Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ДВУХ СРЕД

Е. М. Добрышман

(Москва)

В приложениях встречается необходимость решать двухслойную задачу теплопроводности, причем коэффициенты теплопроводности сред существенным образом зависят от координаты. Здесь рассматривается частный случай такой задачи и указывается метод ее решения.

Поместим начало координат на поверхности раздела сред (которую считаем плоской) и ограничимся одномерным случаем. Тогда, обозначая через T_1 и T_2 отклонения от некоторого начального распределения температуры T_1° и T_2° в первой и второй среде соответственно, запишем исходные уравнения задачи в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k_1(x) \frac{\partial T_1}{\partial x} \quad (x \geqslant 0), \qquad \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k_2(x) \frac{\partial T_2}{\partial x} \quad (x \leqslant 0)$$

Здесь t — время, x — координата, $k_1(x)$ и $k_2(x)$ — коэффициенты температуропроводности первой и второй среды.

Примем однородные начальные условия

$$T_1 = T_2 = 0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

В качестве граничных условий примем отсутствие скачка температуры на границе раздела:

$$T_1 = T_2 \quad \text{при} \quad x \to 0$$

Затем условие теплового баланса, показывающее расход подводящегося к поверхности раздела тепла $W(t)$:

$$-\lim_{x\to+0} \lambda_1(x) \frac{\partial T_1}{\partial x} + \lim_{x\to-0} \lambda_2(x) \frac{\partial T_2}{\partial x} + hT_1\Big|_{x=0} = W(t)$$

и, наконец, затухание температурных отклонений при $|x| \to \infty$:

$$T_1 \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty, \qquad T_2 \to 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty$$

Через $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$ обозначены коэффициенты теплопроводности первой и второй среды. При этом

$$k_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i} \qquad (i = 1, 2)$$

где c_i — удельная теплоемкость среды — в случае газа при постоянном давлении, ρ_i — плотность среды, h — коэффициент, определяемый характером задачи.

В метеорологии, например, условие баланса расшифровывается так: заданный приток тепла к поверхности почвы расходуется на нагревание воздуха и почвы посредством теплопроводности

$$\left(-\lim_{x\to+0} \lambda_1(x) \frac{\partial T_1}{\partial x} + \lim_{x\to-0} \lambda_2(x) \frac{\partial T_2}{\partial x}\right)$$

и длинноволновое тепловое излучение с поверхности почвы (hT_1).

Напомним, что здесь речь идет об изменениях температуры, а не о самой температуре, причем

$$|T_1| \ll |T_1^\circ|, \qquad |T_2| \ll |T_2^\circ|$$

Потому изменение энергии излучения можно считать пропорциональным отклонению температуры[1].

Относительно функции $W(t)$ сделаем предположение, что она разлагается в ряд

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{1/2 n} \tag{1}$$

Что же касается функций $k_i(x)$ и $\lambda_i(x)$, то по физическому смыслу они положительны и ограничены. Здесь нам достаточно потребовать, чтобы

$$u_i = \int_0^x \frac{dx}{k_i(x)} < \infty \qquad (i = 1, 2)$$

при любом фиксированном x и, кроме того, рассматривая x как функцию u и $k_i(x) = \varphi_i(u)$, чтобы $\varphi_i(u)$ представлялось сходящимся рядом Тейлора

$$\varphi_i(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(i)} u^n, \qquad \alpha_0^{(i)} \neq 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

Физический смысл условия $\alpha_0^{(i)} \neq 0$ заключается в том, что коэффициент температуропроводности не обращается в нуль на границе раздела ни в одной из сред.

