**Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954**
**Институт механики Академии наук Союза ССР**

# РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ЧАПЛЫГИНА

**Б. Н. Бабкин**

(Молотов)

В работе метод Чаплыгина приближенного интегрирования дифференциальных уравнений применяется к одной краевой задаче для уравнения

$$y'' - f(x, y) = 0$$

Возможность применения метода к решению краевых задач еще очень мало исследована, хотя была отмечена в работе С. А. Чаплыгина [1].

**§ 1. Теорема о дифференциальных неравенствах.** Рассмотрим краевую задачу

$$y'' - f(x, y) = 0 \tag{1.1}$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \tag{1.2}$$

т. е. требуется найти решение $y(x)$ уравнения (1.1), проходящее через две заданные точки $(a, A)$ и $(b, B)$.

Относительно функции $f$ предполагается, что она непрерывна и имеет непрерывную неотрицательную производную по $y$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < +\infty$.

Нетрудно видеть, что поставленная краевая задача может иметь не более одного решения. Пусть она имеет два решения $y(x)$ и $z(x)$. Тогда будем иметь

$$y'' - z'' - f(x, y) + f(x, z) = 0 \tag{1.3}$$

Умножая равенство (1.3) на $y - z$ и интегрируя, получим

$$-\int_a^b (y' - z')^2\, dx - \int_a^b f_y{}^\circ (y - z)^2\, dx = 0 \tag{1.4}$$

где

$$f_y{}^\circ = f_y[x, z + \theta(y - z)] \qquad (0 < \theta < 1)$$

Из равенства (1.4) и условия $f_y \geqslant 0$ следует, что $y(x) \equiv z(x)$. Существование решения уравнения (1.1) при условиях (1.2) будет доказано ниже.

Покажем теперь, что в наших предположениях об $f$ для уравнения (1.1) имеет место следующая теорема.

Если функция $v(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условиям (1.2) и дифференциальному неравенству

$$v'' - f(x, v) \leqslant 0 \qquad (\geqslant 0) \qquad \text{при} \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

то на интервале $(a, b)$ имеет место неравенство

$$v(x) \geqslant y(x) \qquad (v(x) \leqslant y(x))$$

где $y(x)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2). Действительно, из соотношений

$$y'' - f(x, y) = 0, \qquad v'' - f(x, v) = \alpha(x) \leqslant 0 \tag{1.5}$$

получим

$$v'' - y'' - f(x, v) + f(x, y) = \alpha(x), \quad \text{или} \quad (v - y)'' - \overset{\circ}{f_y}(v - y) = \alpha(x) \tag{1.6}$$

где

$$f_y{}^\circ = f_y[x, y + \theta(v - y)] \qquad 0 < \theta < 1)$$

Умножая обе части ревенства (1.6) на $v - y$ и интегрируя, получим

$$-\int_a^b (v' - y')^2 dx - \int_a^b f_y^\circ (v - y)^2 dx = \int_a^b \alpha(x)(v - y)\, dx \tag{1.7}$$

Из равенства (1.7) в силу условия $f_y \geqslant 0$ следует, что

$$\int_a^b \alpha(x)(v - y)\, dx \leqslant 0 \tag{1.8}$$

Если бы разность $v - y$ в некоторой точке $\xi$ интервала $(a, b)$ оказалась отрицательной, то можно было бы указать сегмент $[\xi_1, \xi_2]$, расположенный внутри сегмента $[a, b]$, на концах которого $v(x) - y(x)$ обращается в нуль и в остальных точках сегмента сохраняет отрицательное значение. Тогда, применяя приведенные выше рассуждения к краевой задаче

$$y'' - f(x, y) = 0, \qquad y(\xi_1) = v(\xi_1), \qquad y(\xi_2) = v(\xi_2)$$

придем к неравенству

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \alpha(x)(v - y)\, dx \leqslant 0 \tag{1.9}$$

Но неравенство (1.9) невозможно, так как по условию $\alpha(x) \leqslant 0$. Полученное противоречие и доказывает, что $v(x) \geqslant y(x)$ на рассматриваемом интервале $(a, b)$. Аналогично исследуется случай $v'' - f(x, v) \geqslant 0$.

Функцию $v(x)$, удовлетворяющую граничным условиям (1.2) и дифференциальному неравенству $v'' - f(x, v) \leqslant 0$, будем в дальнейшем называть верхней, а противоположному неравенству — нижней. Нетрудно убедиться, что для любой пары $v(x)$ и $u(x)$ — верхней и нижней функций — имеет место соотношение $u(x) \leqslant v(x)$.

