Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

КОНВЕКЦИЯ В БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

Е. Х. Драхлин

(Молотов)

§ 1. Уравнения и граничные условия. 1. Рассмотрим стационарную конвекцию в плоскости, имеющей форму бесконечного горизонтального эллиптического цилиндра:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1.1}$$

Ось z совпадает с осью цилиндра и направлена горизонтально, ось y направим вертикально вниз. Градиент температуры массива на бесконечности $\mathbf{A}$ направлен перпендикулярно к оси цилиндра, но не вертикально. Из соображений симметрии следует, что задача плоская.

Основные уравнения стационарной конвекции имеют вид [1]:

$$\nu_0\triangle v_x=\frac{\partial p^\circ}{\partial x}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} \qquad \left(p^\circ=\frac{p'}{\rho}=\frac{p-p_0}{\rho}\right) \tag{1.2}$$

$$\nu_0\triangle v_y=\frac{\partial p^\circ}{\partial y}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+\beta_0 gT' \qquad (T'\equiv T-T_0) \tag{1.3}$$

$$\chi_0\triangle T'=v_x\frac{\partial T'}{\partial x}+v_y\frac{\partial T'}{\partial y} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{1.5}$$

$$\triangle T_{\text{м}}'=0 \qquad (T_{\text{м}}'=T_{\text{м}}-T_0) \tag{1.6}$$

Здесь v_x, v_y, v_z — компоненты гидродинамической скорости жидкости, ν_0 — кинематический коэффициент вязкости, χ_0 и β_0 — коэффициенты температуропроводности, теплового расширения жидкости при $T=T_0$, причем T_0 — среднее значение температуры T жидкости по полости, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность жидкости, причем $\rho_0=\rho(T_0)$; далее, p — давление жидкости, p_0 — давление в равновесии при $T=T_0$ и $T_{\text{м}}$ — температура массива.

Условимся отмечать значения величин на границе звездочкой. Тогда граничные условия можно записать так:

$$(T)^*=(T_{\text{м}})^*, \qquad \varkappa\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)^*=\varkappa_{\text{м}}\left(\frac{\partial T_{\text{м}}}{\partial n}\right)^*, \qquad (v^*=0) \tag{1.7}$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности жидкости, $\varkappa_{\text{м}}$ — коэффициент теплопроводности массива.

Введя функцию тока Φ и исключив из уравнений (1.2), (1.3) давление, получаем

$$\nu_0\triangle\triangle\Phi=\frac{\partial(\Phi,\triangle\Phi)}{\partial(x,y)}-\beta_0 g\frac{\partial T'}{\partial x}, \qquad \chi_0\triangle T'=\frac{\partial(T',\Phi)}{\partial(x,y)} \tag{1.8}$$

2. Вводим координаты u, v, связанные с эллиптическими координатами ξ и η следующим образом:

$$\xi=\operatorname{ch}u, \qquad \eta=\cos v, \qquad \xi=\frac{r_1+r_2}{2c}, \qquad \eta=\frac{r_1-r_2}{2c} \tag{1.9}$$

где r_1 и r_2 — радиусы-векторы точки пересечения эллипса с соответствующей гиперболой, $2c$ — межфокусное расстояние для всего семейства эллипсов, в том числе и для (1.1). Тогда

$$x = c\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\quad y = c\,\mathrm{sh}\,u\sin v,\qquad 0\leqslant u<+\infty,\qquad 0\leqslant v<2\pi \tag{1.10}$$

Из (1.9) можно установить, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

значит $\triangle\Phi$ останется инвариантным относительно преобразования (1.10).

Задачу будем решать методом последовательных приближений, основанным на разложении решений по степеням числа Грассгофа [2].

§ 2. Нулевое приближение. 1. Из (1.2) — (1.5) получаем уравнения нулевого приближения

$$\triangle T'^{(0)}=0,\qquad \triangle T_{\text{м}}'^{(0)}=0 \tag{2.1}$$

В качестве граничных условий в нулевом приближении получаем из (1.7)

$$(T'^{(0)})^*=(T_{\text{м}}'^{(0)})^*,\qquad \lambda\left(\frac{\partial T'^{(0)}}{\partial u}\right)^*=\left(\frac{\partial T_{\text{м}}'^{(0)}}{\partial u}\right)^*\qquad \left(\lambda=\frac{\varkappa}{\varkappa_{\text{м}}}\right) \tag{2.2}$$

2. Пользуясь методом разделения переменных, находим для уравнений (2.1) частные решения

$$e^{ku},\quad e^{-ku},\quad \cos kv,\quad \sin kv \tag{2.3}$$

Из (1.9) можно установить, что на границе эллипса имеют место следующие соотношения:

$$c\,\mathrm{ch}\,u_1=a,\qquad c\,\mathrm{sh}\,u_1=b \tag{2.4}$$

где u_1 — некоторое значение u на границе (1.1).