Для решения задачи введем новые независимые переменные

$$s = 2\sqrt{t}, \qquad y = \frac{1}{2\sqrt{t}} \int_0^x \frac{dx}{k_1(x)} \qquad (x > 0)$$

$$s = 2\sqrt{t}, \qquad z = -\frac{1}{2\sqrt{t}} \int_0^x \frac{dx}{k_2(x)} \qquad (x \leqslant 0)$$

В новых переменных исходные уравнения, начальные и граничные условия с учетом (1) и (2) примут вид:

$$\begin{aligned} 2\left[s\frac{\partial T_1}{\partial s} - y\frac{\partial T_1}{\partial y}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(1)} s^n y^n &= \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \\ 2\left[s\frac{\partial T_2}{\partial s} - z\frac{\partial T_2}{\partial z}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(2)} s^n z^n &= \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{3}$$

$$T_1 = T_2 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \qquad T_1 = T_2 \quad \text{при} \quad y = z = 0$$

$$-\lim_{y\to 0} \frac{\lambda_1}{k_1}\frac{\partial T_1}{\partial y} - \lim_{z\to 0}\frac{\lambda_2}{k_2}\frac{\partial T_2}{\partial z} + hsT_1\Big|_{y=0} = s\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \quad \text{при } y = z = 0$$

$$T_1 = T_2 = 0 \quad \text{при } y = z = \infty$$

В силу ограничений, наложенных на функции $k_i(x)$:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\lambda_1(sy)}{k_1(sy)} = \text{const} = \frac{\lambda_0^{(1)}}{\alpha_0^{(1)}}, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{\lambda_2(sz)}{k_2(sz)} = \text{const} = \frac{\lambda_0^{(2)}}{\alpha_0^{(2)}}$$

Поэтому можно уменьшить число параметров задачи, вводя переменные по формулам

$$\tau = \frac{hs}{\lambda_0^{(1)}}\sqrt{\alpha_0^{(1)}}, \qquad \zeta = \sqrt{\alpha_0^{(1)}}\, y, \qquad \xi = \sqrt{\alpha_0^{(2)}}\, z \tag{5}$$

После очевидных преобразований уравнения задачи запишутся в виде

$$
\begin{gathered}
2\left[\tau\frac{\partial T_1}{\partial\tau}-\zeta\frac{\partial T_1}{\partial\zeta}\right]\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{(1)}\tau^n\zeta^n\right]=\frac{\partial T_1}{\partial\zeta^2}\\
2\left[\tau\frac{\partial T_2}{\partial\tau}-\xi\frac{\partial T_2}{\partial\xi}\right]\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{(2)}\tau^n\xi^n\right]=\frac{\partial^2 T_2}{\partial\xi^2}
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Начальные и граничные условия

$$
\begin{gathered}
T_1=T_2=0 \quad \text{при} \quad \tau=0, \qquad T_1=T_2 \quad \text{при} \quad \zeta=\xi=0\\
-\frac{\partial T_1}{\partial\zeta}-\Lambda\frac{\partial T_2}{\partial\xi}+\tau T_1=\tau\sum_{n=0}^{\infty}b_n\tau^n \qquad \text{при } \zeta=\xi=0\\
T_1=T_2=0 \quad \text{при} \quad \zeta=\xi=\infty
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь введены обозначения

$$
\begin{gathered}
\beta_n^{(i)}=\frac{\alpha_n^{(i)}}{\alpha_0^{(i)}}\left(\frac{\lambda_0^{(i)}}{h\sqrt{\alpha_0^{(1)}}\sqrt{\alpha_0^{(i)}}}\right)^n \qquad (i=1,2)\\
\Lambda=\frac{\lambda_0^{(2)}}{\sqrt{\alpha_0^{(2)}}}\frac{\sqrt{\alpha_0^{(1)}}}{\lambda_0^{(1)}}, \qquad b_n=\frac{a_n}{h}\left(\frac{\lambda_0^{(1)}}{h\sqrt{\alpha_0^{(1)}}}\right)^n
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Будем искать решение (6) в виде рядов

$$
T_1(\tau,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}T_{1n}(\zeta)\tau^n, \qquad T_2(\tau,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}T_{2n}(\xi)\tau^n
$$

Подставляя эти ряды в (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ, для функций $T_{1n}(\zeta)$ и $T_{2n}(\xi)$ получим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2T_{1n}}{d\zeta^2}+2\zeta\frac{dT_{1n}}{d\zeta}-2nT_{1n}=2\sum_{m=0}^{n-1}\beta_{n-m}^{(1)}\zeta^{n-m}\left(mT_{1m}-\zeta\frac{dT_{1m}}{d\zeta}\right)\\
\frac{d^2T_{2n}}{d\xi^2}+2\xi\frac{dT_{2n}}{d\xi}-2nT_{2n}=2\sum_{m=0}^{n-1}\beta_{n-m}^{(2)}\xi^{n-m}\left(mT_{2m}-\xi\frac{dT_{2m}}{d\xi}\right)
\end{gathered}
\tag{9}
$$

