Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ФОРМУЛАХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ ТЕЛ, ПОГРУЖЕННЫХ В ЖИДКОСТЬ

А. А. Костюков

(Одесса)

Исходя из известных в гидродинамике общих формул для сил воздействия жидкости на тело, даются выражения волнового сопротивления и подъемной силы для гидромеханических особенностей и тела произвольной формы при их движении в жидкости конечной и бесконечной глубины; приводятся выражения для моментов гидродинамических сил, действующих на тело.

§ 1. Общие формулы для гидродинамических сил воздействия жидкости на тело. Пусть в потоке тяжелой жидкости, движущейся в каком-то водоеме, имеется источник, закрепленный в точке (ξ, η, ζ). Движение жидкости считаем установившимся и потенциальным. Потенциал скоростей источника представим в виде

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi r} + F_1(x, y, z) \tag{1.1}$$

Здесь Q — интенсивность источника, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ — расстояние от точки (x, y, z) пространства до точки (ξ, η, ζ), функция $F_1(x, y, z)$ — гармоническая во всем пространстве водоема жидкости, включая и точку (ξ, η, ζ). Эту функцию будем представлять в виде

$$F_1(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi} K(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \tag{1.2}$$

Рассмотрим теперь тело, ограниченное поверхностью S, на которое набегает поток жидкости. Потенциал скоростей, вызванных этим телом, можно записать аналогично формуле (1.1)

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{q(\xi, \eta, \zeta)}{r} dS + F(x, y, z) \tag{1.3}$$

Здесь $q(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность источников, распределенных по поверхности тела S; функция $F(x, y, z)$ — гармоническая во всем пространстве водоема жидкости, включая объем внутри поверхности S. Функцию $F(x, y, z)$ согласно (1.2) запишем

$$F(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_S K(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\, q(\xi, \eta, \zeta)\, dS \tag{1.4}$$

Применяя закон количества движения, можно получить следующего вида формулу для гидродинамической силы воздействия жидкости на тело:

$$\mathbf{P} = -\rho \int_S q(\xi, \eta, \zeta) \operatorname{grad} F(\xi, \eta, \zeta)\, dS \tag{1.5}$$

где ρ — массовая плотность жидкости.

Формула (1.5) не учитывает подъемной силы Архимеда, равной

$$A_{st} = \rho g V \tag{1.6}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, V — объем, заключенный внутри поверхности S.

Равенство (1.5) позволяет условно считать, что на изолированный источник помещенный в точке (ξ, η, ζ), действует сила, равная

$$\mathbf{P} = -\rho Q \operatorname{grad} F_1(\xi, \eta, \zeta) \tag{1.7}$$

Совершенно аналогичным путем может быть найдено выражение для силы воздействия жидкости на диполь, расположенный в точке (ξ, η, ζ) данного водоема. Пусть m — момент диполя в направлении оси x; тогда

$$\mathbf{P} = \rho \frac{m^2}{Q} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \operatorname{grad} F_1(x, y, z) \right]_{x=\xi,\ y=\eta,\ z=\zeta} \tag{1.8}$$

Формулы для момента сил воздействия жидкости на тело могут быть получены на основании закона моментов количества движения. Так, для момента $\mathbf{M}_0$ гидродинамических давлений относительно начала координат имеем

$$\mathbf{M}_0 = -\rho \int_S q(\xi, \eta, \zeta)(\mathbf{r}_0 \times \operatorname{grad} F(\xi, \eta, \zeta))\, dS \qquad (\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}\xi + \mathbf{j}\eta + \mathbf{k}\zeta) \tag{1.9}$$

Приведенные формулы могут быть применены для вычисления волнового сопротивления и подъемной силы, а также моментов сил, действующих на тело, погруженное в жидкость на некоторую глубину. Так, если тело движется поступательно, прямолинейно и равномерно в направлении оси x и оси координат неизменно связаны с телом, то для волнового сопротивления тела согласно (1.5) имеем

$$R_w = -\rho \int_S q(\xi, \eta, \zeta) \operatorname{grad}_x F(\xi, \eta, \zeta)\, dS \tag{1.10}$$

