Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОСНОВНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С КРУГОВОЙ ЛИНИЕЙ РАЗДЕЛА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

В. И. Моссаковский

(Днепропетровск)

Работа посвящена решению основной смешанной задачи теории упругости для полупространства, когда на одной части границы (внутри круга) заданы компоненты вектора перемещений, а на остальной части — значения компонент внешнего напряжения. В виде примера на применение метода рассмотрена задача о симметричном давлении плоского круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления.

Автор приносит благодарность Н. А. Ростовцеву за ряд замечаний, сделанных им при рецензировании этой работы по поручению редакции ПММ.

§ 1. Введем прямоугольные декартовы координаты таким образом, чтобы граница упругого полупространства совпадала с плоскостью $z = 0$. Внутри области S этой плоскости заданы компоненты вектора перемещения, а на остальной части плоскости, которую будем называть областью S^*, заданы компоненты внешнего напряжения. Кроме того, считаем, что напряжения и смещения исчезают на бесконечности.

Решение этой задачи ищем в виде [1]

$$u = \varphi_1 + z\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad v = \varphi_2 + z\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad w = \varphi_3 + z\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{1.1}$$

Здесь $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ — перемещения, φ_1, φ_2, φ_3, ψ — гармонические в полупространстве функции x, y, z, связанные соотношением

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{4\nu - 3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right) \tag{1.2}$$

Выражая напряжения через деформации и используя формулы (1.1), находим компоненты тензора напряжений σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} на плоскости $z = 0$:

$$\begin{aligned}
\sigma_z(x, y, 0) &= (2\mu + \lambda)\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_3 + \psi) + \lambda\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right) \\
\tau_{xz}(x, y, 0) &= \mu\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \\
\tau_{yz}(x, y, 0) &= \mu\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Основные задачи теории упругости для полупространства хорошо изучены, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} равны нулю в области S^*.

Из формул (1.1), положив $z=0$, получим (1.4)

$$u(x, y, 0)=\varphi_1(x, y, 0), \qquad v(x, y, 0)=\varphi_2(x, y, 0), \qquad w(x, y, 0)=\varphi_3(x, y, 0)$$

Введя обозначение

$$\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2(x, y, z)}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_4(x, y, z)}{\partial z} \tag{1.5}$$

и исключив из формул (1.3) при помощи (1.2) функцию ψ, получим граничные условия для определения φ_3 и φ_4 в следующем виде:

$$\begin{gathered}\varphi_3(x, y, 0)=w(x, y), \qquad \left(\frac{\partial\varphi_4}{\partial z}\right)_{z=0}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{в области } S \\ \varphi_3(x, y, 0)-A\varphi_4(x, y, 0)=F(x, y), \qquad \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}-\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_4}{\partial z}\right)_{z=0}=0 \quad \text{в области } S^*\end{gathered} \tag{1.6}$$

где $F(x, y)$ — гармоническая в области S^* функция, подлежащая определению, $A=(2\mu+\lambda)/\mu$.

§ 2. В полупространстве $z\leqslant 0$ заданы две гармонические функции $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ граничными условиями

$$\begin{gathered}F_1(x, y, 0)=\varphi_1(\rho), \qquad \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_{z=0}=\varphi_2(\rho) \qquad \text{внутри круга } x^2+y^2=a^2 \\ F_1(x, y, 0)-AF_2(x, y, 0)=0, \qquad \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-B\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_{z=0}=0 \quad \text{вне круга } x^2+y^2=a^2\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\rho^2=x^2+y^2$ — радиус-вектор, A, B — постоянные, причем $A\neq B$.

