Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ЖИДКОСТИ, ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ

В. С. Сорокин

(Молотов)

Рассматриваются стационарные решения нелинейных уравнений, описывающих конвекцию в жидкости, заполняющей замкнутый объем и подогреваемой снизу, в условиях, когда возможно равновесие. Оказывается, что если (постоянный в этих условиях) градиент температуры не превышает некоторого критического, всякое движение жидкости затухает. Если же градиент температуры выше критического, то существуют при тех же краевых условиях еще два стационарных движения, кроме равновесного. Их интенсивность при градиенте, немного превышающем критический, пропорциональна корню квадратному из разности чисел Релея, соответствующих данному и критическому градиентам температур.

§ 1. Уравнения движения. Пусть жидкость заполняет объем V с твердыми неподвижными стенками и пусть она подогревается снизу таким образом, что при неподвижной жидкости устанавливается везде одинаковый вертикальный градиент температуры [1]

$$T_0 = -A\gamma\mathbf{r} \qquad (A > 0) \tag{1.1}$$

Здесь γ обозначает единичный вектор, направленный вертикально вверх, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор какой-нибудь точки объема V. Пусть условия подогрева остаются неизменными, так что на некоторых участках стенок S_1 поддерживаются постоянные температуры, а на других участках S_2 — постоянные потоки тепла, т. е. нормальные составляющие градиентов температуры. Уравнения движения жидкости в этих условиях будут [2]

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\frac{p}{\rho_0} - \nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} + \beta g\gamma T$$
$$\dot{T} + \mathbf{v}\nabla T = \chi\nabla^2 T + A\gamma\mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.2}$$

причем T и p обозначают разности температуры и давления и их равновесных значений в данной точке, а остальные обозначения обычные. Краевые условия будут

$$T\,|_{S_1} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{S_2} = 0, \qquad \mathbf{v}\,|_S = 0 \tag{1.3}$$

Введем безразмерные переменные, взяв за единицу длины характерный размер объема l, единицы скорости ν/l и единицы температуры

$$\left(\frac{A\nu^3}{\chi\beta g l^2}\right)^{1/2}$$

а также обозначения

$$C \equiv (Ra)^{1/2} \equiv \left(\frac{\beta g A l^4}{\nu\chi}\right)^{1/2}, \qquad P \equiv \frac{\nu}{\chi} \tag{1.4}$$

Тогда уравнения (1.2) примут вид:

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\operatorname{grad}p - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} + C\gamma T$$
$$P\,[\dot{T} + \mathbf{v}\nabla T] = \nabla^2 T + C\gamma\mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.5}$$

Из уравнений (1.5) вытекает одно важное интегральное соотношение, для получения которого умножим первое из уравнений (1.5) скалярно на $\mathbf{v}$, второе на T и, сложив результаты, проинтегрируем по всему объему жидкости. В силу условия непрерывности

$$\int \mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}dV = \int \operatorname{div}\left(\tfrac{1}{2}v^2\mathbf{v}\right)dV = \int d\mathbf{S}\left(\tfrac{1}{2}v^2\mathbf{v}\right) = 0$$

$$\int T\mathbf{v}\nabla T dV = \int \operatorname{div}\left(\tfrac{1}{2}T^2\mathbf{v}\right)dV = \int d\mathbf{S}\left(\tfrac{1}{2}T^2\mathbf{v}\right) = 0$$

Далее, интегрируя по частям, найдем

$$\int \mathbf{v}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}\,dV = \int(\operatorname{rot}\mathbf{v})^2\,dV, \qquad \int T\nabla^2 T dV = -\int(\operatorname{grad}T)^2\,dV$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int[\mathbf{v}^2 + PT^2]\,dV = -\int[(\operatorname{rot}\mathbf{v})^2 + (\operatorname{grad}T)^2 - 2C_\gamma\mathbf{v}T]\,dV \tag{1.6}$$

