Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В НАКЛОННОМ ЦИЛИНДРЕ

Г. А. Бугаенко

(Молотов)

§ 1. Рассмотрим гравитационно-тепловую конвекцию в цилиндре, который наклонен под углом α к вертикали, и изучим стационарное течение, линии тока которого параллельны оси.

Течение такого вида может существовать в средней (удаленной от концов) части цилиндрической полости, заполненной жидкостью, и является причиной дополнительного к молекулярному переноса тепла.

Уравнения стационарной конвекции имеют, как известно [1], вид:

$$(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\,\triangle\,\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}T$$
$$(\mathbf{v}\nabla)\,T = \chi\,\triangle\,T, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, T — температура, отсчитываемая от условного нуля, p — избыточное (над гидростатическим) давление, ρ — средняя плотность жидкости, ν, χ, β — коэффициенты вязкости, температуропроводности и теплового расширения соответственно, $\mathbf{g}$ — напряженность поля тяжести.

Представим уравнения (1.1) в проекциях на оси правой декартовой системы координат, предполагая, что ось z направлена по оси цилиндра вверх, а ось y лежит в вертикальной плоскости $\mathbf{g}z$ и направлена книзу; имеем систему уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \beta g T\sin\alpha = 0, \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\,\triangle\,v + \beta g T\cos\alpha = 0 \tag{1.2}$$

$$v\,\frac{\partial T}{\partial z} = \chi\triangle T \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь при написании третьего уравнения движения (1.2) уже учтено условие неразрывности (1.4). Два первых уравнения (1.2) показывают, что давление p и температура T от координаты x не зависят. Поэтому (предполагая, что $\partial T\,/\,\partial z \neq 0$) согласно (1.3) скорость v не зависит от x, т. е. по (1.4) $v = v\,(y)$. Учитывая теперь, что скорость жидкости v обращается в нуль на границе области, приходим к заключению, что $v \equiv 0$, а значит, жидкость покоится.

Итак, если предположить, что $\partial T\,/\,\partial z \neq 0$, то конвекционное движение жидкости предполагаемого вида оказывается невозможным. Изучаемый тип конвекции, когда линии тока параллельны наклонной оси цилиндра, возможен лишь при условии, что $\partial T\,/\,\partial z = 0$. В этом последнем случае уравнение теплопроводности (1.3) дает

$$\frac{d^2T}{dy^2} = 0 \quad \text{или} \quad T = Ay + B \tag{1.5}$$

Подчеркнем, что найденный закон распределения температуры вытекает с необходимостью из предположения, что течение параллельно оси цилиндра.

Перейдем теперь к упрощению третьего уравнения (1.2), служащего для определения скорости жидкости в конвекционном течении. В этом уравнении, записанном в виде

$$\nu \triangle v(x, y) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \beta g T \cos\alpha \tag{1.6}$$

левая часть не зависит от z, а правая от x, так что обе части (1.6) суть функции одного y:

$$\nu \triangle v(x, y) = f(y), \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \beta g T \cos\alpha = f(y) \tag{1.7}$$

Установим вид функции $f(y)$. Если продифференцировать второе равенство (1.7) по y, а второе уравнение (1.2) по z и вычесть, то получим

$$f'(y) = -A\beta g \cos\alpha, \qquad \text{или} \qquad f(y) = -A\beta g \cos\alpha y \tag{1.8}$$

Постоянная интегрирования здесь положена равной нулю, что согласно второму равенству (1.7) равносильно смещению отсчета для температуры.

Подставляя (1.8) в первое равенство (1.7), получим уравнение для скорости в виде

$$\triangle v(x, y) = -ay \qquad \left(a = \frac{A\beta g \cos\alpha}{\nu}\right) \tag{1.9}$$

§ 2. В качестве примера рассмотрим конвекцию в круглой наклонной трубе с радиусом поперечного сечения R.

