Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ

Е. М. Жуховицкий

(Молотов)

В работе развивается метод приближенного решения задачи об условиях возникновения тепловой конвекции в подогреваемой снизу жидкости. Приводятся примеры применения этого метода для случаев вертикальной и горизонтальной цилиндрической полости.

Известно, что механическое равновесие неравномерно нагретой жидкости оказывается возможным только тогда, когда градиент температуры во всей массе жидкости постоянен и направлен вертикально (см., например, [1]). В случае направленного вниз вертикального градиента температуры (подогрев снизу) конвекция возникает лишь при достижении градиентом температуры некоторого определенного значения, называемого критическим; в этом случае принято говорить, что имеется порог конвекции [2].

Вычисление критических градиентов температуры и нахождение вида возникающих конвективных потоков жидкости или газа для полостей разной геометрической формы представляет интересную в теоретическом отношении и важную для практики задачу. До последнего времени рассматривался только случай плоского горизонтального слоя [3, 4, 5]. Г. А. Остроумовым [6] рассмотрена задача о возникновении конвекции в бесконечном вертикальном цилиндре. Общее исследование, произведенное недавно В. С. Сорокиным [1], позволяет поставить задачу о рациональном применении прямых методов математической физики к рассматриваемому вопросу.

§ 1. Уравнения задачи. Пусть жидкость заполняет полость, находящуюся в однородном твердом массиве. Градиент температуры массива на бесконечности **A** задан и направлен вертикально вниз.

Уравнения конвекции для механически несжимаемой, но термически деформируемой жидкости имеют вид [7] :

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta g\gamma T$$
$$\dot{T} + \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, p, T, ρ — давление, температура и плотность, отсчитываемые от тех значений, какие имелись в состоянии теплового и механического равновесия, ν, χ, β — соответственно коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения, g — ускорение силы тяжести, γ — единичный вектор, направленный по $\mathbf{g}$.

В состоянии механического равновесия $\mathbf{v} = 0$, $T = T_0$, $p = p_0$, градиент температуры в жидкости постоянен, направлен вертикально и отличается от заданного в массиве на бесконечности градиента A лишь множителем, зависящим от отношения коэффициентов теплопроводности жидкости и массива и от формы полости.

Предположим, что в жидкости под влиянием каких-либо причин возникло движение с малой скоростью $\mathbf{v}$ и связанные с ним изменения температуры и давления.

Подставляя вместо температуры и давления $T_0 + T_1$, $p_0 + p_1$ и отбрасывая малые квадратичные по возмущениям члены, получаем

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = -\frac{1}{\rho}\nabla p_1 + \nu\Delta\mathbf{v}_1 - \beta g\gamma T_1$$

$$\dot{T}_1 + \mathbf{v}_1\nabla T_0 = \chi\Delta T_1, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}_1 = 0 \tag{1.2}$$

Линейные уравнения (1.2) должны иметь решения, зависящие от времени по закону $e^{-\sigma t}$. Показано [1], что σ — вещественная величина, т. е. колебательные движения возле состояния механического равновесия в рассматриваемой задаче невозможны. При $\sigma > 0$ возникающие в жидкости возмущения будут затухать; при $\sigma < 0$ возмущения развиваются. Если при изменении параметров задачи, например при изменении градиента температуры A, величина σ перейдет через нуль, то устойчивое равновесие превратится в неустойчивое.

Полагая $\sigma = 0$, получаем уравнения для координатных частей возмущения $\mathbf{v}$, T интересующего нас критического режима (индексы опущены):

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta g\gamma T = 0, \qquad \chi\Delta T = \mathbf{v}\nabla T_0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.3}$$

Для возмущения температуры в массиве $T_\text{м}$ будем всегда иметь

$$\Delta T_\text{м} = 0 \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3), (1.4) нужно решить при следующих граничных условиях (значения величин на границе будем обозначать звездочкой):

$$(\mathbf{v})^* = 0, \qquad (T)^* = (T_\text{м})^*, \qquad \varkappa\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)^* = \varkappa_\text{м}\left(\frac{\partial T_\text{м}}{\partial n}\right)^*, \qquad (\nabla T_\text{м})_\infty = 0 \tag{1.5}$$

Здесь $\varkappa$ и $\varkappa_\text{м}$ — коэффициенты теплопроводности жидкости и массива.

