

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН ВОКРУГ ПОДВОДНОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

И. А. Марнянский

(Николаев)

Рассматривается плоская задача о распространении бегущих волн по поверхности тяжелой жидкости, внутри которой находится вертикальная пластина, неограниченно простирающаяся вниз.

Выясняется эффект дифракции волн по всей свободной поверхности и определяется распределение давлений вдоль пластины в зависимости от параметров волн и глубины погружения верхней кромки пластины.

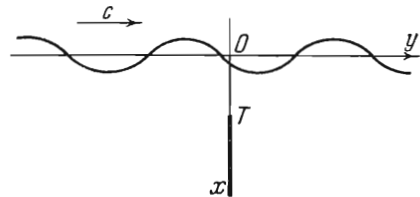
Решение задачи осуществляется тем же методом, что и в работе [1].

1. Систему координат расположим так, как указано на фиг. 1.

Потенциал набегающих волн имеет вид

$$\Phi^* = \varphi^*(x, y) e^{jkt} \quad (\varphi^* = -jche^{-\nu(x+jy)}) \quad (1.1)$$

где $j = \sqrt{-1}$ (j не взаимодействует с мнимой единицей $i = \sqrt{-1}$), и в выражениях, содержащих множитель $\exp jkt$, подразумевается только действительная часть, k — частота колебаний жидкости, $\nu = k^2/g$ — частота формы волны, $\lambda = 2\pi/\nu$ — длина волны, h — полувысота набегающих волн, $c = g/k$ — скорость бега волн.



Фиг. 1

Для определения потенциала скоростей Φ всего волнового движения несжимаемой жидкости имеем граничные условия

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, T \leq x < \infty \quad (1.2)$$

Гармоническую функцию $\Phi(x, y, t)$ представим в следующей форме:

$$\Phi = (\varphi^* + \varphi^{**} + \varphi_-) e^{jkt} \quad \text{при } y < 0, \quad \Phi = \varphi_+ e^{jkt} \quad \text{при } y > 0 \quad (1.3)$$

где $\varphi^{**} = -jhc \exp[-\nu(x-jy)]$, умноженное на $\exp jkt$, — потенциал отраженных волн, а гармонические функции φ_- и φ_+ определяют дифрагированное волновое движение.

Из условий (1.2) для функций φ_- и φ_+ имеем

$$\frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial x} + \nu \varphi_{\pm} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, T \leq x < \infty \quad (1.4)$$

Кроме того, из непрерывности функций Φ и $\partial \Phi / \partial y$ на отрезке $y = 0, 0 \leq x \leq T$ получаем

$$\varphi_+ - \varphi_- = -2jhc e^{-\nu x} \quad \text{при } y = 0, 0 \leq x \leq T \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_+}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_-}{\partial y} \quad \text{при } y = 0, 0 \leq x \leq T \quad (1.6)$$

Для удовлетворения условия (1.6) положим

$$\varphi_-(x, y) = -\varphi_+(x, -y) \quad (1.7)$$

тогда условие (1.5) примет вид:

$$\varphi_+ = -j \quad \text{при } y=0, 0 \leq x \leq T \quad (1.8)$$

Кроме перечисленных условий, потребуем, чтобы для функции φ_+ существовало асимптотическое выражение

$$\varphi_+(x, y) = Ae^{-\nu(x+jy)} \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

Это условие соответствует тому факту, что дифрагированные волны расходятся по обе стороны от пластины.

Введем в рассмотрение функции W_+ и F комплексного переменного $z = x + iy$:

$$W_+ = \varphi_+ + i\psi_+, \quad F = R + iS = \frac{dW_+}{dz} + \nu W_+ \quad (1.10)$$

На основании (1.4) функция ψ_+ на пластине обращается в постоянную, которую обозначим ψ_0 . Поэтому из условий (1.4) и (1.8) имеем

$$\begin{aligned} R &= 0 & \text{при } x=0 \\ R &= 0 & \text{при } y=0, 0 \leq x \leq T \\ S &= \nu\psi = \nu\psi_0 & \text{при } y=0, T \leq x < \infty \end{aligned} \quad (1.11)$$

Полученные условия позволяют аналитически продолжить функцию F на всю плоскость Z , причем R продолжается нечетно, а S — четно.