В полярных координатах r, φ уравнение (1.9) для скорости, т. е. уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = -ar\sin\varphi \tag{2.1}$$

следует рассматривать вместе с очевидными граничными условиями

$$v(R, \varphi) = 0, \qquad v(0, \varphi) < \infty \qquad (0 \leqslant \varphi < 2\pi)$$

Подстановка

$$v(r, \varphi) = f(r)\sin\varphi \tag{2.2}$$

приводит (2.1) к уравнению Эйлера для $f(r)$:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} f = -ar \qquad (f(R) = 0, \quad f(0) < \infty) \tag{2.3}$$

Обычная замена $r = e^t$ позволяет преобразовать (2.3) к неоднородному уравнению

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - f = -ae^{3t} \tag{2.4}$$

частное решение которого есть $f_1 = -{}^1/_8\, ae^{3t}$, а общее решение однородного уравнения имеет вид

$$f_2 = Ce^t + C_1 e^{-t}$$

Таким образом, решение уравнения Эйлера (2.3) в исходных переменных представляется так:

$$f(r) = Cr + \frac{C_1}{r} - \frac{a}{8} r^3 \qquad \left(C = \tfrac{1}{8} aR^2, \ C_1 = 0\right)$$

Значения постоянных интегрирования C и C_1 здесь указаны для граничных условий задачи (2.3).

Окончательно получаем закон распределения скорости в сечении потока в виде

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{8} a (R^2 - r^2) r \sin\varphi \tag{2.5}$$

Если бы мы изучали конвекцию между двумя наклонными соосными цилиндрами, то все решение выглядело бы совершенно так же.

В этом случае скорость обращается в нуль при $r=R_1$ и при $r=R_2$, поэтому удовлетворяя этим граничным условиям для скорости, имеем

$$CR_1+\frac{C_1}{R_1}-\frac{a}{8}R_1^3=0,\qquad CR_2+\frac{C_1}{R_2}-\frac{a}{8}R_2^3=0$$

Отсюда

$$C=\frac{1}{8}a(R_1^2+R_2^2),\qquad C_1=-\frac{1}{8}aR_1^2R_2^2$$

Закон распределения скорости имеет здесь следующий вид:

$$v(r,\varphi)=\frac{a}{8}\left[(R_1^2+R_2^2)\,r-r^3-\frac{R_1^2R_2^2}{r}\right]\sin\varphi$$

Распределение температуры определяется формулой (1.5), а давление может быть найдено из (1.7). Действительно, подставляя в это последнее уравнение значение $f(y)$ по (1.8) и T по (1.5), получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\beta gB\cos\alpha \quad \text{или} \quad p=(\rho\beta gB\cos\alpha)\,z+\varphi(y) \tag{2.6}$$

Для определения $\varphi(y)$ подставим (2.6) во второе уравнение (1.2). Получим

$$\varphi'(y)=-\rho\beta g\sin\alpha\,(Ay+B)\quad \text{или}\quad \varphi(y)=-\frac{\rho\beta g\sin\alpha}{2A}(Ay+B)^2+\text{const}$$

Следовательно, давление будет

$$p=(\rho\beta gB\cos\alpha)\,z-\frac{\rho\beta g\sin\alpha}{2A}(Ay+B)^2+\text{const} \tag{2.7}$$

Постоянную интегрирования можно определить, например, из условия, что давление равно нулю в начале координат.

Формулы (1.5), (2.5) и (2.7) дают точное решение задачи о конвекции жидкости в наклонном круглом цилиндре, если течение происходит параллельно оси.

Поток тепла вдоль оси цилиндра, уносимый конвекцией кверху, будет

$$Q=\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho C_pTvr\,dr\,d\varphi$$

или

$$Q=\frac{a}{8}\;C_p\int_0^R\int_0^{2\pi}(Ar\sin\varphi+B)(R^2-r^2)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi$$

или

$$Q=\frac{\pi A^2R^6}{96\nu}\,\rho C_p\beta g\cos\alpha$$

Найденный здесь конвекционный поток тепла вдоль оси цилиндра сочетается с перпендикулярным ему молекулярным тепловым потоком, который равен

$$\lambda A\iint\cos(ny)\,dS\equiv\lambda AS_y$$

где S_y — проекция незамкнутой поверхности на плоскость xz. Эта поверхность опирается на любой замкнутый контур, лежащий целиком (как и сама поверхность) внутри цилиндра.

Поступила 18 I 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л., Лифшиц Е. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1944.
2. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи, гл. 7. ГИТТЛ, 1952.