В качестве краевых условий достаточно принять

$$
\begin{gathered}
T_{1n}=T_{2n}, \qquad -\left(\frac{dT_{1n}}{d\zeta}+\Lambda\frac{dT_{2n}}{d\xi}\right)+T_{1,n-1}=b_{n-1} \quad \text{при } \zeta=\xi=0\\
T_{1n}=T_{2n}=0 \quad (b_{-1}=T_{1,-1}\equiv 0) \quad \text{при } \zeta=\xi=\infty
\end{gathered}
\tag{10}
$$

тогда условия (7) удовлетворятся автоматически.

Рассмотрим однородное уравнение[2]

$$
y_n''+2xy_n'-2ny_n=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)
$$

Дифференцируя его по x, найдем

$$
y_n'=y_{n-1}, \qquad y_n''=y_{n-2}
\tag{11}
$$

Следовательно,

$$
y_n=\frac{1}{2n}(y_{n-2}+2xy_{n-1})
\tag{12}
$$

Эта формула дает возможность последовательно вычислять y_n, если известны y_0 и y_1; найти же их не представляет труда.

Ограниченные на бесконечности, эти интегралы имеют вид:

$$
\begin{gathered}
y_0 = C_0\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-\eta^2}\,d\eta\right) = C_0\,(1 - \Phi(x)) \\
y_1 = C_1\left[x\,(1 - \Phi(x)) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}\right]
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Из (11) заключаем, что y_n будет представлять собой комбинацию из полиномов и функции Крампа $1 - \Phi(x)$ и ее производной. Значит, правые части системы (9) будут представлять собой выражения вида

$$P_n(\zeta)\,(1 - \Phi(\zeta)) + Q_n(\zeta)\,e^{-\zeta^2}$$

где $P_n(\zeta)$ и $Q_n(\zeta)$ — некоторые полиномы от ζ.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что частные решения неоднородных уравнений можно отыскать в виде

$$T_{1n}{}^*(\zeta) = R_n(\zeta)\,(1 - \Phi(\zeta) + S_n(\zeta)\,e^{-\zeta^2}$$

где $R_n(\zeta)$ и $S_n(\zeta)$ — также полиномы от ζ.

При этом правые части, соответствующие решениям однородного уравнения для T_{1m} $(m \leqslant n-1)$, вычисляются без труда. Действительно, напишем T_{1n} в виде суммы решений однородного и неоднородного:

$$T_{1n} = T_{1n}{}^{(0)} + T_{1n}{}^*$$

Так как $T_{1n}{}^{(0)}$ есть решение однородного уравнения, то в силу (11) имеем соотношение

$$2mT_{1n}{}^{(0)} - 2\zeta\,\frac{dT^{(0)}_{1m}}{d\zeta} = T^{(0)}_{1,\,m-2}$$

Следовательно, принципиальных затруднений при решении системы (9) не возникает и можно последовательно находить $T_{1n}(\zeta)$ и $T_{2n}(\xi)$. Приведем решение для первых номеров n. В силу (13)

$$T_{10} = C_{10}\,(1 - \Phi(\zeta)), \qquad T_{20} = C_{20}\,(1 - \Phi(\zeta))$$

Удовлетворяя условиям (8), находим

$$C_{10} = C_{20} = 0, \quad \text{или} \quad T_{10}(\zeta) = T_{20}(\xi) \equiv 0$$

На основании (13)

$$T_{11} = C_{11}\left[\zeta\,(1 - \Phi(\zeta)) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\zeta^2}\right], \quad T_{21} = C_{21}\left[\xi\,(1 - \Phi(\xi)) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\xi^2}\right] \tag{14}$$