Решая уравнения (2.1) с учетом (2.2), получаем в нулевом приближении

$$T'^{(0)}=\frac{A_x(a+b)c}{a+\lambda b}\,\mathrm{ch}\,u\cos v+\frac{A_y(a+b)c}{b+\lambda a}\,\mathrm{sh}\,u\sin v \tag{2.5}$$

$$T_{\text{м}}'^{(0)}=\frac{ab(a+b)(1-\lambda)A_x}{c(a+\lambda b)}\,\frac{\cos v}{e^u}+\frac{ab(a+b)(1-\lambda)A_y}{c(b+\lambda a)}\,\frac{\sin v}{e^u}+$$
$$+A_x c\,\mathrm{ch}\,u\cos v+A_y c\,\mathrm{sh}\,u\sin v \tag{2.6}$$

§ 3. Первое приближение. 1. Из (1.8) для первого приближения получается уравнение

$$\frac{\partial^4\Phi^{(1)}}{\partial x^4}=2\frac{\partial^4\Phi^{(1)}}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi^{(1)}}{\partial y^4}=-\frac{\beta_0 g}{\nu_0}\frac{\partial T'^{(0)}}{\partial x} \tag{3.1}$$

которое необходимо решать с учетом граничных условий, получающихся из (1.7)

$$\left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial x}\right)^*=\left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial y}\right)^*=0 \tag{3.2}$$

Частное решение уравнения (3.1), в котором $\partial T'^{(0)}/\partial x$ имеет значение, получающееся из (2.5), ищем в виде

$$\Phi_1^{(1)}=Dc^4\,\mathrm{ch}^4 u\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2v+\frac{1}{8}\cos 4v\right) \tag{3.3}$$

Решение соответствующего уравнению (3.1) однородного бигармонического уравнения возьмем в виде:

$$\Phi_2^{(1)}=\Big[\frac{1}{2}A_1c^2\,\mathrm{ch}^2 u+\frac{1}{2}A_2c^2\,\mathrm{sh}^2 u+\frac{3}{8}A_3c^4\,\mathrm{ch}^4 u-$$
$$-\frac{3}{8}A_3c^4\,\mathrm{sh}^4 u+\frac{3}{8}A_4c^4\,\mathrm{ch}^4 u-\frac{3}{4}A_4c^4\,\mathrm{sh}^2 u\,\mathrm{ch}^2 u+\frac{3}{8}A_4c^4\,\mathrm{sh}^4 u\Big]+$$
$$+\Big[\frac{1}{2}A_1c^2\,\mathrm{ch}^2 u-\frac{1}{2}A_2c^2\,\mathrm{sh}^2 u+\frac{1}{2}A_3c^4\,\mathrm{ch}^4 u+\frac{1}{2}A_3c^4\,\mathrm{sh}^4 u+\frac{1}{2}A_4c^4\,\mathrm{ch}^4 u-$$
$$-\frac{1}{2}A_4c^4\,\mathrm{sh}^4 u\Big]\cos 2v+\Big[\frac{1}{8}A_3c^4\,\mathrm{ch}^4 u-\frac{1}{8}A_3c^4\,\mathrm{sh}^4 u+$$
$$+\frac{1}{8}A_4c^4\,\mathrm{ch}^4 u+\frac{3}{4}A_4c^4\,\mathrm{sh}^2 u\,\mathrm{ch}^2 u+\frac{1}{8}A_4c^4\,\mathrm{sh}^4 u\Big]\cos 4v \tag{3.4}$$

Решение уравнения (3.1) ищем в виде $\Phi^{(1)} = \Phi_1^{(1)} + \Phi_2^{(1)}$. Граничные условия (3.2) в координатах u, v имеют вид:

$$\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial u}\right)^* = \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial v}\right)^* \tag{3.5}$$