для подъемной силы на основании (1.5) и (1.6) получаем (ось z направлена вверх)

$$A = \rho g V - \rho \int_S q(\xi, \eta, \zeta) \operatorname{grad}_z F(\xi, \eta, \zeta)\, dS \tag{1.11}$$

Входящая в эти формулы функция плотности источников $q(x, y, z)$ находится как решение интегрального уравнения, составленного исходя из граничного условия для потенциала скоростей $\varphi(x, y, z)$ на поверхности тела.

§ 2. Потенциал скоростей источника, расположенного под свободной поверхностью жидкости. Пусть в точке (ξ, η, ζ) под свободной поверхностью идеальной тяжелой несжимаемой и однородной жидкости находится источник интенсивности Q. Прямоугольные оси координат выбираем так, чтобы оси x и y лежали на свободной поверхности жидкости в состоянии ее покоя, а ось z была направлена по вертикали вверх. Скорость равномерного движения источника v направим вдоль оси x. Систему координатных осей считаем перемещающейся вместе с источником. Движение жидкости предполагается безвихревым. Амплитуды волн, образуемых движущимся источником, принимаются достаточно малыми.

Пользуясь методом Н. Е. Кочина [1], М. Д. Хаскинд [2] получил следующее выражение для потенциала скоростей источника при конечной глубине жидкости h:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int\limits_{0\,(L_1)}^{\infty} f(\lambda, \theta)\, e^{i\lambda[(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta]}\, d\lambda\, d\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int\limits_{0\,(L_2)}^{\infty} f(\lambda, \theta)\, e^{-i\lambda[(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta]}\, d\lambda\, d\theta \right] \tag{2.1}$$

Здесь

$$r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta+2h)^2} \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda[z+\zeta+2h - i(x-\xi)\cos\theta - i(y-\eta)\sin\theta]}\, d\lambda\, d\theta \tag{2.3}$$

$$f(\lambda, \theta) = \frac{e^{-\lambda h}(\nu + \lambda\cos^2\theta)\operatorname{ch}\lambda(z+h)\operatorname{ch}\lambda(\zeta+h)}{\nu \operatorname{sh}\lambda h - \lambda\cos^2\theta \operatorname{ch}\lambda h} \qquad \left(\nu = \frac{g}{v^2}\right) \tag{2.4}$$

Кривые L_1 и L_2 соединяют точки $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ и обходят особую точку $\lambda_0(\theta)$ соответственно с верхней и нижней стороны.

Особая точка $\lambda_0(\theta)$ является действительным и положительным корнем трансцендентного уравнения

$$\nu \operatorname{sh} \lambda h - \lambda \cos^2 \theta \operatorname{ch} \lambda h = 0$$

или

$$\operatorname{th} u = \frac{\cos^2 \theta}{\nu h} u \qquad (u = \lambda h) \tag{2.5}$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень для каждого θ при

$$\nu h / \cos^2 \theta > 1$$

При $\nu h / \cos^2 \theta < 1$ уравнение (2.5) имеет чисто мнимые корни.

Рассматривая сумму последних двух слагаемых равенства (2.1) и вычисляя вычеты функции при обходе особой точки $\lambda_0(\theta)$, находим

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + N_1(x-\xi,\ y-\eta,\ z,\ \zeta) + N_2(x-\xi,\ y-\eta,\ z,\ \zeta)\right] \tag{2.6}$$