Покажем, что верхние и нижние функции для уравнения (1.1) существуют и легко могут быть построены. Действительно, пусть $z(x)$ — произвольная функция, принадлежащая классу $C_2([a, b])$ и удовлетворяющая условиям (1.2). Обозначим результат подстановки $z(x)$ в левую часть уравнения (1.1) через $\alpha(x)$, т. е.

$$\alpha(x) = z'' - f(x, z) \tag{1.10}$$

Пусть $\eta(x)$ — решение уравнения

$$\eta'' + |\alpha(x)| = 0 \tag{1.11}$$

удовлетворяющее условиям

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \tag{1.12}$$

Функция $\eta(x)$ неотрицательна на интервале $(a, b)$. Покажем, что функция $v(x) = z(x) + \eta(x)$ будет верхней.

Чтобы в этом убедиться, достаточно установить, что результат подстановки $v(x)$ в левую часть уравнения (1.1) будет неположительным. Действительно, имеем

$$v'' - f(x, v) = z'' + \eta'' - f(x, z + \eta) =$$
$$= z'' - f(x, z) - |\alpha(x)| + f(x, z) - f(x, z + \eta) = \alpha(x) - |\alpha(x)| - [f(x, z + \eta) - f(x, z)]$$

Отсюда и видно, что $v'' - f(x, v) \leqslant 0$. Аналогично можно построить нижнюю функцию, решая уравнение $\tau'' - |\alpha(x)| = 0$ при условиях $\tau(a) = \tau(b) = 0$ и полагая $u(x) = z(x) + \tau(x)$.

**§ 2. Построение аппроксимирующей последовательности верхних и нижних функций.** Пусть $v(x)$ — какая-нибудь верхняя функция, а $u(x)$ — нижняя функция для рассматриваемой краевой задачи. Обозначим $\sup f_y$ в области, ограниченной кривыми $y = u(x)$ и $y = v(x)$, через $M$. Для построения следующей верхней функции $v_1(x)$, точнее аппроксимирующей искомое решение, составим уравнение

$$\delta'' - M\delta - \alpha(x) = 0 \tag{2.1}$$

где $\alpha(x) = v'' - f(x, v)$, и найдем решение его, обращающееся в нуль в точках $a$ и $b$. Очевидно, это решение $\delta(x)$ будет положительно в интервале $(a, b)$.

Покажем теперь, что разность $v(x) - \delta(x)$ будет верхней функцией.

Действительно, для нее имеем

$$v'' - \delta'' - f(x, v - \delta) = v'' - M\delta - \alpha(x) - f(x, v - \delta) =$$

$$= f(x, v) - f(x, v - \delta) - M\delta = (f_y^\circ - M)\delta = \alpha_1(x) \leqslant 0 \qquad (2.2)$$

где

$$f_y^\circ = f_y[x, v - \theta\delta] \qquad (0 < \theta < 1)$$

Итак, функция $v_1(x) = v(x) - \delta(x)$ будет верхней, причем $v_1(x) \leqslant v(x)$. Дальнейшие построения проводятся по формулам: $v_n(x) = v_{n-1}(x) - \delta_{n-1}(x)$ где $\delta_{n-1}(x)$ находится из уравнений

$$\delta_{n-1}'' - M\delta_{n-1} - \alpha_{n-1}(x) = 0, \qquad \delta_{n-1}(a) = \delta_{n-1}(b) = 0$$

$$\alpha_{n-1}(x) = v_{n-1}'' - f(x, v_{n-1}), \qquad \delta_0(x) = \delta(x), \qquad \alpha_0(x) = \alpha(x) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Совершенно так же, исходя из нижней функции $u(x)$, можно построить последовательность нижних функций: $u(x) \leqslant u_1(x) \leqslant \ldots \leqslant u_n(x) \leqslant \ldots y(x)$.

Покажем, что построенные приближения сходятся к искомому решению.

**§ 3. Сходимость приближений**. Ограничимся установлением сходимости верхних функций, так как доказательство сходимости нижних функций проводится совершенно так же. Ради простоты вычислений будем предполагать, что $a = 0$, $b = 1$.

Покажем, что построенная выше последовательность верхних функций $\{v_n(x)\}$ равномерно сходится на $[0, 1]$ и ее предел является решением уравнения (1.1).