При помощи отображения $Z = T/\zeta$ перейдем к плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. В этой плоскости на основании (1.11) получим

$$R = 0 \quad \text{при } |\xi| > 1, \eta = 0, \quad S = \nu\psi_0 \quad \text{при } |\xi| < 1, \eta = 0 \quad (1.12)$$

Теперь функцию F можно определить так же, как в работе [1]:

$$F = -iv\psi_0 \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}, \quad \text{или} \quad F = -iv\psi_0 \frac{T - \sqrt{T^2 - Z^2}}{\sqrt{T^2 - Z^2}} \quad (1.13)$$

Рассматривая (1.10) как уравнение относительно W_+ , будем иметь

$$W_+ = e^{-\nu z} \left[(A_1 + iA_2)e^{\nu T} + \int_T^z F e^{\nu z} dz \right] \quad (1.14)$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования

Для их определения положим $Z = T$, тогда

$$\varphi_+(T, 0) + i\psi(T, 0) = A_1 + iA_2 \quad (1.15)$$

Отсюда на основании (1.4) и (1.8) получаем

$$A_1 = -jhc e^{-\nu T}, \quad A_2 = \psi_0 \quad (1.16)$$

Выражение для W_+ содержит поэтому только одну неизвестную постоянную ψ_0 . Произведя в (1.14) интегрирование, окончательно имеем

$$W_+ = e^{-\nu z} \left[-jhc - iv\psi_0 T \int_T^z \frac{e^{\nu z}}{\sqrt{T^2 - Z^2}} dz \right] + i\psi_0 \quad (1.17)$$

Из (1.17) получаем следующее асимптотическое представление

$$W_+ = e^{-\nu z} \left[-jhc - i\nu\psi_0 T \int_T^{i\infty} \frac{e^{\nu z} dz}{\sqrt{T^2 - Z^2}} \right] + i\psi_0 \quad \text{при } z \rightarrow i\infty \quad (1.18)$$

Так как интеграл по четверти окружности L (фиг. 2) обращается в нуль при $R \rightarrow \infty$, то путь интегрирования можно заменить интервалами $(T, -T)$ и $(-T, -\infty)$, тогда

$$W_+ = (B_1 + iB_2) e^{-\nu z} + i\psi_0 \quad (1.19)$$

где

$$B_1 + iB_2 = -jhc - i\nu\psi_0 T \left(\int_T^{-T} \frac{e^{\nu z} dz}{\sqrt{T^2 - Z^2}} + \int_{-T}^{-\infty} \frac{e^{\nu z} dz}{\sqrt{T^2 - Z^2}} \right) \quad (1.20)$$

Интегральные слагаемые в (1.20) выражаются через функции Бесселя I_0 и K_0 от мнимого аргумента.

Из (1.19) получаем

$$\varphi_+ = e^{-\nu x} (B_1 \cos \nu y + B_2 \sin \nu y) \quad (1.21)$$

и условие (1.9) будет удовлетворено, если положить $B_1 = jB_2 = A$. Из этих равенств и (1.20) определим ψ_0 и A :

$$\psi_0 = \frac{jhc}{\nu T [K_0(\nu T) - j\pi I_0(\nu T)]}, \quad A = j\nu T \psi_0 \pi I_0(\nu T) \quad (1.22)$$

2. Изучим эффект дифракции бегущих волн по поверхности жидкости. Для этого воспользуемся уравнением для возвышения уровня жидкости $\zeta = (1/g)(\partial\Phi/\partial t)$, из которого на основании (1.3) и (1.7) имеем

$$\begin{aligned} \zeta &= j \frac{k}{g} \varphi_+(0, y) e^{jkt} \quad \text{при } y > 0 \\ \zeta &= h e^{j(k t - \nu y)} + h e^{j(k t + \nu y)} - j \frac{k}{g} \varphi_+(0, -y) e^{jkt} \quad \text{при } y < 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

В соответствии с (1.9) получаем следующие асимптотические формулы:

$$\zeta_{\infty} = j \frac{k}{g} A e^{j(k t - \nu y)} \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

$$\zeta_{-\infty} = h e^{j(k t - \nu y)} + \left(h - j \frac{k}{g} A \right) e^{j(k t + \nu y)} \quad \text{при } y \rightarrow -\infty \quad (2.3)$$

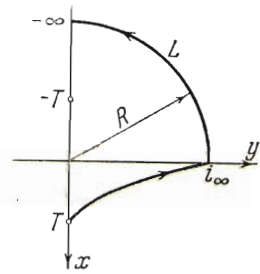
Формулу (2.2) представим в виде

$$\zeta_{\infty} = r \cos(k t - \theta - \nu y) \quad (2.4)$$

где r и θ на основании (1.23) определяются из выражений

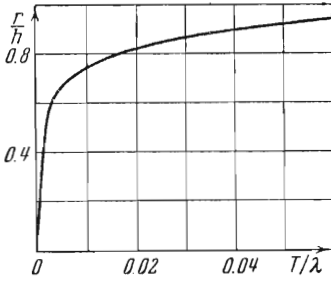
$$r = \frac{h\pi I_0(\nu T)}{\sqrt{K_0^2(\nu T) + \pi^2 I_0^2(\nu T)}}, \quad \text{tg } \theta = \frac{K_0(\nu T)}{\pi I_0(\nu T)} \quad (2.5)$$

На фиг. 3 и 4 даны графики для r/h и θ в зависимости от T/λ . Из этих графиков и расчетов следует, что при $T/\lambda = 0.003$ имеем $r/h = 0,61$ и $\theta = 52^\circ$, а при $T/\lambda = 0.165$ имеем $r/h = 0.95$ и $\theta = 19^\circ$. Следовательно, при значении T , составляющем 6.5% длины волны, имеет место полное прохождение набегающих волн и отсутствует эффект отражения.