Можно показать [1], что для интеграла в правой части этого уравнения (в дальнейшем он обозначается через J) при скоростях и температурах, удовлетворяющих условиям (1.3), выполняется неравенство

$$J \geqslant \sigma_0(C)K \qquad \left(K \equiv \int[\mathbf{v}^2 + PT^2]\,dV\right) \tag{1.7}$$

где σ_0 — некоторая зависящая от C величина. Знак равенства получается для «первого критического решения» (см. [1]). При этом σ_0 положительно при $C = 0$, непрерывно уменьшается с возрастанием C и при достаточно больших C становится отрицательным. Через C_0 обозначим то значение C, для которого σ_0 равно нулю. Это значение C мы будем называть критическим. Стационарные решения исследуемых уравнений при значениях C, меньших критического, оказываются совершенно не такими, как в случае надкритических C.

§ 2. Область подкритических градиентов $C \leqslant C_0$. Пусть градиент температуры не превышает критического

$$\left(\frac{\beta g A l^4}{\nu\chi}\right)^{1/2} < C_0 \tag{2.1}$$

так что

$$\sigma_0(C) > 0 \tag{2.2}$$

Неравенство (1.7) вместе с интегральным соотношением (1.6) дает

$$\frac{\partial K}{\partial t} \leqslant -2\sigma_0 K, \quad \text{или} \quad K(t) \leqslant K(0)\,e^{-2\sigma_0 t} \tag{2.3}$$

При $t \to \infty$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю, поэтому

$$\int[\mathbf{v}^2 + PT^2]\,dV \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty \tag{2.4}$$

т. е. $\mathbf{v} \to 0$ и $T \to 0$. Таким образом, если критерий Релея (1.4) меньше критического, то любое движение в жидкости затухает. Единственное стационарное решение — равновесное, когда скорость равна нулю, а температура распределена по закону (1.1). Результат этот более общий, чем в работе [1], где доказано, что затухают только малые возмущения.

Пусть теперь C точно равно C_0. Случай этот заслуживает подробного разбора, так как часто приходится слышать, что при достижении критического градиента температуры возникает стационарное движение. Линеаризованные уравнения движения, исследованные в работе [1], действительно имеют тогда не зависящее от времени и неравновесное решение. Но, как сейчас будет показано, нелинейные уравнения (1.5) при $C = C_0$ никаких стационарных решений, кроме равновесного, не имеют. Из уравнения (2.3) этого нельзя заключить, так как оно показывает только, что в данном случае интеграл K не увеличивается. Поэтому придется заняться более сложным исследованием.

Покажем прежде всего, что C_0 равно минимуму интеграла

$$L \equiv \frac{1}{2} \int [(\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 + (\operatorname{grad} T)^2] \, dV \tag{2.5}$$

при условии, что

$$M \equiv \left| \int \gamma \mathbf{v} T dV \right| = 1 \tag{2.6}$$

и что требование несжимаемости и краевые условия (1.3) выполнены.

Действительно, очевидно, что

$$\sigma_0 \equiv \inf \frac{J}{K} = \inf \frac{2[L - CM]}{K} = \inf \frac{2M}{K} \left[\frac{L}{M} - C \right] \tag{2.7}$$

так что если $C = C_0$ и $\sigma_0 = 0$, то и

$$\inf \frac{L}{M} = C_0 \tag{2.8}$$

т. е. C_0 будет также минимальным значением интеграла (2.5).

Теперь ясно, что если бы при $C = C_0$ существовало неравновесное стационарное решение уравнений (1.5), то, как это видно из (1.6), для него было бы

$$L - C_0 M = 0 \tag{2.9}$$

т. е. это решение реализовало бы минимум интеграла (2.5) с дополнительным условием (2.6). Это решение должно было бы удовлетворять соответствующим уравнениям Эйлера, которые, как легко видеть, имеют вид:

$$-\operatorname{grad} p - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} + C_0 \gamma T = 0, \qquad \nabla^2 T + C_0 \gamma \mathbf{v} = 0 \tag{2.10}$$

причем через p обозначен множитель Лагранжа для условия несжимаемости. С другой же стороны, это же решение должно удовлетворять уравнениям (1.5). Отсюда вытекает, что при $C = C_0$ для стационарного решения должно иметь место равенство

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0 \tag{2.11}$$

а это значит, что траектории частиц жидкости прямые. В замкнутом объеме это невозможно. Итак, при $C \leqslant C_0$ нелинейные уравнения (1.5) не имеют никаких стационарных решений, кроме равновесных.