Из (3.5), (3.3), (3.4) и (3.1) находим систему уравнений для определения коэффициентов D, A_1, A_2, A_3, A_4; решив эту систему, получим

$$\begin{aligned} &D = -\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{a+b}{a+\lambda b}A_x, && \triangle \equiv 3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4 \\ &A_1 = -\frac{6a^2b^4D}{\triangle}, && A_2 = -\frac{6a^4b^2D}{\triangle} \\ &A_3 = -\frac{a^2(3a^2+b^2)D}{\triangle}, && A_4 = -\frac{a^2b^2D}{\triangle} \end{aligned} \tag{3.6}$$

После этого находим $\Phi^{(1)} = \Phi_1^{(1)} + \Phi_2^{(1)}$ из (3.3) и (3.4), а затем компоненты скорости в первом приближении. В декартовых координатах они выглядят так:

$$v_x = \frac{a^2}{\triangle}\frac{\beta_0 g}{2\nu_0}\frac{a+b}{a+\lambda b}A_x(a^2b^2y - b^2x^2y - a^2y^3) \tag{3.7}$$

$$v_y = \frac{a^2}{\triangle}\frac{\beta_0 g}{2\nu_0}\frac{(a+b)b^2}{a^2(a+\lambda b)}A_x(a^2b^2x - a^2xy^2 - b^2x^3) \tag{3.8}$$

2. Для нахождения температуры в первом приближении подставим (2.5) (предварительно переписав его в декартовых координатах) с учетом (3.7) и (3.8) в правую часть (1.8), тогда получим уравнение для определения $T'^{(1)}$.

Разыскивая частное решение последнего в виде

$$\begin{aligned} T_1'^{(1)} = {} & \left(\tfrac{5}{8}\gamma_1 c^5 \operatorname{ch}^5 u + \tfrac{1}{8}\gamma_3 c^5 \operatorname{sh}^4 u \operatorname{ch} u + \tfrac{3}{4}\gamma_5 c^3 \operatorname{ch}^3 u\right)\cos v + \\ & + \left(\tfrac{1}{8}\gamma_2 c^5 \operatorname{ch}^4 u \operatorname{sh} u + \tfrac{5}{8}\gamma_4 c^5 \operatorname{sh} u + \tfrac{3}{4}\gamma_6 c^3 \operatorname{sh}^3 u\right)\sin v + \\ & + \left(\tfrac{5}{16}\gamma_1 c^5 \operatorname{ch}^5 u - \tfrac{3}{16}\gamma_3 c^5 \operatorname{sh}^4 u \operatorname{ch} u + \tfrac{1}{4}\gamma_5 c^3 \operatorname{ch}^3 u\right)\cos 3v + \\ & + \left(\tfrac{3}{16}\gamma_2 c^5 \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u - \tfrac{5}{16}\gamma_4 c^5 \operatorname{sh}^5 u - \tfrac{1}{4}\gamma_6 c^3 \operatorname{sh}^3 u\right)\sin 3v + \\ & + \left(\tfrac{1}{16}\gamma_1 c^5 \operatorname{ch}^5 u + \tfrac{1}{16}\gamma_3 c^5 \operatorname{sh}^4 u \operatorname{ch} u\right)\cos 5v + \left(\tfrac{1}{16}\gamma_2 c^5 \operatorname{ch}^4 u \operatorname{sh} u + \tfrac{1}{16}\gamma_4 c^5 \operatorname{sh}^5 u\right)\sin 5v \end{aligned} \tag{3.9}$$

(коэффициенты γ_i легко определяются, если предварительно перевести $T_1'^{(1)}$ в декартовы координаты), а решение соответствующего ему однородного уравнения — в виде следующей гармонической функции:

$$\begin{aligned} T_2'^{(1)} = {} & M_1 c \operatorname{ch} u \cos v + N_1 c \operatorname{sh} u \sin v + M_2 c^3 (4\operatorname{ch}^3 u - 3\operatorname{ch} u)\cos 3v + \\ & + N_2 c^3(\operatorname{sh}^3 u + 3\operatorname{sh} u)\sin 3v + M_3 c^5 (16\operatorname{ch}^5 u - 20\operatorname{ch}^3 u + 5\operatorname{ch} u)\cos 5v + \\ & + N_3 c^5(16\operatorname{sh}^5 u + 20\operatorname{sh}^3 u + 5\operatorname{sh} u)\sin 5v \end{aligned} \tag{3.10}$$

и, наконец, решение уравнения внешней задачи (1.6) для температуры массива — в виде следующей гармонической функции:

$$\begin{aligned} T_{\text{м}}'^{(1)} = {} & M_1' e^{-u}\cos v + N_1' e^{-u}\sin v + M_2' e^{-3u}\cos 3v + \\ & + N_2' e^{-3u}\sin 3v + M_3' e^{-5u}\cos 5v + N_3' e^{-5u}\sin 5v \end{aligned} \tag{3.11}$$

мы из (2.2), (3.9) — (3.11) определяем M_i, N_i, M_i', N_i' ($i = 1, 2, 3$).