Функции $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$ в силу их независимости от угла φ обозначим соответственно $F_1(\rho, z)$, $F_2(\rho, z)$ и представим в виде

$$F_i(\rho, z)=\int_0^\infty f_i(\alpha) J_0(\rho\alpha) e^{\alpha z} dz \qquad (i=1, 2) \tag{2.2}$$

Дифференцируя (2.2) по z, получим

$$\frac{\partial F_i(\rho, z)}{\partial z}=\int_0^\infty f_i(\alpha)\alpha J_0(p\alpha) e^{\alpha z} d\alpha \qquad (i=1, 2) \tag{2.3}$$

Воспользуемся представлением функций Бесселя в виде контурных интегралов [2]

$$\begin{gathered}J_0(\rho\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{2^{-s}\Gamma(^1/_2-{}^1/_2 s)}{\Gamma(^1/_2+{}^1/_2 s)}\rho^{s-1}\alpha^{s-1}ds \\ \alpha J_0(\rho\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{2^{1-s}\Gamma(1-{}^1/_2 s)}{\Gamma(^1/_2 s)}\rho^{s-2}\alpha^{s-1}ds\end{gathered} \tag{2.4}$$

Подставив эти выражения в формулы (2.2), (2.3), изменив порядок интегрирования и обозначив

$$\int_0^\infty f_i(\alpha) e^{\alpha z}\alpha^{s-1}d\alpha=\Phi_i(s, z) \qquad (i=1, 2) \tag{2.5}$$

получим

$$F_i(\rho, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_i(s, z)\frac{2^{-s}\Gamma(1/2 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s)}\rho^{s-1}ds$$
$$\frac{\partial F_i(\rho, z)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_i(s, z)\frac{2^{1-s}\Gamma(1 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 s)}\rho^{s-2}ds \qquad (i = 1,2) \qquad (2.6)$$

Введем две функции $U_1(x, z)$, $U_2(x, z)$, гармонические в полуплоскости $z \leqslant 0$, антисимметричные относительно x, соотношениями

$$U_i(x, z) = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} f_i(\alpha)\sin(\alpha x)\, e^{\alpha z} d\alpha \qquad (i = 1, 2) \qquad (2.7)$$

Дифференцируя (2.7) по z, получим

$$\frac{\partial U_i(x, z)}{\partial z} = \int_0^\infty f_i(\alpha)\sin(\alpha x)\, e^{\alpha z} d\alpha \qquad (i = 1, 2) \qquad (2.8)$$

Подставим в (2.7), (2.8) вместо функций $\alpha^{-1}\sin\alpha x$, $\sin\alpha x$ следующие представления

$$\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{\pi}\,\frac{2^{1-s}\Gamma(1/2 - 1/2 s)}{\Gamma(1 + 1/2 s)} x^s \alpha^{s-1} ds$$
$$\sin\alpha x = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{\pi}\,\frac{2^{2-s}\Gamma(1 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s)} x^{s-1}\alpha^{s-1} ds \qquad (2.9)$$

Изменив порядок интегрирования и воспользовавшись формулами (2.6), получим

$$U_i(x, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_i(s, z)\frac{\sqrt{\pi}\,2^{1-s}\Gamma(1/2 - 1/2 s)}{\Gamma(1 + 1/2 s)} x^s ds$$
$$\frac{\partial U_i(x, z)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_i(s, z)\frac{\sqrt{\pi}\,2^{2-s}\Gamma(1 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s)} x^{s-1} ds \qquad (i = 1, 2) \qquad (2.10)$$

Воспользовавшись формулами

$$\int_0^x \rho^{2\alpha-1}(x^2 - \rho^2)^{\beta-1} d\rho = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{2\alpha+2\beta-2}$$
$$\int_x^\infty \rho^{-2\alpha-2\beta+1}(\rho^2 - x^2)^{\beta-1} d\rho = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{-2\alpha} \qquad (2.11)$$

справедливыми при условии $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, из формул (2.6) имеем

$$\int_0^x \frac{F_i(\rho, z)\,\rho\, d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_i(s, z)\frac{\sqrt{\pi}\,2^{-s-1}\Gamma(1/2 - 1/2 s)}{\Gamma(1 + 1/2 s)} x^s ds$$
$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{F_i(\rho, z)\,\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_i(s, z)\frac{\sqrt{\pi}\,2^{-s}\Gamma(1 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s)} x^{s-1} ds \qquad (i = 1, 2) \qquad (2.12)$$

или, используя (2.10):

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{F_i(\rho, z)\rho\, d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}} = \frac{1}{4}\frac{\partial U_i(x, z)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\int_x^\infty \frac{F_i(\rho, z)\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2-x^2}} = \frac{1}{4}\frac{\partial U_i(x, z)}{\partial z} \qquad (i=1, 2) \tag{2.13}$$