Здесь

$$N_1 = \operatorname{Re} 2i\nu \int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{ch} \lambda_0 (z+h) \operatorname{ch} \lambda_0 (\zeta + h)}{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 h - \nu h / \cos^2 \theta} e^{i\lambda_0 [(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta]} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \tag{2.7}$$

$$N_2 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{v. p.} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda h}(\nu + \lambda\cos^2\theta)\operatorname{ch}\lambda(z+h)\operatorname{ch}\lambda(\zeta+h)}{\nu \operatorname{sh}\lambda h - \lambda\cos^2\theta \operatorname{ch}\lambda h} \times$$
$$\times e^{i\lambda[(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta]}\, d\lambda\, d\theta \tag{2.8}$$

$$\lambda_0 = \frac{\nu}{\cos^2\theta} \operatorname{th} \lambda_0 h \tag{2.9}$$

Если в формуле (2.6) устремить $h \to \infty$, то имеем

$$\lambda_0 = \frac{\nu}{\cos^2\theta}, \qquad \frac{1}{r_1} \to 0, \qquad N_1 = K_1, \qquad N_2 = -\frac{1}{r'} + K_2$$

где

$$K_1 = \operatorname{Re} 2i\nu \int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \exp\left\{\frac{\nu}{\cos^2\theta}[z + \zeta + i(x-\xi)\cos\theta + i(y-\eta)\sin\theta]\right\}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \tag{2.10}$$

$$K_2 = \frac{2\nu}{\pi} \operatorname{Re} \int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{v. p.} \int\limits_0^\infty e^{\lambda[z+\zeta+i(x-\xi)\cos\theta + i(y-\eta)\sin\theta]} \frac{d\lambda\, d\theta}{\nu - \lambda\cos^2\theta} \tag{2.11}$$

$$r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^\infty e^{\lambda[z+\zeta+i(x-\xi)\cos\theta+i(y-\eta)\sin\theta]}\, d\lambda\, d\theta \tag{2.12}$$

так как $z + \zeta < 0$.

Эти формулы представляют собой простое видоизменение формул Н. Е. Кочина [1], как это легко установить заменой переменной λ на $\nu(1-\lambda)/\cos^2\theta$.

Для случая движения источника при безграничной глубине жидкости выражение потенциала скоростей может быть найдено также из формулы Мичелля для потенциала скоростей потока, вызванного движущимся «тонким» судном [3].

Путем ряда преобразований можно показать тождественность формул Кочина и Мичелля для потенциальной функции и в результате получим для функции K_2

другое выражение:

$$K_2 = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \left[\cos p(z+\zeta) + \frac{m^2}{\nu p}\sin p(z+\zeta)\right]\frac{e^{-\sqrt{m^2+p^2}\,(y-\eta)}}{\sqrt{m^2+p^2}}\,\frac{\cos m(x-\xi)}{1+m^4/\nu^2p^2}\,dm\,dp +$$

$$+\frac{4}{\nu}\int\limits_0^\nu \frac{m}{\sqrt{1-m^2/\nu^2}}\exp\left[\frac{m^2(z+\zeta)}{\nu} - m\sqrt{1-\frac{m^2}{\nu^2}}\,(y-\eta)\right]\cos m(x-\xi)\,dm -$$

$$-\frac{4}{\nu}\int\limits_\nu^\infty \frac{m}{\sqrt{m^2/\nu^2-1}}\exp\frac{m^2(z+\zeta)}{\nu}\sin\left[m\sqrt{m^2/\nu^2-1}\,(y-\eta)\right]\cos m(x-\xi)\,dm \tag{2.13}$$

причем $(y-\eta)$ рассматривается по абсолютной величине.

§ 3. Волновое сопротивление и подъемная сила тела произвольной формы, погруженного в жидкость. Систему координатных осей сохраняем прежней, считаем ее перемещающейся вместе с телом в направлении положительной оси x. Рассмотрим сначала движение тела при конечной глубине жидкости. Функция $F(x, y, z)$ согласно (1.4) и (2.6) равна

$$F(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left[\frac{1}{r_1} + N_1(x-\xi, y-\eta, z, \zeta) + N_2(x-\xi, y-\eta, z, \zeta)\right] q(\xi, \eta, \zeta)\,dS \tag{3.1}$$