§ 3. Область надкритических градиентов $C > C_0$. Для градиента температуры, превышающего критический, $\sigma_0(C) < 0$ и неравенство (2.3) дает

$$\frac{\partial K}{\partial t} \leqslant -2\sigma_0 K > 0 \tag{3.1}$$

Никаких определенных заключений отсюда сделать нельзя и нужно исследовать самые уравнения (1.5). В этом параграфе будут построены не зависящие от времени выражения, имеющие вид рядов, формально удовлетворяющих этим уравнениям.

Так как при критическом C отличных от равновесного стационарных решений все еще нет, естественно думать, что если такие решения появляются при $C > C_0$, они будут исчезать вместе с разностью $C - C_0$. В работе [3] было высказано предположение, что эти решения разлагаются в ряды по целым степеням разности $C - C_0$. Что такие ряды не могут быть сходящимися, ясно сразу, ибо, сходясь при некоторой положительной разности $C - C_0 = a$, они должны были бы сходиться и при отрицательной, равной минус a. Но тогда эти ряды давали бы неравновесные решения в подкритической области, отсутствие которых мы только что доказали. Однако такого рода ряды не могут быть построены даже и формально, что можно доказать следующим образом. Положим в уравнениях (1.5) $C = C_0 + \varepsilon$ и будем искать стационарные $\mathbf{v}$, T и p в виде рядов по целым степеням ε. Для коэффициентов при ε в этих рядах получатся уравнения (2.9), решение которых («первое критическое решение» [1]) обозначим $\mathbf{v}_0$, T_0, p_0. Для коэффициентов при ε^2 получим уравнения, аналогичные (2.9), но в их правых частях будут уже не нули, а выражения

$$(\mathbf{v}_0 \nabla)\,\mathbf{v}_0 - \gamma T_0, \qquad v_0 \nabla T_0 - \gamma \mathbf{v}_0$$

соответственно. Умножение первого уравнения на $\mathbf{v}_0$ и второго на T_0 и интегрирование по объему жидкости даст слева нули, а справа в обоих уравнениях один и тот же интеграл

$$\int \gamma \mathbf{v}_0 T_0 dV$$

равный, как легко видеть из (2.9), интегралам

$$\int (\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0)^2\, dV = \int (\mathrm{grad}\, T_0)^2\, dV$$

которые для неравновесных решений нулю равняться не могут, ибо из равенства нулю вихря скорости в несжимаемой жидкости в закрытом объеме следует, что эта жидкость неподвижна. Разложение по ε, таким образом, построить нельзя.

Простые соображения подсказывают разложение по целым степеням корня квадратного из разности $C - C_0$. Поэтому положим

$$C = C_0 + \eta^2 \tag{3.2}$$

и будем искать решение уравнений

$$\begin{gathered} -\mathrm{grad}\, p - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} + C_0\gamma T = (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} - \eta^2\gamma T \\ \nabla^2 T + C_0\gamma\mathbf{v} = P\mathbf{v}\nabla T - \eta^2\gamma\mathbf{v}T \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

с краевыми условиями (1.3) в виде рядов по степеням η:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \eta\,[\mathbf{u}_0 + \eta\mathbf{u}_1 + \eta^2\mathbf{u}_2 + \cdots] \\ T &= \eta\,[s_0 + \eta s_1 + \eta^2 s_2 + \cdots] \\ p &= \eta\,[q_0 + \eta q_1 + \eta^2 q_2 + \cdots] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Подставляя эти разложения в (3.3) и отбирая члены с η^{n+1}, получим последовательность систем ($n = 0, 1, 2, \ldots$):

$$\begin{gathered} -\operatorname{grad} q_n - \operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\mathbf{u}_n + C_0\gamma s_n = -\gamma s_{n-2} + \sum_{i+k=n-1} (\mathbf{u}_i \nabla)\,\mathbf{u}_k \equiv \mathbf{f}_n \\ \nabla^2 s_n + C_0\gamma\mathbf{u}_n = -\gamma\mathbf{u}_{n-2} + P \sum_{i+k=n-1} \mathbf{u}_i \nabla s_k \equiv g_n \qquad \operatorname{div}\mathbf{u}_n = 0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