Аналогично, используя формулы (2.11), из (2.12) получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\rho \frac{\partial U_i(x, z)}{\partial x}\frac{dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Phi_i(s, z)\frac{2^{-s}\Gamma(1/2-1/2 s)}{\Gamma(1/2+1/2 s)}\rho^{s-1}ds \qquad (i=1, 2)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty \frac{\partial U_i(x, z)}{\partial x}\frac{dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Phi_i(s, z)\frac{2^{1-s}\Gamma(1-1/2 s)}{\Gamma(1/2 s)}\rho^{s-2}ds \tag{2.14}$$

или, используя (2.6), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\rho \frac{\partial U_i(x, z)}{\partial x}\frac{dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}} = F_i(\rho, z), \qquad -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty \frac{\partial U_i(x, z)}{\partial x}\frac{dx}{\sqrt{x^2-\rho^2}} = \frac{\partial F_i(\rho, z)}{\partial z} \qquad (i=1, 2) \tag{2.15}$$

Воспользовавшись формулами (2.13), справедливыми и при $z=0$, граничные условия (2.1) приведем к следующему виду:

$$\left(\frac{\partial U_1(x, z)}{\partial x}\right)_{z=0} = g_1(x), \qquad \frac{\partial U_2(x, z)}{\partial z} = g_2(x) \qquad (|x| < a) \tag{2.16}$$

$$\left(\frac{\partial U_1(x, z)}{\partial x} - B\frac{\partial U_2(x, z)}{\partial x}\right)_{z=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial U_1(x, z)}{\partial z} - A\frac{\partial U_2(x, z)}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \qquad (a < |x|)$$

где

$$g_1(x) = 4\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\varphi_1(\rho)\rho\, d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}}, \qquad g_2(x) = 4\int_0^x \frac{\varphi_2(\rho)\rho\, d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}} \qquad (0<x<a) \tag{2.17}$$

Значения функций $g_1(x)$, $g_2(x)$ в интервале $-a<x<0$ определяются соотношениями

$$g_1(x) = g_1(-x), \qquad g_2(x) = -g_2(-x) \tag{2.18}$$

Формулы (2.13) показывают, что функции $\partial U_i(x, z)/\partial x$, $\partial U_i(x, z)/\partial z$ исчезают на бесконечности.

Функции $\partial U_i(x, z)/\partial x$, $\partial U_i(x, z)/\partial z$ будем искать в виде

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + i\frac{\partial U_1}{\partial z} = \Omega(\zeta) + \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}\overline{\Omega}(\zeta)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} + i\frac{\partial U_2}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{AB}}\Omega(\zeta) - \frac{1}{\sqrt{AB}}\frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}\overline{\Omega}(\zeta) \tag{2.19}$$

где функция $\Omega(\zeta)$ — аналитическая в плоскости $\zeta = x+iz$ с разрезом вдоль действительной оси от $x=-a$ до $x=a$.

В обозначениях [3] для $\Omega(\zeta)$ получаем условие

$$\Omega^- + \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}\Omega^+ = g_1(x) - i\sqrt{AB}g_2(x) \tag{2.20}$$

и, следовательно,

$$\Omega(\zeta) = \frac{X_0(\zeta)}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{g_1(x)-i\sqrt{AB}g_2(x)}{X_0^-(\zeta)(x-\zeta)}dx \tag{2.21}$$

где

$$X_0(\zeta) = (\zeta+a)^{-\gamma}(\zeta-a)^{\gamma-1}$$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

Здесь аргумент θ логарифма выбирается так, чтобы $0 \leqslant \theta \times 2\pi$.