Составляющие скорости будут

$$v_x(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}, \qquad v_z(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} \tag{3.2}$$

Найдем волновое сопротивление тела по формуле (1.10). Замечая, что интегралы

$$\int\limits_S\int\limits_S \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_1}\,q(x, y, z)\,q(\xi, \eta, \zeta)\,dS_P\,dS_Q, \qquad \int\limits_S\int\limits_S \frac{\partial N_2}{\partial x}\,q(x, y, z)\,q(\xi, \eta, \zeta)\,dS_P\,dS_Q$$

где $P(x, y, z)$ и $Q(\xi, \eta, \zeta)$ — точки, взятые на поверхности тела S, равны нулю, так как функции $\partial r_1^{-1}/\partial x$ и $\partial N_2/\partial x$ — нечетные по отношению к аргументу $x-\xi$, а также пользуясь формулой (2.9), для λ_0 находим

$$R_w = -\frac{\rho v^2}{2\pi}\int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} |G(\lambda_0, \theta)|^2\,\frac{\mathrm{th}\,\lambda_0 h}{\mathrm{ch}^2\lambda_0 h - \nu h/\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^3\theta} \tag{3.3}$$

Здесь

$$H_h(k, \theta) = \int\limits_S q(x, y, z)\,e^{k(z+h+ix\cos\theta+iy\sin\theta)}\,dS \tag{3.4}$$

$$G(k, \theta) = \frac{1}{2}\left[H_h(k, \theta) + \overline{H_h(-k, \theta)}\right]dS \tag{3.5}$$

Аналогичным путем найдется сила бокового сопротивления тела:

$$R_y = -\frac{\rho v^2}{2\pi}\int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} |G(\lambda_0, \theta)|^2\,\frac{\mathrm{th}\,\lambda_0 h\sin\theta}{\mathrm{ch}^2\lambda_0 h - \nu h/\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^4\theta} \tag{3.6}$$

Для тела, симметричного относительно плоскости xz, $H_h(k, \theta)$ будет четной функцией от θ. Поэтому для судов $R_y = 0$, а

$$R_w = -\frac{\rho v^2}{\pi}\int\limits_{\theta_0}^{1/2\pi} |G(\lambda_0, \theta)|^2\,\frac{\mathrm{th}\,\lambda_0 h}{\mathrm{ch}^2\lambda_0 h - \nu h/\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^3\theta} \tag{3.7}$$

где θ_0 должно быть взято равным: $\theta_0 = 0$ при $\nu h > 1$, т. е. когда $v < \sqrt{gh}$ и

$\cos^2\theta_0 = \nu h$ или $\theta_0 = \arccos\sqrt{\nu h}$ при $\nu h < 1$, т. е. когда $v > \sqrt{gh}$ (значение $v_* = \sqrt{gh}$ называется критической скоростью, соответствующей данной глубине жидкости).

Для подъемной силы, действующей на корабль произвольной формы, находим выражение [1]

$$A = \rho g V - \frac{\rho}{4\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty} |H_h(-\lambda,\theta)|^2 \lambda\, d\lambda\, d\theta -$$

$$-\frac{\rho\nu^2}{2\pi}\int\limits_{\theta_0}^{{}^1\!/_2\pi} \frac{\operatorname{Im}[H_h(\lambda_0,\theta)\, H_h(-\lambda_0,\theta)]}{\operatorname{ch}^2\lambda_0 h - \nu h/\cos^2\theta}\,\frac{\operatorname{th}\lambda_0 h}{\cos^4\theta}\, d\theta +$$

$$+\frac{\rho}{4\pi^2}\int\limits_0^{{}^1\!/_2\pi} \text{v. p.}\int\limits_0^{\infty}\{|H_h(\lambda,\theta)|^2 - |H_h(-\lambda,\theta)|^2\}\,\frac{e^{-\lambda h}(\nu + \lambda\cos^2\theta)}{\nu\operatorname{sh}\lambda h - \lambda\cos^2\theta\operatorname{ch}\lambda h}\,\lambda\, d\lambda\, d\theta \qquad (3.8)$$

Найдем теперь момент сил воздействия потока на судно. Для этого, обращаясь к формуле (1.9), замечаем, что, так как центр тяжести объема судна C (так называемый центр величины корабля) лежит в его диаметральной плоскости,

$$M_x = 0, \qquad M_z = 0.$$

Таким образом, остается определить лишь момент сил относительно оси y (так называемый дифферентующий момент корабля M_y).