Критические градиенты температуры в жидкости (или пропорциональные им критические градиенты температуры, заданной на бесконечности в массиве) следует рассматривать как собственные числа задачи. При каждом из них равновесие становится неустойчивым относительно возмущений нового вида. Нахождение критических градиентов температуры и соответствующих им критических движений жидкости и составляет нашу задачу.

Для дальнейшего представляется удобным переписать уравнения (1.3), (1.4) в безразмерной форме. Приняв за единицу длины характерный размер R, относящийся к полости, а за единицы температуры, скорости и давления соответственно AR, χ / R, $\rho\nu\chi / R^2$, получаем, сохраняя для безразмерных величин прежние обозначения:

$$-\nabla p + \Delta \mathbf{v} - kT\gamma = 0 \qquad \left(k = PG = \frac{g\beta AR^4}{\nu\chi}\right) \tag{1.6}$$

$$\Delta T = \mathbf{v}\nabla T_0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \Delta T_{\text{м}} = 0 \tag{1.7}$$

Здесь k — произведение чисел Прандтля P и Грассгофа G.

§ 2. Решение. Для решения уравнений (1.6), (1.7) применим метод Галеркина. Пусть скорость можно разложить по некоторой системе координатных функций φ_i. Оборвем ряд на n-м члене:

$$\mathbf{v} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n \tag{2.1}$$

Каждая из функций φ_i должна удовлетворять граничному условию для скорости и уравнению непрерывности

$$\operatorname{div} \varphi_i = 0$$

Подставив отрезок ряда для $\mathbf{v}$ и температуру T_0, получаемую из решения равновесной задачи, в первое из уравнений (1.7) и решив его совместно с последним, получим температуру как функцию неизвестных пока коэффициентов c_i.

Обратимся теперь к уравнению (1.6). Следуя методу Галеркина, подставим в это уравнение $\mathbf{v}$ и T, умножим его скалярно на каждую функцию φ_i и проинтегрируем по объему жидкости:

$$-\int \varphi_i \nabla p\, dV + \int \varphi_i \Delta \mathbf{v}\, dV - k \int \varphi_i \gamma T\, dV = 0 \tag{2.2}$$

Выполнив интегрирование, получим систему n однородных линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов c_i [см. ниже, уравнения (2.3)]. Условие разрешимости этой системы — равенство нулю ее определителя — даст значения параметра k, при каждом из которых система имеет решение.

Полученные значения k будут приближениями к первым собственным значениям задачи, а соответствующие наборы коэффициентов c_i после подстановки каждого из них в (2.1) дадут приближения к первым собственным функциям.

Наибольший физический интерес будет представлять первое (минимальное), а может быть, еще и следующее собственное значение и соответствующие движения, так как при постепенном увеличении вертикального градиента температуры именно эти виды возмущений и возникнут в жидкости.

Систему (2.2) можно упростить. Преобразуем первый интеграл, воспользовавшись формулой Остроградского-Гаусса. Получим

$$\int \varphi_i \nabla p\, dV = \int \operatorname{div}(p\varphi_i)\, dV - \int p \operatorname{div} \varphi_i\, dV = \oint p\varphi_i\, dS = 0$$

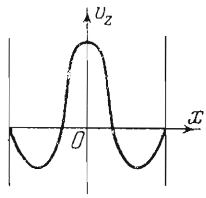
так как $\operatorname{div} \varphi_i = 0$, а φ_i на границе исчезает.

Таким образом, система уравнений задачи принимает следующий вид:

$$\int \varphi_i \Delta \mathbf{v}\, dV - k \int \varphi_i \gamma T\, dV = 0 \tag{2.3}$$

§ 3. Пример применения — вертикальная цилиндрическая полость. Пусть жидкость заполняет бесконечный вертикальный цилиндр, окруженный массивом. Направим ось z по оси цилиндра вверх, оси x и y расположим в горизонтальной плоскости. Исследуем устойчивость жидкости относительно возмущений двух разных видов.