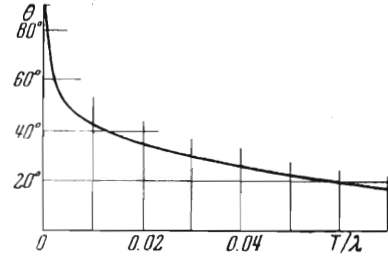


Фиг. 2

Проведем теперь вычисление возвышения свободной поверхности при всех $y > 0$. Для этого положим $x = 0$ и расчленим путь интегрирования (T, iy) в формуле (1.17)



Фиг. 3



Фиг. 4

на части $(T, 0)$ и $(0, iy)$. Отделяя в формуле (1.17) действительную часть, получим

$$\begin{aligned} \varphi_+(0, y) = & \left(-j h c + v \psi_0 T \int_0^{y/T} \frac{\cos v T \xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} d\xi \right) \cos v y + \\ & + v \psi_0 T \left(\int_{-1}^0 \frac{e^{-v T \xi}}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi + \int_0^{y/T} \frac{\sin v T \xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} d\xi \right) \sin v y \end{aligned} \quad (2.6)$$

и, подставляя в (2.1), находим

$$\begin{aligned} \zeta = & \left[\left(h - \frac{h}{K_0(vT) - j\pi I_0(vT)} \int_0^{y/T} \frac{\cos v T \xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} d\xi \right) \cos v y - \right. \\ & \left. - \frac{h}{K_0(vT) - j\pi I_0(vT)} \left(\int_{-1}^0 \frac{e^{-v T \xi}}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi + \int_0^{y/T} \frac{\sin v T \xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} d\xi \right) \sin v y \right] e^{jkt} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Первый и третий интегралы в (2.7) после замены $\xi = \text{sh } \theta$ примут вид:

$$\int_0^{\vartheta} \cos(vT \text{ sh } \theta) d\theta, \quad \int_0^{\vartheta} \sin(vT \text{ sh } \theta) d\theta \quad \left(\vartheta = \text{arc sh } \frac{y}{T} \right)$$

Для вычисления этих интегралов воспользуемся разложением [2]

$$\exp \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) z \right] = J_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} [t^k + (-t)^{-k}] J_k(z) \quad (2.8)$$

в котором положим $t = \exp \theta$ и $z = ivT$, тогда

$$e^{ivT \text{ sh } \theta} = J_0(ivT) + \sum_{k=1}^{\infty} [e^{k\theta} + (-1)^{-k} e^{-k\theta}] J_k(ivT)$$

Отделяя здесь действительную и мнимую части и подставляя в приведенные выше интегралы, получим

$$\int_0^{\vartheta} \cos(vT \text{ sh } \theta) d\theta = \text{arc sh } \frac{y}{T} I_0(vT) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \text{sh} \left(2n \text{ arc sh } \frac{y}{T} \right) I_{2n}(vT)$$

$$\int_0^{\vartheta} \sin(vT \text{ sh } \theta) d\theta = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(h \left[(2n+1) \text{ arc sh } \frac{y}{T} \right] - 1 \right) I_{2n+1}(vT)$$

Здесь обозначено $\vartheta = \text{arc sh } \frac{y}{T}$.

Полученные ряды быстро сходятся только при $y/T < 1$ (для вычисления интегралов достаточно ограничиться тремя членами разложения).

Что касается второго интеграла в (2.7), то его значение легко вычислить аналогично после замены $\xi = -\sin \theta$ (при этом в (2.8) следует положить $t = \exp i\theta$ и $z = -ivT$).

Для вычисления ζ при $y/T > 1$ преобразуем формулу (2.7). При $y \rightarrow \infty$ она примет вид:

$$\zeta_{\infty} = \left[\left(h - \frac{h}{K_0(vT) + j\pi I_0(vT)} \int_0^{\infty} \frac{\cos vT\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi \right) \cos vy - \right. \\ \left. - \frac{h}{K_0(vT) - j\pi I_0(vT)} \left(\int_{-1}^0 \frac{e^{-vT\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi - \int_0^{\infty} \frac{\sin vT\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi \right) \sin vy \right] e^{jkt} \quad (2.9)$$

Преобразуем третий интеграл в (2.9):

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin vT\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi = \text{Im} \int_0^{\infty} \frac{e^{ivT\xi}}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi = \text{Im} i \int_0^{\infty} \frac{e^{-vT\eta}}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta$$

заменяя путь интегрирования аналогично тому, как это было сделано при получении (1.20), имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin vT\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi = \int_0^1 \frac{e^{-vT\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi$$

Подставив полученный интеграл в (2.9), легко преобразовать (2.9) к (2.4).