(Если в этих уравнениях один из индексов окажется отрицательным, то соответствующее слагаемое просто опускается.) Системы эти можно решать последовательно по порядку их номеров, так как правые части их содержат неизвестные функции только с индексами, меньшими n. При этом каждый раз придется искать решение неоднородной системы с одинаковой во всех случаях правой частью. Соответствующая однородная система будет всегда вида (2.10), и она имеет неравновесное решение [1], именно первое критическое решение $\mathbf{v}_0$, T_0, p_0, реализующее минимум интеграла (2.5) с дополнительным условием (2.6). Мы будем дальше считать его нормированным в смысле

$$\int \gamma\mathbf{v}_0 T_0\, dV = 1 \tag{3.6}$$

Решения неоднородных систем (3.5) будут существовать только тогда, если будут выполнены условия разрешимости. Они получатся, если умножить первое из уравнений одной из систем (3.5) скалярно на $\mathbf{v}_0$, второе на T_0, сложить и проинтегрировать по занятому жидкостью объему. Переведя интегрированием по частям дифференциальные операции на $\mathbf{v}_0$ и T_0, мы получим слева нуль.

$$\int [\mathbf{f}_n\mathbf{v}_0 + g_n T_0]\, dV = 0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{3.7}$$

и условия разрешимости для $n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$ будут

$$\int \gamma\,[s_{n-2}\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_{n-2}T_0]\, dV = \sum_{i+k=n-1} \int \{\mathbf{v}_0\,(\mathbf{u}_i \nabla)\,\mathbf{u}_k + PT_0\mathbf{u}_i \nabla s_k\}\, dV \tag{3.8}$$

Если они удовлетворены, системы (3.5) можно решить (оператор в левой части (3.5) на соответствующем множестве функций $\mathbf{v}$, T, p положительно-определенный), причем, очевидно, решения будут иметь вид:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{U}_n + \beta_n\mathbf{v}_0\,, \qquad s_n = S_n + \beta_n T_0\,, \qquad q_n = Q_n + \beta_n p_0 \tag{3.9}$$

где β_n — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь системы (3.5) последовательно.

1°. Для $n = 0$. В этом случае $f_0 = g_0 = 0$. Условие разрешимости выполняется тривиальным образом, и решение будет

$$\mathbf{u}_0 = \beta_0\mathbf{v}_0\,, \qquad s_0 = \beta_0 T_0\,, \qquad q_0 = \beta_0 p_0 \tag{3.10}$$

Здесь β_0 — пока неопределенная постоянная, а $\mathbf{v}_0$, T_0, p_0 — первое критическое решение, нормированное по (3.6).

2°. Для $n=1$. В этом случае

$$\mathbf{f}_1 = (\mathbf{u}_0 \nabla)\,\mathbf{u}_0 = \beta_0^2 (\mathbf{v}_0 \nabla)\,\mathbf{v}_0\,, \qquad g_1 = P\mathbf{u}_0 \nabla s_0 = \beta_0^2 P\mathbf{v}_0 \nabla T_0 \tag{3.11}$$

условие же разрешимости удовлетворяется тождественно:

$$0 = \beta_0^2 \int \{\mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \nabla)\,\mathbf{v}_0 + PT_0 (\mathbf{v}_0 \nabla)\,T_0\}\,dV = \beta_0^2 \int \operatorname{div}\left\{\mathbf{v}_0 \cdot \frac{\mathbf{v}_0^2 + PT_0^2}{2}\right\} dV = 0$$