В дополнение к функциям $H_h(k,\theta)$ и $G(k,\theta)$, определяемым выражениями (3.4) и (3.5), введем в рассмотрение новые функции:

$$H_{h_1}(k,\theta) = \int\limits_S q(x,y,z)\, e^{k(z+h+ix\cos\theta+iy\sin\theta)}(z\cos\theta - ix)\, dS \qquad (3.9)$$

$$G_1(k,\theta) = \int\limits_S q(x,y,z)\operatorname{ch}k(z+h)\, e^{ik(x\cos\theta+y\sin\theta)}[z\cos\theta + ix\operatorname{th}k(z+h)]\, dS \qquad (3.10)$$

Тогда момент M_y запишется (с учетом подъемной силы Архимеда)

$$M_y = -\rho g V x_c + \frac{\rho}{4\pi}\operatorname{Re}\Bigg\{\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty} H_{h_1}(-\lambda,\theta)\,\overline{H_h(-\lambda,\theta)}\,\lambda d\lambda\, d\theta -$$

$$-4\nu^2\int\limits_{\theta_0}^{{}^1\!/_2\pi}\frac{\operatorname{th}\lambda_0 h}{\operatorname{ch}^2\lambda_0 h - \nu h/\cos^2\theta}\, G_1(\lambda_0,\theta)\, G(-\lambda_0,\theta)\,\frac{d\theta}{\cos^4\theta} +$$

$$+\frac{4i}{\pi}\int\limits_0^{{}^1\!/_2\pi}\text{v. p.}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda h}(\nu+\lambda\cos^2\theta)}{\nu\operatorname{sh}\lambda h - \lambda\cos^2\theta\operatorname{ch}\lambda h}\, G_1(\lambda,\theta)\, G(-\lambda,\theta)\,\lambda\, d\lambda\, d\theta\Bigg\} \qquad (3.11)$$

Выражения (3.7), (3.8) и (3.11) могут быть преобразованы таким образом, чтобы интегрирование производилось по диаметральной плоскости корабля S_0.

Действительно, функция плотности источников $q(x,y,z)$ может быть найдена как решение интегрального уравнения, составленного исходя из известных свойств нормальной производной потенциала простого слоя и из граничного условия для потенциала скоростей $\varphi(x,y,z)$ на поверхности тела (предполагается, что поверхность тела S имеет непрерывную кривизну):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = v\cos(n,x) \qquad \text{на } S \qquad (3.12)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности тела в рассматриваемой точке.

---

[1] Формулы (3.3) и (3.8) представляют собой видоизменения формул для волнового сопротивления и подъемной силы, указанных в работе М. Д. Хаскинда [2].

Представим функцию $q(x, y, z)$ в виде

$$q(x, y, z) = -\chi_h(x, y, z)\, v \cos(n, x) \tag{3.13}$$

Функция χ_h будет четной относительно диаметральной плоскости судна. В первом приближении[1] можно принимать $\chi_h = \chi$ при $h = \infty$. Далее замечаем, что

$$\cos(n, x) = \frac{\partial y / \partial x}{\sqrt{1 + [\partial y / \partial x]^2 + [\partial y / \partial z]^2}}, \qquad dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz$$

где $y = f(x, z)$ — уравнение судовой поверхности.