Разбивая теперь в (2.7) путь интегрирования $(0, y/T)$ на два участка $(0, \infty)$ и $(\infty, y/T)$, будем иметь

$$\zeta = \zeta_{\infty} + \frac{r}{\pi I_0(vT)} \left(\int_{\infty}^{y/T} \frac{\cos vT\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi \cos vy + \right. \\ \left. + \int_{\infty}^{y/T} \frac{\sin vT\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi \sin vy \right) \exp \left[j \left(kt - \theta - \frac{1}{2} \pi \right) \right] \quad (2.10)$$

причем при больших $y/T > 1$

$$\int_{\infty}^{y/T} \frac{\cos vT\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi \approx \text{Ci}(vy), \quad \int_{\infty}^{y/T} \frac{\sin vT\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi \approx \text{Si}(vy)$$

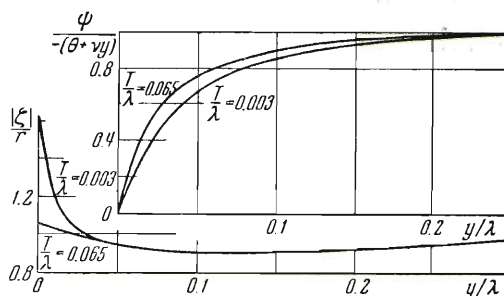
Формулы (2.7) и (2.10) дают возможность вычислить амплитуду колебаний $|\zeta|$ и сдвиг по фазе ψ .

На фиг. 5 изображены графики функций

$$\frac{|\zeta|}{r}, \quad \Psi = \frac{-\psi}{\theta + vy}$$

в зависимости от y/λ при двух значениях T/λ .

Из этих графиков следует, что характер колебаний уровня жидкости, начиная со значений $y = 0.3\lambda$, определяется асимптотической формулой (2.2).



Фиг. 5

3. Произведем вычисление давлений на пластине. На основании формулы

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho g x \quad (3.1)$$

для разности давлений $\Delta p = p_- - p_+$ получим

$$\Delta p = -j\rho k (\varphi^* + \varphi^{**} + \varphi_- - \varphi_+)_{y=0} e^{jkt} \quad (3.2)$$

Подставив в (3.2) значения φ^* , φ^{**} , φ_- и φ_+ , имеем окончательно

$$\Delta p = \frac{2\rho g r e^{-\nu x}}{\pi J_0(\nu T)} \int_1^{x/T} \frac{e^{\nu T \eta}}{V \eta^2 - 1} d\eta \exp \left[j \left(kt - \theta + \frac{1}{2} \pi \right) \right] \quad (3.3)$$

Обозначим через P отношение $\frac{|\Delta p|}{2\rho g h}$, тогда

$$P = \frac{r}{\pi J_0(\nu T) h e^{\nu x}} \int_1^{x/T} \frac{e^{\nu T \eta}}{V \eta^2 - 1} d\eta \quad (3.4)$$

Заменяя под интегралом $1/V \eta^2 - 1$ степенным рядом, получим

$$P = \frac{r}{\pi J_0(\nu T) h e^{\nu x}} \left(\int_1^{x/T} \frac{e^{\nu T \eta}}{\eta^2} d\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \int_1^{x/T} \frac{e^{\nu T \eta}}{\eta^{2(n+1)}} d\eta \right) \quad (3.5)$$

Интегралы в (3.5) выражаются через интегральную показательную функцию.

Результаты расчетов представлены на фиг. 6, где

$$X = \frac{x - T}{\lambda}.$$

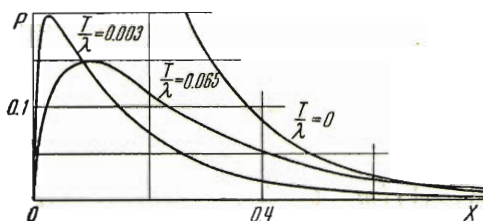
Из этих графиков видно, что при малых T/λ максимум давления расположен вблизи кромки пластины, а затем давление быстро убывает. С ростом T/λ максимум давления уменьшается и отдален от верхней кромки вниз.

На фиг. 6 приведена также предельная кривая для $T/\lambda = 0$ соответствующая полному отражению набегающих волн, при котором $P = e^{-\nu x}$.

Поступила 31 X 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Давление волн на заграждение. Инженерный сборник, т. IV, вып. 2, 1948.
2. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. ГТТИ, 1935.



Фиг. 6