§ 3. Пусть в полупространстве $z < 0$ заданы две гармонические функции $F_{2n+1}(x, y, z)$, $F_{2n+2}(x, y, z)$ посредством граничных условий

$$\left.\begin{aligned}
&F_{2n+1}(x, y, 0) = \varphi_{2n+1}(\rho)\cos(n\varphi+\alpha_n) \\
&\left(\frac{\partial F_{2n+2}(x, y, z)}{\partial z}\right)_{z=0} = \varphi_{2n+2}(\rho)\cos(n\varphi+\alpha_n)
\end{aligned}\right\}\ \text{внутри круга } x^2+y^2=a^2$$

$$\left.\begin{aligned}
&F_{2n+1}(x, y, 0) - AF_{2n+2}(x, y, 0) = 0 \\
&\left(\frac{\partial F_{2n+1}(x, y, z)}{\partial z} - B\frac{\partial F_{2n+2}(x, y, z)}{\partial z}\right)_{z=0} = 0
\end{aligned}\right\}\ \text{вне круга } x^2+y^2=a^2 \tag{3.1}$$

Искомые функции имеют вид:

$$\begin{aligned}
F_{2n+1}(x, y, z) &= \Phi_{2n+1}(\rho, z)\cos(n\varphi+\alpha_n) \\
F_{2n+2}(x, y, z) &= \Phi_{2n+2}(\rho, z)\cos(n\varphi+\alpha_n)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Продолжив функции в полупространство $z > 0$ по формулам

$$\begin{aligned}
F_{2n+1}(x, y, z) - AF_{2n+2}(x, y, z) &= -F_{2n+1}(x, y, -z) + AF_{2n+2}(x, y, -z) \\
F_{2n+1}(x, y, z) - BF_{2n+2}(x, y, z) &= F_{2n+1}(x, y, -z) - BF_{2n+2}(x, y, -z)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

и заметив, что определенные таким образом функции являются регулярными в окрестности бесконечно удаленной точки, заключаем, что вблизи бесконечности они убывают не менее быстро, чем

$$(x^2+y^2+z^2)^{-1/2(n+1)}$$

Вводим функции $F_1(\rho, z)$, $F_2(\rho, z)$ соотношениями

$$F_i(\rho, z) = \int_{\rho}^{\infty}\Phi_{2n+i}(r, z)(r^2-\rho^2)^{n-1}r^{1-n}dr \qquad (i=1, 2)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что эти функции являются гармоническими и убывают на бесконечности.

Граничные условия для функций $F_1(\rho, z)$, $F_2(\rho, z)$ получим в следующем виде ($\rho < a$): (3.4)

$$F_1(\rho, 0) = \int_\rho^a \varphi_{2n+1}(r)(r^2-\rho^2)^{n-1} r^{1-n}\,dr + c_0 + c_1\rho^2 + \cdots + c_{n-1}\rho^{2n-2}$$

$$\left(\frac{\partial F_2(\rho, z)}{\partial z}\right)_{z=0} = \int_\rho^a \varphi_{2n+2}(r)(r^2-\rho^2)^{n-1} r^{1-n}\,dr + D_0 + D_1\rho^2 + \cdots + D_{n-1}\rho^{2n-2}$$

$$F_1(\rho, 0) - AF_2(\rho, 0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial F_1(\rho, z)}{\partial z} - B\frac{\partial F_2(\rho, z)}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$; $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ — неизвестные постоянные.

Функции $g_1(x)$, $g_2(x)$, фигурирующие в граничных условиях (2.16) вспомогательной плоской задачи, определяются с точностью до полиномов

$$\begin{aligned} p_1(x) &= c_0' + c_1' x^2 + \cdots + c_{n-1}' x^{2n-2} \\ p_2(x) &= D_0' x + D_1' x^3 + \cdots + D_{n-1}' x^{2n-1} \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Функция $F_i(\rho, 0)$ получена n-кратным интегрированием непрерывной функции $\Phi_{2n+i}(\rho, 0)$ и, следовательно, является непрерывной вместе с n первыми производными.

Отсюда заключаем, что функции $\partial U_i / \partial x$ и $\partial U_i / \partial z$ и их $(n-1)$ производные являются непрерывными, а производные порядка n от этих функций будут ограниченными при $z = 0$.