Тогда, например, для R_w находим выражение

$$R_w = -\frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int\limits_{\theta_0}^{1/2\,\pi} (I_1^2 + I_2^2) \frac{\operatorname{th} \lambda_0 h}{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 h - \nu h / \cos^2 \theta} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \tag{3.14}$$

где

$$\left.\begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix}\right\} = \iint\limits_{(S_0)} \chi_h(x, y, z) \operatorname{ch} \lambda_0 (z + h) \cos(\lambda_0 y \sin\theta) \left\{\begin{matrix} \cos(\lambda_0 x \cos\theta) \\ \sin(\lambda_0 x \cos\theta) \end{matrix}\right\} \frac{\partial y}{\partial x}\, dx\, dz \tag{3.15}$$

Если судно симметрично относительно плоскости мидельшпангоута, то $I_1 = 0$

Если в формулах (3.14) и (3.15) подставить вместо θ его выражение из (2.9) и положить $\chi_h(x, y, z) \approx 1$, $\cos(\lambda_0 y \sin\theta) \approx 1$, то получим формулы Л. Н. Сретенского [5], М. В. Келдыша и Л. И. Седова[6] для волнового сопротивления «тонкого» корабля на мелководье. Совершенно аналогичным путем могут быть найдены формулы для волнового сопротивления и подъемной силы, испытываемых изолированным источником и диполем. Так, согласно (1.7) для источника имеем

$$R_w = -\frac{\rho Q^2 \nu}{\pi} \int\limits_{\theta_0}^{1/2\,\pi} \frac{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 (\zeta + h)}{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 h - \nu h / \cos^2 \theta} \lambda_0 \frac{d\theta}{\cos\theta} \tag{3.16}$$

$$A_d = \frac{\rho Q^2}{4\pi} \left[-\frac{1}{4(\zeta + h)^2} + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{1/2\,\pi} \text{v. p.} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda h} (\nu + \lambda \cos^2\theta) \operatorname{sh} 2\lambda (\zeta + h)}{\nu \operatorname{sh} \lambda h - \lambda \cos^2 \theta \operatorname{ch} \lambda h} \lambda\, d\lambda\, d\theta\right] \tag{3.17}$$

Для случая движения диполя по формуле (1.8) находим[2]

$$R_w = -\frac{\rho m^2 \nu}{\pi} \int\limits_{\theta_0}^{1/2\,\pi} \frac{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 (\zeta + h)}{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 h - \nu h / \cos^2 \theta} \lambda_0^3 \cos\theta\, d\theta \tag{3.18}$$

$$A_d = -\frac{\rho m^2}{4\pi} \left[\frac{3}{16(\zeta + h)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{1/2\,\pi} \text{v. p.} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda h} (\nu + \lambda \cos^2 \theta) \operatorname{sh} 2\lambda (\zeta + h)}{\nu \operatorname{sh} \lambda h - \lambda \cos^2 \theta \operatorname{ch} \lambda h} \lambda^3 \cos^2 \theta\, d\lambda\, d\theta\right] \tag{3.19}$$

Из равенств (3.18) и (3.19) могут быть непосредственно получены формулы для волнового сопротивления и подъемной силы, приложенных к сфере (шару), находящейся на глубине ζ под свободной поверхностью жидкости, если в эти равенства подставить вместо момента диполя m выражение, связывающее m с радиусом a.

---

[1] Н. Е. Кочиным [1] дано решение интегрального уравнения для определения $q(x, y, z)$ на глубокой воде для случая больших значений ν. Можно получить решение этого уравнения и для случая малых величин ν.

Для приближенной оценки величины χ для судов нами [4] вычислены значения χ для судов-цилиндров с параболической формой ватерлинии и с бесконечной осадкой в предположении достаточно малых скоростей судна.

[2] Задача о волновом сопротивлении диполя рассматривалась Хавелоком [7].