После удовлетворения граничных условий получим

$$C_{11} = C_{21} = -\frac{b_0}{1 + \Lambda} = B_1 \tag{15}$$

Следовательно,

$$T_{11}(0) = T_{21}(0) = -\frac{B_1}{\sqrt{\pi}} \tag{16}$$

Полагая в (9) $n = 2$, будем иметь систему уравнений:

$$T_{12}'' + 2\zeta T_{12}' - 4T_{12} = 2\beta_1{}^{(1)}\,\zeta\,(T_{11} - \zeta T_{11}') = -\frac{2\beta_1{}^{(1)}B_1}{\sqrt{\pi}}\,\zeta e^{-\zeta^2}$$

$$T_{22}'' + 2\xi T_{22}' - 4T_{22} = 2\beta_1{}^{(2)}\,\xi\,(T_{21} - \xi T_{21}') = -\frac{2\beta_1{}^{(2)}B_1}{\sqrt{\pi}}\,\xi e^{-\xi^2}$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование по соответствующим аргументам.

Частное решение неоднородного уравнения находится в виде

$$T_{12}^* = \frac{\beta_1^{(1)} B_1}{4\sqrt{\pi}}\, \zeta e^{-\zeta^2}, \qquad T_{22}^* = \frac{\beta_1^{(2)} B_1}{4\sqrt{\pi}}\, \xi e^{-\xi^2}$$

Теперь на основании (12) можем записать общее решение в виде

$$\begin{aligned} T_{12} &= C_{12}\left[(1+2\zeta^2)(1-\Phi(\zeta)) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\zeta e^{-\zeta^2}\right] + \frac{\beta_1^{(1)} B_1}{4\sqrt{\pi}}\, \zeta e^{-\zeta_2} \\ T_{22} &= C_{22}\left[(1+2\xi^2)(1-\Phi(\zeta)) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\xi e^{-\xi^2}\right] + \frac{\beta_1^{(2)} B_1}{4\sqrt{\pi}}\, \xi e^{-\xi^2} \end{aligned} \tag{17}$$

Удовлетворяя граничным условиям, найдем с учетом (16)

$$C_{12} = C_{22}, \qquad C_{12}\frac{4}{\sqrt{\pi}} - \frac{\beta_1^{(1)}B_1}{4\sqrt{\pi}} + \Lambda C_{22}\frac{4}{\sqrt{\pi}} - \Lambda\frac{\beta_1^{(2)}B_1}{4\sqrt{\pi}} - \frac{B_1}{\sqrt{\pi}} = b_1$$

Откуда

$$C_{12} = \frac{b_1}{1+\Lambda}\frac{\sqrt{\pi}}{4} - \frac{b_0}{16(1+\Lambda)^2}(\beta_1^{(1)} + \Lambda\beta_1^{(2)} + 4) = B_2 \tag{18}$$

При этом

$$T_{12}(0) = T_{22}(0) = B_2$$

Для $n = 3$ имеем

$$T_{13}'' + 2\zeta T_{13}' - 6T_{13} = 4\beta_1^{(1)} B_2\zeta(1-\Phi(\zeta)) + \frac{B_1[\beta_1^{(1)}]^2}{2\sqrt{\pi}}\left[2\zeta^2 - 1 - \frac{4\beta_2^{(1)}}{[\beta_1^{(1)}]^2}\right]e^{-\zeta^2}$$

и аналогичное уравнение для T_{23} с заменой ζ на ξ и верхнего индекса 1 у β на 2.

Ограниченное на бесконечности решение этого уравнения можно представить в форме

$$\begin{aligned} T_{13} = C_{13}&\left[\left(\zeta + \frac{2}{3}\zeta^3\right)(1-\Phi(\zeta)) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}(1+\zeta^2)e^{-\zeta^2}\right] - \beta_1^{(1)}B_2\zeta(1-\Phi(\zeta)) + \\ &+ \frac{b^{(1)}}{4\sqrt{\pi}}\left[\frac{(5/2 + c^{(1)} + 6(a^{(1)}/b^{(1)})}{12} + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2} + c^{(1)}\right)\zeta^2 + \frac{1}{8}\zeta^4\right]e^{-\zeta^2} \end{aligned}$$

где

$$b^{(1)} = \frac{B_1[\beta_1^{(1)}]^2}{2}, \qquad c^{(1)} = \frac{2\beta_2^{(1)}}{[\beta_1^{(1)}]^2}, \qquad a^{(1)} = 4\beta_1^{(1)} B_2$$