Окончательное выражение для температуры в первом приближении имеет вид:

$$T'^{(1)} = (16M_3 + \gamma_1)\,x^5 + (16N_3 + \gamma_4)\,y^5 + (80M_3 + \gamma_3)\,xy^4 + \tag{3.12}$$
$$+ (80N_3 + \gamma_2)\,x^4y + (4M_2 - 20M_3c^2 + \gamma_5)\,x^3 +$$
$$+ (-4N_2 + 20N_3c^2 + \gamma_6)\,y^3 + (-12M_2 + 60c^2M_3)\,xy^2 +$$
$$+ (12N_2 - 60c^2N_3)\,x^2y + (M_1 - 12c^2M_2 + 5c^4M_3)\,x + (N_1 - 12c^2N_2 + 5c^4N_3)\,y$$

где

$$\gamma_1 = \frac{3}{5}\frac{a^2}{\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 b^4}{(a+\lambda b)(b+\lambda a)\,a^2}A_xA_y, \qquad \gamma_2 = -\frac{a^2}{\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 b^2}{(a+\lambda b)^2}A_x^2$$

$$\gamma_3 = \frac{a^2}{\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 b^2}{(a+\lambda b)(b+\lambda a)}A_xA_y, \qquad \gamma_4 = -\frac{3}{5}\frac{a^2}{\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 a^2}{(a+\lambda b)^2}A_x^2$$

$$\gamma_5 = -\frac{2a^2}{\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 b^4}{(a+\lambda b)(b+\lambda a)}A_xA_y, \qquad \gamma_6 = \frac{2a^2}{\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 a^2b^2}{(a+\lambda b)^2}A_x^2$$

$$M_1 = -\frac{a^2}{8\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 b^4}{(a+\lambda b)^2(b+\lambda a)}A_xA_y\,(-9a^3 - 17\lambda a^2b + ab^2 + \lambda b^3)$$

$$N_1 = -\frac{a^2}{8\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 a^2b^2}{(a+\lambda b)^2(b+\lambda a)}A_x^2\,(-\lambda a^3 - a^2b + 17\lambda ab^2 + 9b^3)$$

$$M_2 = \frac{a^2}{16\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 b^4}{(a+\lambda b)(b+\lambda a)}\frac{5a^3 + 3ab^2 + 7\lambda a^2b + \lambda b^3}{4a^3 - 3a^2c + \lambda(4a^2b - bc^2)}A_xA_y$$

$$N_2 = \frac{a^2}{16\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 a^2b^2}{(a+\lambda b)^2}\frac{\lambda a^3 + 7\lambda ab^2 + 3a^2b + 5b^3}{4b^3 + 3bc^2 + \lambda(4ab^2 + ac^2)}A_x^2$$

$$M_3 = -\frac{a^2}{80\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 b^4}{(a+\lambda b)(b+\lambda a)}\frac{3a^3 + 5ab^2 + 7\lambda a^2b + \lambda b^3}{16a^5 - 20a^3c^2 + 5ac^4 + \lambda(16a^4b - 12a^2bc^2 + bc^4)}A_xA_y$$

$$N_3 = \frac{a^2}{80\triangle\chi_0}\frac{\beta_0 g}{24\nu_0}\frac{(a+b)^2 a^2b^2}{(a+\lambda b)^2}\frac{5a^2b + 3b^3 + \lambda a^3 + 7\lambda ab^2}{16b^5 + 20b^3c^2 + 5bc^4 + \lambda(16ab^4 + 12ab^2c^2 + ac^4)}A_x^2$$

Если в формулах (3.7), (3.8), (3.12) для скорости и температуры положить $a = b = 1$, то они переходят в соответствующие выражения для горизонтальной круглой трубы, полученные нами ранее [3].

Поступила 20 I 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л., Лифшиц Е. Механика сплошных сред. ОГИЗ, 1944.
2. Шапошников И. Г. К теории слабой конвекции. Журнал техн. физики, т. XXII, вып. 5, 1952.
3. Драхлин Е. Х. Ученые записки Молотовского университета, т. VIII, 1953.