения F_ν для ν бо́льших, чем единица, могут быть вычислены последовательно при помощи (2.2) и (2.3).

Можно также проинтегрировать уравнение (1.1) при помощи формулы Симпсона и легко выводимого соотношения

$$\frac{\partial^k u(a+2h, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^k} = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{(2h)^\lambda}{\lambda!} \frac{\partial^{k+\lambda} u(a, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^{k+\lambda}} +$$

$$+ \frac{2h^{n-k}}{3(n-k-1)!} (2^{n-k-2} F_a + 2F_{a+h})$$

где

$$F_a \equiv F(a, x_1, \ldots, x_p).$$

§ 3. Общее волновое уравнение в p-мерном пространстве. Рассмотрим общее волновое уравнение в p-мерном пространстве

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \triangle u \tag{3.1}$$

где

$$\triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$$

оператор Лапласа, а c — некоторое постоянное.

Пусть ищется решение этого уравнения, удовлетворящее начальным условиям

$$u \Big|_{t=0} = f(x_1, \ldots, x_p), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x_1, \ldots, x_p)$$

Разложим функцию $u(h, x_1, \ldots, x_p)$ в ряд Тейлора и оборвем его на члене, содержащем h^5. Заменив в полученной формуле h на h / c, убеждаемся, что

$$u\left(\frac{h}{c}, x_1, \ldots, x_p\right) = f_1(x_1, \ldots, x_p) + \frac{h^2}{2!} \Delta f(x_1, \ldots, x_p) +$$
$$+ \frac{h^4}{4!} \Delta^2 f(x_1, \ldots, x_p) + \frac{h}{c} \left\{ g(x_1, \ldots, x_p) + \frac{h^2}{3!} \Delta g(x_1, \ldots, x_p) + \frac{h^4}{5!} \Delta^2 g(x_1, \ldots, x_p) \right\}$$

Если теперь принять в (2.2) $k = 0$, $q = 1$, $n = 2$, заменить в ней h на h / c и вместе с последним равенством использовать соотношение

$$F_\nu \equiv c^2 \Delta u\left(\nu \frac{h}{c}, x_1, \ldots, x_p\right)$$

то получим

$$u\left(2\frac{h}{c}, x_1, \ldots, x_p\right) = f(x_1, \ldots, x_p) + 2h^2 \Delta f(x_1, \ldots, x_p) + \frac{2h^4}{3} \Delta^2 f(x_1, \ldots, x_p) +$$
$$\frac{h}{c} \left\{ 2g(x_1, \ldots, x_p) + \frac{4h^2}{3} \Delta g(x_1, \ldots, x_p) + \frac{2h^4}{9} \Delta^2 g(x_1, \ldots, x_p) \right\}$$

Можно также получить соотношение для вычисления $u(3h / c, x_1, \ldots, x_p)$. Возьмем формулу (2.3), положим в ней $k = 0$, $q = 1$, $n = 2$ и заменим h на h / c. Это нас приведет к новому соотношению, которое после использования полученных выше выражений для $u(h / c, x_1, \ldots, x_p)$ и $u(2h / c, x_1, \ldots, x_p)$ примет вид:

$$u(3h / c, x_1, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_p) + 4.5 h^2 \Delta f(x_1, \ldots, x_p) + 3.375 h^4 \Delta^2 f(x_1, \ldots, x_p) +$$
$$+ \frac{h}{c} \left[3g(x_1, \ldots, x_p) + 4.5 h^2 \Delta g(x_1, \ldots, x_p) + 1.875 h^4 \Delta^2 g(x_1, \ldots, x_p) \right]$$

Описанный прием можно повторить. Повторив, его λ раз, получим соотношение для вычисления $u(\lambda h / c, x_1, \ldots, x_p)$, содержащее линейно f, Δf, $\Delta^2 f$, g, Δg и $\Delta^2 g$.

§ 4. Численное интегрирование. Модифицируя формулы (2.2) и (2.3) при помощи формул численного дифференцирования, мы придем к формулам, удобным для численного интегрирования уравнения (1.1). Подобным же образом мы получим практически ценные формулы, обращаясь к формуле Тейлора.