Для функции $\Omega^{(n)}(\zeta)$ получим формулу

$$\Omega^{(n)}(\zeta) = \frac{X_0(\zeta)}{2\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{g_1^{(n)}(x) - i\sqrt{AB}\,g_2^{(n)}(x)\,dx}{X_0^-(\zeta)(x-\zeta)} \qquad (3.6)$$

В выражение $g_1^{(n)}(x) - i\sqrt{AB}\,g_2^{(n)}(x)$ входит неизвестный полином степени $(n-1)$. Функция $\Omega^{(n)}(\zeta)$ в качестве n-кратной производной от регулярной на бесконечности функции должна убывать не менее быстро, чем $\zeta^{-(n+1)}$; отсюда для определения n неизвестных получим следующую систему из n уравнений:

$$\int_{-a}^{a} \frac{g_1^{(n)} x - i\sqrt{AB}\,g_2^{(n)}(x)}{X_0^-(x)} x^k\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, (n-1)) \qquad (3.7)$$

с действительными коэффициентами.

Определитель системы представляет собой вронскиан функции

$$\frac{1}{2\zeta}\int_{-a}^{a} \frac{dx}{X_0^-(\zeta)(x\zeta - 1)}$$

и $(n-1)$ ее производных при $\zeta=0$ и в силу линейной независимости этой системы функций не равен нулю.

Далее, находим

$$\begin{gathered}\frac{\partial^{n+1} U_1(x, z)}{\partial x^{n+1}}+i \frac{\partial^{n+1} U_1(x, z)}{\partial x^n \partial z}=\Omega^{(n)}(\zeta)+\frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}} \overline{\Omega}^{(n)}(\zeta) \\ \frac{\partial^{n+1} U_2(x, z)}{\partial x^{n+1}}+i \frac{\partial^{n+1} U_2(x, z)}{\partial x^n \partial z}=\frac{1}{\sqrt{AB}} \Omega^{(n)}(\zeta)-\frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}-\sqrt{A}} \overline{\Omega}^{(n)}(\zeta)\end{gathered} \tag{3.8}$$

Произведя рассуждения, аналогичные примененным при выводе формул (2.13) и (2.15), получим формулы для определения функций $\Phi_{2n+i}(\rho, z)$ в виде

$$\Phi_{2n+i}(\rho, z)=\frac{(-2)^n}{2\pi\Gamma(n)} \int_0^\rho \frac{\partial^{n+1} U_i(x, z)}{\partial x^{n+1}} \frac{\operatorname{Re}\left[x+i \sqrt{\rho^2-x^2}\right]^n}{\sqrt{p^2-x^2}} d x \tag{3.9}$$

§ 4. Вернемся к основной смешанной задаче теории упругости для полупространства.

Пусть внутри круга $x^2+y^2=a^2$ заданы значения функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ в виде тригонометрических полиномов

$$\begin{gathered}u(x, y)=u_0(\rho)+u_{s1}(\rho) \sin \varphi+u_{c1}(\rho) \cos \varphi+\cdots \\ \cdots+u_{sn}(\rho) \sin n\varphi+u_{cn}(\rho) \cos n\varphi \\ v(x, y)=v_0(\rho)+v_{s1}(\rho) \sin \varphi+v_{c1}(\rho) \cos \varphi+\cdots \\ \cdots+v_{sn}(\rho) \sin n\varphi+v_{cn}(\rho) \cos n\varphi \\ w(x, y)=w_0(\rho)+w_{s1}(\rho) \sin \varphi+w_{c1}(\rho) \cos \varphi+\cdots \\ \cdots+w_{sn}(\rho) \sin n\varphi+w_{cn}(\rho) \cos n\varphi\end{gathered} \tag{4.1}$$

Гармонические функции

$$\psi(x, y, z), \quad \varphi_1(x, y, z), \quad \varphi_2(x, y, z), \quad \varphi_3(x, y, z), \quad \varphi_4(x, y, z)$$

будем искать в виде суммы двух гармонических функций

$$\psi=\psi_1+\psi_2, \qquad \varphi_i=\varphi_{i1}+\varphi_{i2} \qquad (i=1,2,3,4) \tag{4.2}$$

в следующей последовательности.