Решение будет

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{U}_1 + \beta_1 \mathbf{v}_0, \qquad s_1 = S_1 + \beta_1 T_0, \qquad q_1 = Q_1 + \beta_1 p_0 \tag{3.12}$$

3°. Для $n=2$. **Условие разрешимости** по (3.8) будет

$$2\beta_0 \int \gamma \mathbf{v}_0 T_0\,dV = \beta_0 \int \{\mathbf{v}_0\,(\mathbf{v}_0 \nabla)\,\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_0\,(\mathbf{u}_1 \nabla)\,\mathbf{v}_0 + PT_0 \mathbf{v}_0 \nabla s_1 + PT_0 \mathbf{u}_1 \nabla T_0\}\,dV$$

Заметив, что второе и четвертое слагаемые в правой части преобразуются в интегралы по поверхности и оказываются нулями, имеем, учитывая (3.6)

$$2 = \int [\mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \nabla)\,\mathbf{u}_1 + PT_0 \mathbf{v}_0 \nabla s_1]\,dV \tag{3.13}$$

Если здесь заменить $\mathbf{u}_1$ и s_1 по (3.12), то слагаемые с β_1 опять преобразуются в поверхностные интегралы и исчезают; следовательно,

$$2 = \int [\mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \nabla)\,\mathbf{U}_1 + PT_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) S_1]\,dV \tag{3.14}$$

Из этого соотношения определяется β_0. Действительно, f_1 и g_1 содержат множитель β_0^2, так что и $\mathbf{U}_1$ и S_1 будут пропорциональны β_0^2:

$$\mathbf{U}_1 = \beta_0^2 \mathbf{W}, \qquad S_1 = \beta_0^2 R \tag{3.15}$$

где $\mathbf{W}$ и R уже не содержат β_0. Следовательно, (3.14) дает

$$\beta_0^2 = 2\left[\int \{\mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \nabla)\,\mathbf{W} + PT_0 \mathbf{v}_0 \nabla R\}\,dV\right]^{-1} \tag{3.16}$$

В следующем параграфе даны выражения для $\mathbf{W}$ и R, из которых видно, что β_0, определенное по этой формуле, будет вещественным.

4°. Для $n>2$. Покажем сначала, что β_{n-2} встретится в первый раз в n-м условии разрешимости. В самом деле, в $(n-1)$-м условии оно могло бы встретиться только в сумме в правой части и при этом только в комбинации с $\mathbf{u}_0$ и s_0. Но из таких слагаемых β_{n-2} выпадает, так как

$$\int \mathbf{v}_0 (\mathbf{u}_{n-2} \nabla)\,\mathbf{u}_0\,dV = \beta_0 \int \mathbf{v}_0 (\mathbf{u}_{n-2} \nabla)\,\mathbf{v}_0\,dV = 0$$

$$\int \mathbf{v}_0 (\mathbf{u}_0 \nabla)\,\mathbf{u}_{n-2}\,dV = \int \mathbf{v}_0 (\mathbf{u}_0 \nabla)\,\mathbf{U}_{n-2}\,dV + \beta_{n-2} \int \mathbf{v}_0 (\mathbf{u}_0 \nabla)\,\mathbf{v}_0\,dV$$

и последний интеграл равен нулю. Точно так же

$$\int T_0 \mathbf{u}_{n-2} \nabla s_0\,dV = \beta_0 \int \operatorname{div}\left(\frac{T_0^2}{2}\,\mathbf{u}_{n-2}\right) dV = 0$$

$$\int T_0 \mathbf{u}_0 \nabla s_{n-2}\,dV = \int T_0 \mathbf{u}_0 \nabla S_{n-2}\,dV + \beta_{n-2} \int T_0 \mathbf{u}_0 \nabla T_0\,dV$$

и снова последний интеграл — нуль.