Присоединим к начальным данным Коши уравнение (1.1) и определим из него и из тех уравнений, которые получим, дифференцируя уравнение (1.1), частные производные по t n-го и высшего порядков от искомой функции в области G_0. В случае, когда данные Коши однозначно определяют эти производные, мы сможем написать разложение функции $u(t, x_1, \ldots, x_p)$ в ряд Тейлора, справедливое внутри области G. Построенным рядом однозначно определяется искомое решение для некоторого промежутка $0 \leqslant t \leqslant T$, зависящего от точки $(x_1, \ldots, x_p)$.

Чтобы получить формулы для численного интегрирования уравнения (1.1), необходимо заменить члены построенного разложения, используя формулы численного дифференцирования. Этот прием является особенно удобным в применении к линейным дифференциальным уравнениям.

Мы ограничимся рассмотрением общего волнового уравнения (3.1) с заданными начальными условиями. Искомое решение в этом случае имеет вид:

$$u\left(\lambda \frac{h}{c}, x_1, \ldots, x_p\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^{2k}}{(2k)!} \Delta^k f(x_1, \ldots, x_p) + \frac{\lambda h}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^{2k}}{(2k+1)!} \Delta^k g(x_1, \ldots, x_p) \tag{4.1}$$

где λ — целое число.

Известный метод спуска в теории решения задач математической физики применим в рассмотренном случае. Предполагая, например, решение и начальные условия не зависящими от $x_2, \ldots, x_p$ и $x_1 = x$, получим решение для волнового уравнения в одном измерении при начальных условиях $u(0, x) = f(x)$ и $u_t'(0, x) = g(x)$:

$$u\left(\lambda \frac{h}{c}, x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(x) + \frac{\lambda h}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^{2k}}{(2k+1)!} g^{(2k)}(x) \tag{4.2}$$

Далее, так как

$$\frac{f(x-\lambda h) + f(x+\lambda h)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(x)$$

и

$$\frac{1}{2} \int_{x-\lambda h}^{x+\lambda h} g(x)\,dx = \frac{\lambda h}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^{2k}}{(2k+1)!} g^{(2k)}(x)$$

то

$$u\left(\lambda \frac{h}{c}, x\right) = \frac{f(x-\lambda h) + f(x+\lambda h)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-\lambda h}^{x+\lambda h} g(x)\,dx$$

т. е. сконструированное выше решение (4.2) совпадает с решением Даламбера.

Обращаясь к формулам численного дифференцирования с центральными разностями (см. [1], стр. 276), мы убеждаемся, что решение волнового уравнения в одном измерении (4.2) может быть записано в виде

$$u\left(\lambda \frac{h}{c}, x\right) = \frac{f(x-\lambda h) + f(x+\lambda h)}{2} + \frac{\lambda h}{c} \left[g(x) + \frac{\lambda^2}{6} \delta^2 g(x) + \frac{\lambda^2 (3\lambda^2 - 5)}{360} \delta^4 g(x) + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda^2 (3\lambda^4 - 21\lambda^2 + 28)}{15120} \delta^6 g(x) + \frac{\lambda^2 (5\lambda^6 - 90\lambda^4 + 441\lambda^2 - 540)}{1814400} \delta^8 g(x) + \cdots \right]$$

Отсюда при $\lambda = 1$ получаем

$$u\left(\frac{h}{c}, x\right) = \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2} + \frac{h}{c} \left[g(x) + \frac{1}{6} \delta^2 g(x) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{180} \delta^4 g(x) + \frac{1}{1512} \delta^6 g(x) - \frac{23}{226800} \delta^8 g(x) + \cdots \right]$$

Если прервать последнюю формулу на разности четвертого порядка, то в соответствии с формулами для вычисления разностей получим

$$u\left(\frac{h}{c}, x\right) = \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2} +$$
$$+ \frac{h}{180\,c} \{114 g(x) + 34 [g(x-h) + g(x+h)] - [g(x-2h) + g(x+2h)]\} \tag{4.3}$$

К этой же формуле придем, заменив в формуле (4.2) производные $f^{(2k)}(x)$ и $g^{(2k)}(x)$ по соответствующе выбранным безразностным формулам (см. [1], § 127).