а) Находим φ_{31}, φ_{41} из условий

$$\begin{gathered}\left.\begin{array}{c}\varphi_{31}(x, y, 0)=w(x, y) \\ \left(\dfrac{\partial \varphi_{41}}{\partial z}\right)_{z=0}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{array}\right\} \quad \text{при} \quad x^2+y^2<a^2 \\ \left.\begin{array}{c}\varphi_{31}(x, y, 0)-A \varphi_{41}(x, y, 0)=0 \\ \left(\dfrac{\partial \varphi_{31}}{\partial z}-\dfrac{1}{A} \dfrac{\partial \varphi_{41}}{\partial z}\right)_{z=0}=0\end{array}\right\} \quad \text{при} \quad x^2+y^2>a^2\end{gathered} \tag{4.3}$$

Функции $w(x, y)$, $\partial u / \partial x+\partial v / \partial y$ — тригонометрические полиномы порядка не выше $n+1$, и эта задача решается указанным в § 2 и 3 методом.

б) Функцию $\psi_1(x, y, z)$ находим из формулы

$$\psi_1 = \frac{1}{4\nu - 3}(\varphi_{41} - \varphi_{31}) \tag{4.4}$$

после чего для функций φ_{11}, φ_{21} получаем граничные условия

$$\begin{aligned}
&\varphi_{11}(x, y, 0) = u(x, y) && \text{при} \quad x^2 + y^2 < a^2 \\
&\left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z}\right)_{z=0} = -\left(\frac{\partial \varphi_{41}}{\partial x}\right)_{z=0} && \text{при} \quad x^2 + y^2 > a^2 \\
&\varphi_{21}(x, y, 0) = v(x, y) && \text{при} \quad x^2 + y^2 < a^2 \\
&\left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z}\right)_{z=0} = -\left(\frac{\partial \varphi_{41}}{\partial y}\right)_{z=0} && \text{при} \quad x^2 + y^2 > a^2
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Функции $(\partial \varphi_{41} / \partial x)_{z=0}$, $(\partial \varphi_{41} / \partial y)_{z=0}$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ представляют собой тригонометрические полиномы порядка не выше $n + 2$. Задача определения функций $\varphi_{11}(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$ из условий (4.5) представляет частный случай рассмотренной в предыдущих параграфах задачи.

Найденные таким образом функции φ_{11}, φ_{21}, φ_{31}, φ_{41} и ψ удовлетворяют всем условиям задачи, кроме, может быть, условия

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_{41}}{\partial z} \tag{4.6}$$

Если окажется, что найденная система функций удовлетворяет условию (4.6), то задача решена. Это имеет место, в частности, в том случае, когда напряженное состояние является осесимметричным.

в) Рассмотрим функцию $\Phi(x, y, z)$, введенную соотношением

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{41}}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial y} \tag{4.7}$$

Из (4.3), (4.5) находим, что $\Phi(x, y, z)$ удовлетворяет следующим граничным условиям

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 && \text{при} \quad x^2 + y^2 < a^2 \\
&\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 && \text{при} \quad x^2 + y^2 > a^2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Функция $\Phi(x, y, z)$ представляет собой тригонометрический полином порядка не выше $n + 2$, следовательно, функция $\Phi(x, y, 0)$ при $x^2 + y^2 > a^2$ должна иметь вид:

$$\Phi(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi}{\rho^k} \qquad \text{при} \quad x^2 + y^2 > a^2 \tag{4.9}$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\alpha_k' \cos k\varphi + \beta_k' \sin k\varphi}{\rho^k \sqrt{\rho^2 - a^2}} \qquad \text{при} \quad x^2 + y^2 > a^2 \tag{4.10}$$

г) Находим функции $\varphi_{32}(x, y, z)$, $\varphi_{42}(x, y, z)$ из условий

$$\varphi_{32}(x, y, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_{42}}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \quad \text{при} \quad \rho^2 < a^2 \tag{4.11}$$

$$\varphi_{32}(x, y, 0) - A\varphi_{42}(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{n+2} - \frac{\alpha_k' \cos k\varphi + \beta_k' \sin k\varphi}{\rho^k} c_k$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_{32}}{\partial z} - \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi_{42}}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \quad \text{при} \quad \rho^2 > a^2$$

где c_k — неизвестные пока постоянные. Эта задача может быть сведена к задачам, рассмотренным в § 2 и 3.