Выделяя слагаемые с β_{n-2}, n-е условие можно переписать так:

$$\beta_{n-2}\left\{\int 2 - \int [\mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{U}_1 + PT_0\mathbf{v}_0\nabla S_1]\,dV\right\} = -\int\gamma\,[\mathbf{v}_0 S_{n-2} + \mathbf{U}_{n-2}T_0]\,dV +$$

$$+\int\left\{\mathbf{v}_0(\mathbf{u}_0\nabla)\mathbf{U}_{n-1} + \mathbf{v}_0(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{U}_{n-2} + \sum_{\substack{i+k=n-1\\ i,\,k>1}} \mathbf{u}_0(\mathbf{u}_i\nabla)\,\mathbf{u}_k\right\}dV +$$

$$+\int\left\{T_0(\mathbf{u}_0\nabla)S_{n-1} + T_0(\mathbf{u}_1\nabla)S_{n-2} + \sum_{\substack{i+k=n-1\\ i,\,k>1}} T_0(\mathbf{u}_i\nabla)\,s_k\right\}dV \qquad (3.17)$$

Отсюда можно определить β_{n-2}. Таким образом, можно построить ряды, формально удовлетворяющие уравнениям. Вопрос, сходятся ли эти ряды или они асимптотические, остается открытым. Однако можно думать, что каждый такой ряд в каком-то смысле изображает некоторое стационарное решение уравнений (1.5). Так как знак η можно выбрать двояко: $\eta = \pm(C - C)_0^{1/2}$, то при $C > C_0$ должны существовать, кроме равновесного, два стационарных решения. При очень малом η они имеют вид: $\pm\eta\{\mathbf{v}_0,\ T_0,\ p_0\}$, и можно думать, что описываемые этими формулами стационарные движения возникают следующим образом: при C, большем критического C_0, но меньшем следующего собственного значения уравнений стационарных малых возмущений, существует один тип малых возмущений, нарастающих со временем. Возмущения этого типа, пока они малы, описываются линейными уравнениями и имеют вид: const $\{v_0,\ T_0,\ p_0\}\,e^{-\sigma t}$. Движения с разными знаками постоянной стремятся к разным стационарным движениям.

§ 4. Доказательство вещественности стационарных решений. Ранее [1] была введена последовательность собственных решений системы

$$-\operatorname{grad} p - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} + C\gamma T = 0, \qquad \nabla^2 T + C\gamma\mathbf{v} = 0\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad (4.1)$$

с краевыми условиями (1.3) («критических» решений). Обозначим i-е ($i = 0, 1, 2\ldots$) собственное значение и соответствующее ему критическое решение через C_i, $\{\mathbf{v}_i,\ T_i,\ p_i\}$. Критические решения удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки

$$\int\gamma\mathbf{v}_i T_k\,dV = \delta_{ik}, \qquad \int\operatorname{rot}\mathbf{v}_i\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}_k\,dV = \int\operatorname{grad}T_i\cdot\operatorname{grad}T_k\,dV = C_i\delta_{ik} \quad (4.2)$$

и, вероятно, образуют полную систему. При помощи них легко построить решения неоднородных систем (3.5). Положим

$$\mathbf{u}_n = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_n^{(k)}\mathbf{v}_k, \qquad s_n = \sum_{k=0}^{\infty}\theta_n^{(k)}T_k\,, \qquad q_n = \sum_{k=0}^{\infty}\pi_n^{(k)}p_k \qquad (4.3)$$

где β, θ, π — постоянные коэффициенты. Индекс n дальше писать не будем, рассматривая типичную систему (3.5). Ряды (4.4) подставим в (3.5) и, умножив первое уравнение на $\mathbf{v}_i$, а второе на T_i, проинтегрируем по объему и используем условия ортогональности (4.2). Получим

$$-C_i\beta^{(i)} + C_0\theta^{(i)} = \int\mathbf{f}\mathbf{v}_i\,dV\,, \qquad C_0\beta^{(i)} - C_i\theta^{(i)} = \int g T_i\,dV \qquad (4.4)$$