а) Осесимметричный случай. В этом случае жидкость поднимается в осевой части цилиндра и опускается вдоль стенок (фиг. 1). В силу бесконечности цилиндра $v_r = v_\varphi = 0$. Уравнение непрерывности тогда дает $\partial v_z / \partial z = 0$. Поскольку зависимость от угла отсутствует,



Фиг. 1

$$v_z = f(r)$$

На границе

$$v_z = 0.$$

Должно также выполняться условие замкнутости потока

$$\int_0^1 v_z r\, dr = 0$$

Будем разыскивать v_z в виде полинома, содержащего только четные степени r. Ограничиваясь первыми двумя приближениями, получаем с учетом граничных условий

$$v_z = (1 - r^2)\left[c_1(1 - 3r^2) + c_2(r^2 - 2r^4)\right] \tag{3.1}$$

В режиме молекулярной теплопроводности $T_0 = -z$. Подставляя T_0 и скорость (3.1) в первое из уравнений (1.7) и решая совместно с последним, получим:

$$T = c_1\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{12}r^6\right) + c_2\left(\frac{1}{96} - \frac{1}{16}r^4 + \frac{1}{12}r^6 - \frac{1}{32}r^8\right) \tag{3.2}$$

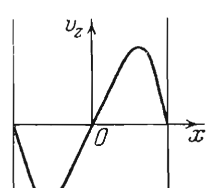
Пользуясь выражениями (3.1) и (3.2), составляем систему (2.3). Условие разрешимости этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{1}{240}k & \frac{2}{5} - \frac{1}{1680}k \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{1680}k & \frac{1}{5} - \frac{1}{996}k \end{vmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

В первом приближении (выражение для скорости содержит только один коэффициент c_1) собственное значение определяется минором, расположенным в левом верхнем углу определителя (3.3), откуда $k = 480$. Во втором приближении для нахождения собственного значения необходимо решить (3.3). Вычисление дает $k = 452.6$. Точное значение [6] составляет 452.1. Как видно, второе приближение отличается от точного значения на 0.1%.

б) Антисимметричный случай. Наиболее просто антисимметричный поток жидкости в бесконечном вертикальном цилиндре (в одной половине цилиндра жидкость поднимается, в другой опускается, фиг. 2) можно описать так:

$$v_r = v_\varphi = 0, \qquad v_z = f(r)\cos\varphi$$



Фиг. 2

Выбирая $f(r)$ в виде полинома, который содержит только нечетные степени r, получаем в первых двух приближениях

$$v_z = (1 - r^2)(c_1 r + c_2 r^3)\cos\varphi \tag{3.4}$$

Подставляя $T_0 = -z$ и (3.4) в первое из уравнений (1.7) и решая его совместно с последним, получим

$$T = \left[c_1\left(\frac{1 + 2\alpha}{12(1+\alpha)}r - \frac{1}{8}r^3 + \frac{1}{24}r^5\right) + c_2\left(\frac{1 + 3\alpha}{48(1+\alpha)}r - \frac{1}{24}r^5 + \frac{1}{48}r^7\right)\right]\cos\varphi \tag{3.5}$$

Здесь $\alpha = \varkappa / \varkappa_м$.

Полученные T и v позволяют составить систему (2.3). Условие разрешимости этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \frac{2+7\alpha}{720(1+\alpha)}k & \frac{1}{3} - \frac{3+13\alpha}{2880(1+\alpha)}k \\ \frac{1}{3} - \frac{3+13\alpha}{2880(1+\alpha)}k & \frac{4}{15} - \frac{17+87\alpha}{40320(1+\alpha)}k \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.6)$$

В первом приближении (взят один коэффициент c_1)

$$k = \frac{480(1+\alpha)}{2+7\alpha}$$

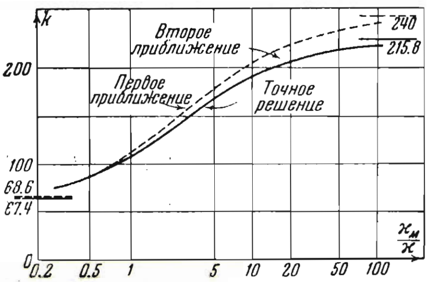
Параметр $k = f(\alpha^{-1})$ представлен пунктиром на фиг. 3. Там же сплошной линией изображена точная функция, которая выражается неявно сложным трансцендентным уравнением [6].

Во втором приближении необходимо уже решать полное уравнение (3.6). Для крайних точек находим

$k = 67.7$ при $\frac{1}{\alpha} = \frac{\varkappa_м}{\varkappa} = 0$ (точное значение 67.4)

$k = 215.8$ при $\frac{1}{\alpha} = \frac{\varkappa_м}{\varkappa} = \infty$ (точное значение 215.8)

Второе приближение в нашем масштабе на фиг. 3 совпадает с точной кривой.