Уравнение (2.1) дает

$$\delta(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh}\sqrt{M}(x-1)\operatorname{sh}\sqrt{M}s}{\sqrt{M}\operatorname{sh}\sqrt{M}}\alpha(s)\,ds + \int_x^1 \frac{\operatorname{sh}\sqrt{M}x\operatorname{sh}\sqrt{M}(s-1)}{\sqrt{M}\operatorname{sh}\sqrt{M}}\alpha(s)\,ds \qquad (3.1)$$

Оценим величину $\delta(x)$. Введем обозначение

$$\eta_0 = \max|\alpha(x)| \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

После несложных вычислений будем иметь

$$\delta(x) < \frac{\eta_0}{M}\left[1 - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{M}x + \operatorname{sh}\sqrt{M}(1-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{M}}\right] \qquad (3.2)$$

Наибольшее значение выражения, стоящего в квадратной скобке, будет

$$q = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}{}^1/_2\sqrt{M}} \qquad \text{при } x = \tfrac{1}{2} \; (q < 1)$$

Таким образом, для $\delta(x)$ получим оценку

$$\delta(x) < \frac{\eta_0 q}{M} \qquad (3.3)$$

Чтобы оценить $\delta_1(x)$, учтем полученное выше равенство $\alpha_1(x) = (f_y^\circ - M)\delta(x)$. Используя оценку (3.3) и неотрицательность $f_y$, получим

$$|\alpha_1(x)| < \eta_0 q \qquad (3.4)$$

Тогда

$$\delta_1(x) < \frac{\eta_0}{M}q^2 \qquad (3.5)$$

Теперь легко видеть, что в общем случае будем иметь следующую оценку:

$$\delta_n(x) < \frac{\eta_0}{M}q^{n+1} \qquad (3.6)$$

Из полученных оценок следует равномерная сходимость последовательности $\{v_n(x)\}$ на сегменте $[0, 1]$. Обозначим предел этой последовательности через $V(x)$

Функция $V(x)$ удовлетворяет условиям (1,2), так как $v_n(0) = A$, $v_n(1) = B$ при вех $n$. Остается показать, что $V(x)$ является решением уравнения (1.1). Для этого рассмотрим выражение

$$\alpha_n(x) = v_n'' - f(x, v_n) = (f_y^\circ - M)\,\delta_{n-1}(x) \tag{3.7}$$

Запишем его в интегральной форме:

$$v_n(x) = \int_0^x (x-t)\,[f(t, v_n) + (f_y^\circ - M)\,\delta_{n-1}(t)]\,dt +$$
$$+ \left\{B - A - \int_0^1 (1-t)\,[f(t, v_n) + (f_y^\circ - M)\,\delta_{n-1}(t)]\,dt\right\} x + A \tag{3.8}$$

Переходя к пределу в равенстве (3.8), получим

$$V(x) = \int_0^x (x-t)\,f(t, V)\,dt + \left[B - A - \int_0^1 (1-t)\,f(t, V)\,dt\right] x + A \tag{3.9}$$

Отсюда

$$V'' - f(x, V) = 0$$

**§ 4. Пример**. Пусть требуется найти решение задачи

$$y'' - \frac{1}{3}y^3 = x, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

Нетрудно проверить, что функции

$$v(x) \equiv 0, \qquad u(x) = x^2 - x \qquad \left[\text{или } \frac{1}{6}x(x^2 - 1)\right]$$

будут соответственно верхней и нижней функциями, причем $\alpha(x) = -x$.

В области, ограниченной отрезком [0,1] оси $x$ и кривой $y = x^2 - x$:

$$M = \sup f_y = \frac{1}{16}$$

Составим уравнение для определения «поправки» $\delta(x)$:

$$\delta'' - \frac{1}{16}\delta + x = 0$$

Решение его, удовлетворяющее условиям $\delta(0) = \delta(1) = 0$, можно записать так:

$$\delta(x) = \frac{16x\,\mathrm{sh}\,{}^1\!/_4 - 16\,\mathrm{sh}\,{}^1\!/_4 x}{\mathrm{sh}\,{}^1\!/_4}$$

Тогда

$$v_1(x) = -16x + 16\,\frac{\mathrm{sh}\,{}^1\!/_4\,x}{\mathrm{sh}\,{}^1\!/_4}$$

Ограничиваясь первым приближением, мы допускаем погрешность, меньшую 0,01. Отметим еще, что построение верхних и нижних функций для рассматриваемого в работе типа уравнений можно осуществить при помощи нескольких алгоритмов.

Это можно сделать, например, при помощи метода последовательных приближений, записанного в виде

$$v_{n+1}(x) = \int_a^x (x-t)\,f(t, v_n)\,dt + A_n(x-a) + A \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

где $v_1(x)$ — какая-нибудь верхняя или нижняя функция, а коэффициент $A_n$ выбран так, чтобы удовлетворялось условие $v_{n+1}(b) = B$. При данном алгоритме верхние функции переходят в нижние, а нижние — в верхние.

Поступила 23 XII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Полное собрание сочинений, т. III, стр. 75—79, 1935.