Последнее может быть найдено из условия, что функция тока $\psi = 0$. Приближенно можно найти радиус сферы из условия $\psi = 0$ для случая движения сферы в безграничной среде. Тогда $m = 2\pi v a^3$. Замечая, что гидростатическая подъемная сила, приложенная к сфере, равна

$$A_{st} = \frac{4}{3}\pi\rho g a^3$$

находим

$$R_w = -4\pi\rho g a^6 \int\limits_{\theta_0}^{1/2\pi} \frac{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 (\zeta + h)}{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 h - \nu h / \cos^2\theta} \lambda_0^3 \cos\theta \, d\theta \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} A = \frac{4}{3}\pi\rho g a^3 - \rho\pi v^2 a^6 \Bigg[\frac{3}{16(\zeta+h)^4} - \\ - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{1/2\pi} \text{v.}\ . \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h}(\nu + \lambda\cos^2\theta) \operatorname{sh} 2\lambda(\zeta+h)}{\nu \operatorname{sh}\lambda h - \lambda\cos^2\theta \operatorname{ch}\lambda h} \lambda^3 \cos^2\theta \, d\lambda \, d\theta \Bigg] \end{aligned} \tag{3.21}$$

Если в формулу (3.20) ввести новую переменную $\gamma = \lambda_0(\theta) h$, то она совпадает с выражением для волнового сопротивления сферы, полученным М. Д. Хаскиндом [2].

Легко убедиться в качестве проверки, что из приведенных формул в результате предельного перехода при $h \to \infty$ получаются формулы Н. Е. Кочина [1] для волнового сопротивления и подъемной силы тела, погруженного в жидкость безграничной глубины:

$$R_w = -\frac{\rho\nu^2}{2\pi} \int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \left| H\left(\frac{\nu}{\cos^2\theta}, \theta\right)\right|^2 \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \tag{3.22}$$

$$A = \rho g V - \frac{\rho}{8\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^{\infty} |H(\lambda,\theta)|^2 \lambda \, d\lambda \, d\theta + \frac{\rho\nu}{2\pi^2} \int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \text{v. p.} \int\limits_0^{\infty} |H(\lambda,\theta)|^2 \frac{\lambda \, d\lambda \, d\theta}{\nu - \lambda\cos^2\theta} \tag{3.23}$$

где

$$H(k, \theta) = \int\limits_S q(x, y, z)\, e^{k(z + ix\cos\theta + iy\sin\theta)} \, dS \tag{3.24}$$

Для дифферентующего момента корабля на глубокой воде, если ввести в рассмотрение еще дополнительно функцию

$$H_1(k, \theta) = \int\limits_S q(x, y, z)\, e^{k(z + ix\cos\theta + i\ \sin\theta)} (z\cos\theta + ix)\, dS \tag{3.25}$$

имеем

$$\begin{aligned} M_y = -\rho g V x_c - \frac{\rho}{4\pi} \operatorname{Re} \Bigg\{ \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^{\infty} H_1(\lambda,\theta)\overline{H(\lambda,\theta)}\, \lambda \, d\lambda \, d\theta + \\ + 2\nu^2 \int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} H_1\left(\frac{\nu}{\cos^2\theta}, \theta\right) \overline{H\left(\frac{\nu}{\cos^2\theta}, \theta\right)} \frac{d\theta}{\cos^4\theta} - \\ - \frac{i\nu}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \text{v. p.} \int\limits_0^{\infty} H_1(\lambda,\theta)\overline{H(\lambda,\theta)} \frac{\lambda \, d\lambda \, d\theta}{\nu - \lambda\cos^2\theta} \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Если в формулах (3.14) и (3.15) устремить $h \to \infty$ и положить $\cos(\lambda_0 y \sin\theta) \approx 1$, $\chi(x, y, z) \approx 1$, то после замены переменной $\cos\theta$ на λ^{-1} получим формулу Мичелля в том виде, в каком она обычно и представляется [3].