Фиг. 3

Сравнивая оба рассмотренных случая, убеждаемся что антисимметричным возмущениям соответствует меньшее значение параметра устойчивости k. Возмущения такого вида, следовательно, развиваются в жидкости при меньших градиентах температуры и потому они обычно и наблюдаются в экспериментальной обстановке.

Отметим, что вычисленный теоретически для этого случая критический градиент температуры находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными [6].

§ 4. Горизонтальная цилиндрическая полость. Убедившись в эффективности предлагаемого приближенного метода, перейдем к рассмотрению задачи об устойчивости жидкости, заполняющей бесконечный горизонтальный цилиндр, окруженный массивом, подогреваемым снизу.

Рассмотрим случай плоских возмущений. Выберем вертикальную плоскость, перпендикулярную к оси цилиндра, за координатную плоскость xy, направим ось x вертикально вниз, ось y — горизонтально, ось z — по оси цилиндра.

Определим функцию тока следующими соотношениями:

$$v_x = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial F}{\partial x} \qquad (4.1)$$

В соответствии с (2.1) будем искать функцию тока в виде

$$F = c_1F_1 + c_2F_2 + \ldots + c_nF_n \qquad (4.2)$$

Введем функцию тока в (2.3). После вычислений получаем

$$\int \triangle F_i \triangle F dS + k \int \frac{\partial F_i}{\partial y} T dS = 0 \qquad (4.3)$$

Граничные условия для функции тока таковы:

$$(F)_{r=1} = 0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_{r=1} = 0 \qquad (4.4)$$

В качестве системы координатных функций F_i выберем полиномы вида $x^m y^n (1-r^2)^2$. Легко видеть, что при таком выборе все граничные условия удовлетворяются.

Ограничиваясь значениями $m+n \leqslant 2$, получаем

$$F=(1-r^2)^2\left[c_1+c_2x+c_3y+c_4x^2+c_5xy+c_6y^2\right] \tag{4.5}$$

Для определения величины ∇T_0, входящей в (1.7), необходимо решить уравнения молекулярной теплопроводности $\triangle T_0=0$, $\triangle T_{\text{м}}=0$. Учитывая граничные условия для температуры, получаем

$$T_0=\frac{2}{1+\alpha}\, r\cos\varphi \tag{4.6}$$

Подставляя (4.5) и (4.6) в первое из уравнений (1·7), решаем его совместно с последним. Вычисления дают громоздкое выражение для T, которое не приводится.

Приближенное значение T и соответствующие значения F и F_i позволяют составить систему (4.3). Условие разрешимости этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{vmatrix}=0 \tag{4.7}$$

где

$$a_{11}=32-\frac{2+7\alpha}{15(1+\alpha)^2}k,\quad a_{12}=a_{21}=4-\frac{3+13\alpha}{240(1+\alpha)^2}k$$

$$a_{13}=a_{31}=4+\frac{1-9\alpha}{240(1+\alpha)^2}k$$

$$a_{22}=\frac{28}{5}-\frac{31+129\alpha}{16800(1+\alpha)^2}k,\quad a_{23}=a_{32}=\frac{4}{5}+\frac{17-137\alpha}{33600(1+\alpha)^2}k$$

$$a_{33}=\frac{28}{5}-\frac{51+149\alpha}{16800(1+\alpha)^2}k$$

$$a_{44}=4-\frac{7+17\alpha}{2880(1+\alpha)^2}k,\quad a_{55}=4-\frac{31+41\alpha}{2880(1+\alpha)^2}k,\quad a_{66}=4-\frac{33+47\alpha}{13440(1+\alpha)^2}k$$

Перейдем к решению уравнения (4.7). Предположим сначала, что в выражении для F взяты только коэффициенты c_1, c_2 и c_3. Определитель (4.7) будет содержать тогда только строки и столбцы с номерами 1, 4, 5, и уравнение легко решается:

$$k_1=\frac{480(1+\alpha)^2}{2+7\alpha},\qquad k_2=\frac{11520(1+\alpha)^2}{31+41\alpha},\qquad k_3=\frac{11520(1+\alpha)^2}{7+17\alpha} \tag{4.8}$$

(корни занумерованы в порядке их возрастания).