д) Находим функции $\varphi_{12}(x, y, z)$, $\varphi_{22}(x, y, z)$ из условий

$$\varphi_{12}(x, y, 0) = 0 \qquad \text{при} \quad \rho^2 < a^2$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial z}\right)_{z=0} = -\left(\frac{\partial \varphi_{42}}{\partial x}\right)_{z=0} - \frac{2\mu}{3\mu+\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{n+2}\frac{\alpha_k' \cos k\varphi + \beta_k' \sin k\varphi}{\rho^k} c_k \qquad \text{при} \quad \rho^2 > a^2$$

$$\varphi_{22}(x, y, 0) = 0 \qquad \text{при} \quad \rho^2 < a^2 \tag{4.12}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_{22}}{\partial z}\right)_{z=0} = -\left(\frac{\partial \varphi_{42}}{\partial y}\right)_{z=0} - \frac{2\mu}{3\mu+\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=1}^{n+2}\frac{\alpha_k' \cos k\varphi + \beta_k' \sin k\varphi}{\rho^k} c_k \qquad \text{при} \quad \rho^2 > a^2$$

е) Находим выражение

$$\left(\frac{\partial \varphi_{42}}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial y}\right)_{z=0} = \sum_{k=1}^{n+2}\frac{\alpha_k' \cos k\varphi + \beta_k' \sin k\varphi}{\rho^k \sqrt{\rho^2 - a^2}} c_k d_k \qquad \text{при} \quad \rho^2 > a^2 \tag{4.13}$$

где d_k — некоторые вполне определенные постоянные, зависящие от λ, μ, a и k. Если выбрать c_k из условия $c_k d_k = -1$, то функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, ψ будут удовлетворять всем условиям задачи.

§ 5. Рассмотрим в виде примера задачу о давлении плоского круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления. В этом случае компоненты перемещения задаем в виде

$$w(x, y) = w_0, \qquad u(x, y) = 0, \qquad v(x, y) = 0 \tag{5.1}$$

При этом мы принимаем, что сила, вдавливающая штамп, вертикальна и проходит через центр области контакта. В этом случае напряженное состояние является осесимметричным, функции $\varphi_3(x, y, z)$, $\varphi_4(x, y, z)$ не зависят от φ и, следовательно, функция $F(x, y)$ равна нулю.

Для функций $g_1(x)$, $g_2(x)$ получаем формулы

$$g_1(x) = 4w_0 x, \qquad g_2(x) = 0 \tag{5.2}$$

Решая задачу линейного сопряжения (2.20), находим функцию $\Omega(\zeta)$, после чего находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_1(x, y, z)}{\partial y}\right)_{z=0} &= 4\sqrt{A^2 - 1}\sin\theta \ln\frac{a-x}{a+x} \\ \left(\frac{\partial U_2(x, y, z)}{\partial x}\right)_{z=0} &= 4A - 4\sqrt{A^2-1}\cos\theta \ln\frac{a-x}{a+x} \end{aligned} \qquad (-a < x < a) \tag{5.3}$$

Здесь

$$\theta = \frac{1}{\pi} \ln \frac{A+1}{A-1}, \qquad A = \frac{2\mu+\lambda}{\mu}$$

Отсюда для давления под подошвой штампа получаем формулу

$$p(\rho) = \frac{\sqrt{A^2-1}}{2\pi} w_0 8\mu \frac{2\mu+\lambda}{3\mu+\lambda} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{x}{\sqrt{\rho^2-x^2}} \sin\theta \ln \frac{a-x}{a+x} dx \tag{5.4}$$

Согласно этому выражению получаем зависимость между суммарной силой, действующей на штамп, и его перемещением

$$P = 2\pi \int_0^a p(\rho)\rho\, d\rho = 8 w_0 a \theta \frac{2\mu+\lambda}{3\mu+\lambda} 2\mu \frac{(A+1)^2}{A} \tag{5.5}$$

При этом интегрирование велось приемом, указанным Н. И. Мусхелишвили [3].

Вычисления этого параграфа проделаны автором совместно со студенткой Днепропетровского государственного университета Л. И. Векштейн,

Поступила 4 II 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Треффц Е. Математическая теория упругости. Гостехтеоретиздат, 1932.
2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Изд. И. Л., 1949.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.