Из выражений (3.16) и (3.17) легко получаются формулы для сил, действующих на изолированный источник при безграничной глубине жидкости:

$$R_w = -\frac{\rho Q^2 \nu}{\pi} \int_0^{{}^1\!/_2 \pi} \exp \frac{2\nu\zeta}{\cos^2\theta} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \tag{3.27}$$

$$A_d = \frac{\rho Q^2}{4\pi}\left[-\frac{1}{4\zeta^2} + \frac{4\nu}{\pi}\int_0^{{}^1\!/_2 \pi} \text{v. p.} \int_0^\infty \frac{e^{2\lambda\zeta}}{\nu - \lambda\cos^2\theta}\lambda d\lambda\, d\theta\right] \tag{3.28}$$

Если обратиться к формуле (2.13) для K_2, то для подъемной силы источника получаем еще другое выражение:

$$A_d = \frac{\rho Q^2}{4\pi}\left[-\frac{1}{4\zeta^2} + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \left[-p\sin 2p\zeta + \frac{m^2}{\nu}\cos 2p\zeta\right]\frac{1}{\sqrt{m^2+p^2}}\,\frac{1}{1+m^4/\nu^2 p^2}\,dm\,dp + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\nu^2}\int_0^\nu \frac{m^3}{\sqrt{1 - m^2/\nu^2}} \exp\frac{2m^2\zeta}{\nu}\,dm\right] \tag{3.29}$$

Для диполя на глубокой воде согласно формулам (3.18) и (3.19) имеем

$$R_w = -\frac{\rho m^2 \nu^4}{\pi}\int_0^{{}^1\!/_2 \pi} \exp\frac{2\nu\zeta}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{\cos^5\theta} \tag{3.30}$$

$$A_d = -\frac{\rho m^2}{4\pi}\left[\frac{3}{16\zeta^4} - \frac{4\nu}{\pi}\int_0^{{}^1\!/_2 \pi} \text{v. p.}\int_0^\infty \frac{e^{2\lambda\zeta}\lambda^3}{\nu - \lambda\cos^2\theta}\cos^2\theta\, d\lambda\, d\theta\right] \tag{3.31}$$

Наконец, из (3.20) и (3.21) получаем несколько видоизмененные формулы Н. Е. Кочина [1] для волнового сопротивления и полной подъемной силы, испытываемых движущейся сферой при безграничной глубине жидкости:

$$R_w = -4\pi\rho v^2 \nu^4 a^6 \int_0^{{}^1\!/_2 \pi} \exp\frac{2\nu\zeta}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{\cos^5\theta} \tag{3.32}$$

$$A = \frac{4}{3}\pi\rho g a^3 - \rho\pi v^2 a^6\left[\frac{3}{16\zeta^4} - \frac{4\nu}{\pi}\int_0^{{}^1\!/_2 \pi} \text{v. p.}\int_0^\infty \frac{e^{2\lambda\zeta}\lambda^3}{\nu - \lambda\cos^2\theta}\cos^2\theta\, d\lambda\, d\theta\right] \tag{3.33}$$

Поступила 15 IV 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Труды конференции по теории волнового сопротивления. Изд. ЦАГИ, М., 1937. Собр. соч., т. II, стр. 105—182. Изд. АН СССР, 1949.
2. Хаскинд М. Д. Общая теория волнового сопротивления при движении тела в жидкости конечной глубины. ПММ, т. IX, вып. 3, 1945.
3. Michell J. H. The Wave-Resistance of a Ship. Philosophical Magazine, vol. 45, p. 106—123, 1898.
4. Костюков А. А. К вопросу о волнообразовании при движении корабля. ПММ, т. XVII, вып. 3, 1953.
5. Сретенский Л. Н. Теоретическое исследование о волновом сопротивлении, стр. 40—47. Изд. ЦАГИ, 1937.
6. Келдыш М. В., Седов Л. И. Теория волнового сопротивления в канале конечной глубины. Труды конференции по волновому сопротивлению, стр. 143—152. Изд. ЦАГИ, 1937.
7. Havelock T. H. The Calculation of Wave Resistance. Proceedings of the Royal Soc. of London. Ser. A, vol. 144, p. 514—521, 1934.