Предполагая теперь решение и начальные условия не зависящими от $x_3, \ldots, x_p$ и $x_1 = x$, $x_2 = y$, получим решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

с начальными условиями Коши $u(0, x, y) = f(x, y)$, $u_t'(0, x, y) = g(x, y)$.

Модифицируя решение (4.1) должным образом, придем к практически ценным формулам для численного решения волнового уравнения в двумерном пространстве.

Так, взяв $\lambda = 1$ и ограничившись в (4.1) членами не более высокого порядка, чем h^5, получим

$$u\left(\frac{h}{c}, x, y\right) = f(x, y) + \frac{h^2}{2}\Delta f(x, y) + \frac{h^4}{24}\Delta^2 f(x, y) + \\ + \frac{h}{c}\left[g(x, y) + \frac{h^2}{6}\Delta g(x, y) + \frac{h^4}{120}\Delta^2 g(x, y)\right]$$

Выбирая безразностные формулы численного дифференцирования в соответствии с точностью полученной формулы, находим

$$u\left(\frac{h}{c}, x, y\right) = \frac{1}{24}\{-16f(x, y) + 8[f(x-h, y) + f(x+h, y) + \\ + f(x, y-h) + f(x, y+h)] + 2[f(x+h, y-h) + f(x+h, y+h) + \\ + f(x-h, y-h) + f(x-h, y+h)]\} + \frac{h}{180c}\{60g(x, y) + \\ + 28[g(x-h, y) + g(x+h, y) + g(x, y-h) + g(x, y+h)] + \\ + 3[g(x+h, y-h) + g(x+h, y+h) + g(x-h, y-h) + g(x-h, y+h)] - \\ - [g(x+2h, y) + g(x-2h, y) + g(x, y-2h) + g(x, y+2h)]\}$$

Из последней формулы методом спуска можно извлечь ранее выведенную формулу (4.3) для волнового уравнения в одном пространственном измерении. Для этого достаточно предположить, что значения f и g не зависят от y.

Наконец, для численного решения волнового уравнения в двумерном пространстве можно с успехом использовать формулы кубатур, содержащие частные производные интегрируемой функции (см. [1], стр. 495). Сохранив в формуле (4.1) члены не более высокого порядка, чем h^3, мы убеждаемся, что

$$u\left(\frac{h}{c}, x, y\right) = -2f(x, y) + \frac{3}{4h^2}\int\limits_{x-h}^{x+h} du \int\limits_{y-h}^{y+h} f(u, v)\,dv + \frac{1}{4hc}\int\limits_{x-h}^{x+h} du \int\limits_{y-h}^{y+h} g(u, v)\,dv$$

Если мы хотим пользоваться формулой (4.1) для численного решения волнового уравнения в p-мерном пространстве, то мы должны обобщить изложенную выше теорию с тем, чтобы она охватила p-мерный случай. Конструирование формул любой степени точности было бы весьма громоздким. Поэтому мы удержим в формуле (4.1) члены не более высокого порядка, чем h^3, и обратимся к безразностным формулам, имеющим точность h^4. Вычисление показывает, что в этом случае

$$u\left(\frac{h}{c}, x_1, \ldots, x_p\right) = (1-p)f(x_1, \ldots, x_p) + \frac{1}{2}[f(x_1+h, x_2, \ldots, x_p) + \\ + f(x_1-h, x_2, \ldots, x_p) + \cdots + f(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p+h) + f(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p-h)] + \\ + \frac{h}{c}\left[\left(1-\frac{1}{3}p\right)g(x_1, \ldots, x_p) + g(x_1-h, x_2, \ldots, x_p) + \right. \\ \left. + g(x_1+h, x_2, \ldots, x_p) + \ldots + g(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p-h) + g(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p+h)\right]$$

Поступила 17 XII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. ГИТТЛ, 1953.