Если $i=0$, то в силу (3.7) оба уравнения одинаковы. Они дают

$$\theta^{(0)} = \beta^{(0)} - \frac{1}{C_0}\int gT_0\,dV \tag{4.5}$$

причем $\beta^{(0)}$ произвольно. При $i>0$ решение системы (4.4) будет

$$\begin{aligned} \beta^{(i)} &= -\frac{1}{C_i^2 - C_0^2}\left[C_i\int \mathbf{f}\mathbf{v}_i\,dV + C_0\int gT_i\,dV\right] \\ \theta^{(i)} &= -\frac{1}{C_i^2 - C_0^2}\left[C_0\int \mathbf{f}\mathbf{v}_i\,dV + C_i\int gT_i\,dV\right] \end{aligned} \tag{4.6}$$

Определение $\pi^{(i)}$ не представляет интереса. По этим формулам вычислим первые члены разложений (3.4). Так как $f_0 = g_0 = 0$, то (4.5) дает $\theta_0^{(0)} = \beta_0^{(0)} \equiv \beta_0$, а при $i>0$ по (4.6) имеем $\theta_0^{(i)} = \beta_0^{(i)} = 0$.

Следовательно, $\mathbf{u}_0 = \beta_0\mathbf{v}_0$, $s_0 = \beta_0 T_0$, $q_0 = \beta_0 p_0$ [см. (3.10)]. Для $n=1$, пользуясь (3.11), получим из (4.5) и (4.6) $\theta_1^{(0)} = \beta_1^{(0)}$ и при $i>0$

$$\beta_1^{(i)} = -\beta_0^2\,\frac{C_i a_{i00} + C_0 b_{i00}}{C_i^2 - C_0^2}, \qquad \theta_1^{(i)} = -\beta_0^2\,\frac{C_0 a_{i00} + C_i b_{i00}}{C_i^2 - C_0^2} \tag{4.7}$$

если обозначить для краткости

$$\int \mathbf{v}_i(\mathbf{v}_k\nabla)\,\mathbf{v}_l\,dV \equiv a_{ikl} = -a_{lki}, \qquad P\int T_i(\mathbf{v}_k\nabla)\,T_l\,dV \equiv b_{ikl} = -b_{lki} \tag{4.8}$$

Таким образом, (4.9)

$$\mathbf{u}_1 = \beta_1^{(0)}\mathbf{v}_0 - \beta_0^2\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{C_i a_{i00} + C_0 b_{i00}}{C_i^2 - C_0^2}\right]\mathbf{v}_i, \quad s_1 = \beta_1^{(0)}\ T_0 - \beta_0^2\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{C_0 a_{i00} + C_i b_{i00}}{C_i^2 - C_0^2}\right]T_i$$

Наконец, по формуле (3.16) вычислим β_0:

$$\beta_0^2 = 2\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i\left(a_{i00}^2 + b_{i00}^2\right) + 2C_0 a_{i00} b_{i00}}{C_i^2 - C_0^2}\right]^{-1} \tag{4.10}$$

[здесь использованы свойства симметрии (4.8)]. Так как $C_i > C_0$ $(i>0)$, то ясно, что каждый член суммы положителен и для β_0 получаются два вещественных значения. Остальные операции, служащие для определения разложений (3.4), линейны и, таким образом, оба стационарных решения оказываются вещественными. Они имеют вид:

$$\mathbf{v} = \pm 2\beta_0\sqrt{C - C_0}\,\mathbf{v}_0 + \ldots, \qquad T = \pm 2\beta_0\sqrt{C - C_0}\,T_0 + \ldots \tag{4.11}$$

Рассмотренная здесь задача является посуществу частным случаем задачи о возникновении турбулентности. Появление нескольких стационарных решений при одних и тех же краевых условиях, когда входящий в уравнение параметр переходит через некоторое критическое значение, повидимому, характерно для этой проблемы; на это было указано Л. Д. Ландау[2].

Поступила 11 VII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
2. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ОГИЗ, 1944.
3. Шапошников И. Г. К теории слабой конвекции. Журнал техн. физики, т. XXII, вып. 5, 1952.