Введем в рассмотрение коэффициенты c_4, c_5, c_6; получим тогда полное уравнение (4.7). При этом корни k_2 и k_3 остаются без изменения. Появляется корень

$$k_4=\frac{53760(1+\alpha)^2}{33+47\alpha} \tag{4.9}$$

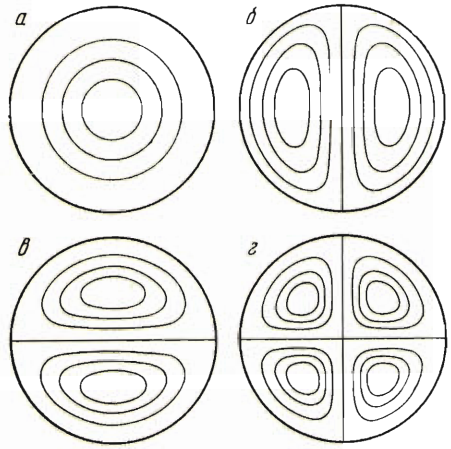
Строки и столбцы определителя с номерами 2, 3 уточняют приведенное выше приближенное значение первого собственного числа k_1. Значение для k_1 получается теперь как действительный корень кубического уравнения, которое может быть решено для каждого частного значения α. В частности, $k_1=205$ для $\alpha=0$ (в первом приближении $k_1=240$). Вычисления показывают, что поправка, вносимая коэффициентами c_4, c_6, сравнительно невелика и в наихудшем случае ($\alpha=0$) составляет 14%, быстро убывая с ростом α до нескольких процентов.

В соответствии со сказанным выше для F получаются четыре собственные функции, каждая из которых описывает возмущение определенного вида:

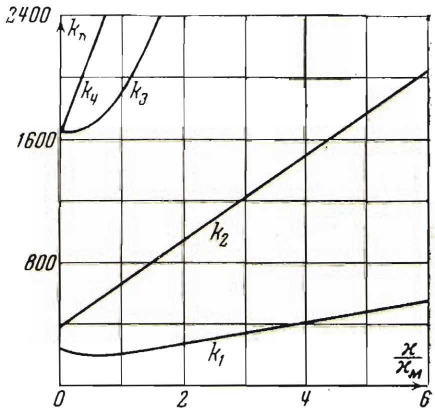
$$\Phi_1=(1-r^2)^2(c_1+c_4x^2+c_6y^2),\qquad \Phi_2=c_3(1-r^2)^2y$$
$$\Phi_3=c_2(1-r^2)^2x,\qquad \Phi_4=c_5(1-r^2)^2xy \tag{4.10}$$

Линии тока, соответствующие каждой собственной функции (4.10), изображены на фиг. 4. Графики, построенные на фиг. 5, дают зависимость собственных чисел (4.8), (4.9) от отношения коэффициентов теплопроводности жидкости и массива.

Полученные разультаты говорят о следующем. При достижении вертикальным градиентом температуры величины A_1, определяемой первым собственным значением k_1, в жидкости развиваются возмущения антисимметричного типа: траектории частиц — приближенно окружности (фиг. 4, *а*).



Фиг. 4



Фиг. 5

Движение, симметричное относительно вертикали (фиг. 4, *б*), могло бы возникнуть при большем градиенте A_2, определяемым вторым собственным значением k_2, в том случае, если бы жидкость по какой-либо причине не пришла в движение при первом критическом градиенте. Поскольку k_2 для малых α лишь незначительно превышает k_1, в условиях эксперимента при быстром увеличении градиента температуры вполне возможно возникновение движения, соответствующего второму собственному значению. Возникновение движений, соответствующих третьему и четвертому собственным значениям (фиг. 4, *в* и *г*), мало вероятно.

Отметим, что экспериментальные данные об условиях возникновения конвекции в горизонтальном цилиндре пока отсутствуют.

Автор выражает глубокую благодарность И. Г. Шапошникову и В. С. Сорокину за обсуждение затронутых вопросов и важные указания.

Поступила 27 I 1953

Молотовский государственный
педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции ПММ, т. XVII, вып. 1 1953.
2. Шапошников И. Г. К теории слабой конвекции. Журн. техн. физики, т. XXII, вып. 5, 1952.
3. Rayleigh J. W. On convection currents in a horisontal layer of fluid. Phil. Mag., vol. 32, 1916.
4. Geffreys H. Some cases of instability in fluid motion. Proc. Roy. Soc. A., vol. 118, 1928.
5. Pellew A., Southwell R. Convective motion in a fluid. Proc. Roy. Soc. A., vol. 176, 1940.
6. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. Гостехиздат, 1952.
7. Ландау Л., Лифшиц Е. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1944.