Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М. Е. Швец

(Ленинград)

Рассмотрение некоторых задач, относящихся к теплопроводности и диффузии в ламинарном и турбулентном пограничных слоях, приводит к необходимости найти решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial z}\, z^\sigma \frac{\partial q}{\partial z} + A_1(x)\, z^\sigma \frac{\partial q}{\partial z} = B_1(x)\, z^{\sigma-1} \frac{\partial q}{\partial x} \qquad (\sigma < 1) \tag{1}$$

Ниже строится 1) решение данного уравнения при граничных условиях

$$q(0, z) = 0, \qquad q(x, 0) = 1, \qquad q(x, \infty) = 0 \tag{2}$$

и 2) решение этого же уравнения для сосредоточенного источника.

При помощи замены переменного

$$z = [\xi(1-\sigma)]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} + A(x)\, \xi^\beta \frac{\partial q}{\partial \xi} = B(x)\, \xi^{\beta-1} \frac{\partial q}{\partial x} \tag{3}$$

где

$$A = A_1(1-\sigma)^\beta, \qquad B = B_1(1-\sigma)^{\beta-1}, \qquad \beta = \frac{\alpha}{1-\sigma}$$

Будем в дальнейшем считать $\beta > 1$. Граничные условия остаются прежними при замене z на ξ. Ищем решение (3), удовлетворяющее условиям (2), в виде

$$q = f(\eta), \qquad \eta = \xi \left[e^{-F(x)} \int_0^x \frac{e^{F(y)}}{B(y)}\, dy \right]^{-\frac{1}{1+\beta}}, \qquad F(x) = (1+\beta) \int_0^x \frac{A(y)}{B(y)}\, dy \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (3), для определения $f(\eta)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{\eta^\beta}{1+\beta} \frac{df}{d\eta} = 0$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям $f(0) = 1$ и $f(\infty) = 0$, будет

$$f = 1 - \left\{ \int_0^\eta \exp\left[-\frac{y^{\beta+1}}{(1+\beta)^2} \right] dy \right\} : \left\{ \int_0^\infty \exp\left[-\frac{y^{\beta+1}}{(1+\beta)^2} \right] dy \right\} \tag{5}$$

Обозначим неполную гамма-функцию через $\Gamma(s, y)$:

$$\Gamma(s, y) = \int_0^y x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

Тогда вместо (5) получим

$$q = 1 - \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{\eta^{1+\beta}}{(1+\beta)^2} \right) \right\} : \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{1+\beta}, \infty \right) \right\} \tag{6}$$

Особенно простое выражение для q получается, если $\beta = 1$. Полагая в (6) $\beta = 1$, имеем $q = 1 - \Phi(^1/_2\, \eta)$, где Φ — интеграл вероятности ошибок.

Легко убедиться в том, что в пределе при $A \to 0$ и $B \to 1$ выражение (6) переходит в известное решение уравнения теплопроводности.

Если рассматривать коэффициенты уравнения (3) как составляющие скорости течения, то согласно уравнению неразрывности движения функции $A(x)$ и $B(x)$ связаны соотношением

$$\beta A = \frac{dB}{dx} \tag{7}$$

В соответствии с этим в формуле (6) следует положить

$$\eta = \xi B^{1/\beta} \left(\int_0^x B^{1/\beta}\, dx \right)^{\frac{1}{1+\beta}} \tag{8}$$

Найдем теперь решение уравнения (3) для «точечного источника», предполагая что имеет место (7). В данном случае закон сохранения энергии (массы) имеет вид:

$$\int_0^\infty B \xi^{\beta-1} q\, d\xi = \frac{1}{2} E = \mathrm{const} \tag{9}$$

Будем искать решение уравнения

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\beta} \frac{dB}{dx} \xi^\beta \frac{\partial q}{\partial \xi} = B \xi^{\beta-1} \frac{\partial q}{\partial x} \tag{10}$$

в виде

$$q = \left(\int_0^x B^{1/\beta}\, dx \right)^{-\frac{\beta}{1+\beta}} f(\eta) \tag{11}$$

где η определяется по формуле (8).

Подставляя (11) в (10), для определения $f(\eta)$ получаем уравнение

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{df}{d\eta} + \frac{\eta^\beta}{1+\beta} f \right) = 0 \tag{12}$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять двум граничным условиям:

$$f = 0 \quad \text{при } \eta = \infty, \qquad \frac{df}{d\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

Решением (12) будет

$$f = C \exp\left(-\frac{\eta^{\beta+1}}{(1+\beta)^2} \right)$$

Производная постоянная C определяется из условий нормировки на полную энергию (9). После простых вычислений находим

$$C = \frac{E}{2\,\Gamma(\beta / (1+\beta), \infty)} (1+\beta)^{\frac{\beta-1}{\beta+1}}$$

Итак, окончательно q имеет следующий вид:

$$q = \frac{E}{2\Gamma(\beta / (1+\beta), \infty)} (1+\beta)^{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \left(\int_0^x B^{1/\beta}\, dx \right)^{-\beta/(1+\beta)} \exp\left[-\frac{\eta^{\beta+1}}{(1+\beta)^2} \right] \tag{13}$$

При $\beta \to 1$ и $B \to 1$ выражение (13) превращается в

$$\frac{E}{2\sqrt{\pi x}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4x} \right)$$

т. е. в известное решение уравнения теплопроводности для сосредоточенного мгновенно действующего источника.

Поступила 19 XII 1953