Удовлетворяя граничным условиям, найдем

$$\begin{gathered} -2C_{13} + D^{(1)} = -2C_{23} + D^{(2)} \\ -C_{13} + \beta_1^{(1)}B_2 - \Lambda(C_{23} - \beta_1^{(2)}B_2) + B_2 = b_2 \end{gathered}$$

где

$$D^{(1)} = \left[\frac{b^{(1)}}{16}\left(\frac{5}{2} + c^{(1)} + 6\frac{a^{(1)}}{b^{(1)}}\right]\right., \qquad D^{(2)} = \left[\frac{b^{(2)}}{16}\left(\frac{5}{2} + c^{(2)} + 6\frac{a^{(2)}}{b^{(2)}}\right]\right.$$

Отсюда имеем

$$\begin{gathered} C_{13} = \frac{1}{1+\Lambda}\{-b_2 + B_2(1+\beta_1^{(1)}) + \Lambda(\beta_1^{(2)}B_2 + D^{(1)} - D^{(2)})\} = B_3 \\ C_{23} = C_{13} + \frac{1}{2}(D^{(2)} - D^{(1)}) \end{gathered}$$

Точно так же запишется и T_{23} с соответствующей заменой аргумента и верхнего индекса.

Аналогично находятся и последующие члены T_{1n} и T_{2n}.

Рассмотрим пример нагрева воздуха над гладкой однородной поверхностью под влиянием притока тепла. В этом случае можно принять

$$k_1(x) = k_0(1 + \gamma x) \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1(x) = \lambda_0(1 + \gamma x) \\ \lambda_2(x) = \lambda^* = \text{const} \end{pmatrix}$$
$$k_2(x) = k^* = \text{const}$$

Ограничимся для простоты случаем, когда приток тепла постоянен: $W(t) = \text{const} = a_0$. Имеем

$$u = \int_0^x \frac{dx}{k_0(1 + \gamma x)} = \frac{1}{k_0 \gamma} \ln(1 + \gamma x), \qquad k(x) = \varphi(u) = k_0 e^{\gamma u}$$

Введем новые переменные по формулам

$$\tau = \frac{2h\sqrt{k_0}}{\lambda_0}\sqrt{t}, \qquad \zeta = \frac{\sqrt{k_0}}{2\sqrt{t}} \int_0^x \frac{dx}{k_0(1+\gamma x)}, \qquad \xi = -\frac{x}{2\sqrt{k^*}\sqrt{t}}$$

Получим для T_{1n} и T_{2n} систему уравнений:

$$\frac{d^2 T_{1n}}{2\zeta^2} + 2\zeta \frac{dT_{1n}}{d\zeta} - 2nT_{1n} = 2\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^{n-m}\zeta^{n-m}}{n!}\left(mT_{1m} - \zeta\frac{dT_{1m}}{d\zeta}\right)$$
$$\frac{d^2 T_{2n}}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dT_{2n}}{d\xi} - 2nT_{2n} = 0 \qquad (19)$$

с условиями

$$\zeta = \xi = 0, \qquad T_{1n} = T_{2n}$$
$$\zeta = \xi = 0, \qquad -\left(\frac{dT_{1n}}{d\zeta} + \Lambda\frac{dT_{2n}}{d\xi}\right) + T_{1,\,n-1} = \begin{cases} b_0 & \text{для } n = 1 \\ 0 & \text{для } n \geqslant 2 \end{cases} \qquad (20)$$

Здесь $\varepsilon = \lambda_0\gamma / h$ — безразмерный параметр, $b_0 = a_0 / h$. Постоянные интегрирования имеют вид:

$$B_1 = -\frac{b_0}{1+\Lambda}, \qquad B_2 = -\frac{b_0}{16(1+\Lambda)^2}, \qquad B_3 = -\frac{b_0}{8(1+\Lambda)^3}(1 + 16\Lambda + 14\Lambda^2)$$

Очевидно, что изложенный метод решения удобен только при малых t.

Поступила 7 VIII 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А. К теории суточного хода температуры в слое перемешивания. ДАН СССР, т. XXX, № 5, 1940.
2. Добрышман Е. М. Об одном методе решения уравнения турбулентной теплопроводности. Информационный сборник, № 1, Гидрометеоиздат, 1951.