Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ОБОЛОЧЕК НА СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ СИЛЫ

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

При расчете оболочек на действие сосредоточенных сил применяются два приема. Один из них, физически более естественный, заключается в том, что сначала выполняется расчет оболочки на «элементарную нагрузку», т. е. нагрузку, равномерно распределенную по некоторой малой области g, а затем производится переход к пределу в предположении, что g стягивается в точку, а интенсивность «элементарной нагрузки» неограниченно возрастает. Второй прием состоит в построении такого интеграла однородных дифференциальных уравнений теории оболочек, который обладает определенными особенностями в окрестности точки приложения сосредоточенной силы. Он значительно проще с чисто математической точки зрения, но может быть применен только в том случае, если мы заранее располагаем сведениями о характере особенности, соответствующей той или иной сосредоточенной нагрузке. Некоторые общие соображения, относящиеся к этому вопросу, и составляют основной предмет этой статьи.

1. Будем всюду предполагать, что в окрестности M — точки приложения сосредоточенной силы — срединная поверхность достаточно гладка и толщина оболочки достаточно плавно изменяется для того, чтобы при любой нагрузке, компоненты которой непрерывны вместе с достаточным числом их производных, существовало напряженное состояние, не обладающее особенностью в окрестности точки M (под последним подразумевается, что перемещения, усилия и моменты имеют в точке M столько ограниченных производных, сколько может понадобиться в рассуждениях).

Пусть срединной поверхности рассматриваемой оболочки соответствует конечная область G изменения независимых переменных. Построим такую прямоугольную область G^* с границами, проходящими вдоль α- и β-линий, которая содержала бы внутри себя G, и разложим «элементарную нагрузку» в области G^* в тригонометрический ряд Фурье вида

$$P(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{(g)} \sin \lambda_m \alpha \sin \mu_n \beta \qquad (1.1)$$

где коэффициенты Фурье $a_{mn}^{(g)}$ будут, конечно, зависеть от того, как выбрана область g.

В разложении (1.1) можно формально совершить предельный переход при $g \to 0$ (считая, что g стягивается в точку, а интенсивность элементарной нагрузки соответственно возрастает). Тогда $a_{mn}^{(g)}$ будут стремиться к определенным пределам $a_{mn}^{(0)}$, но предельный ряд уже получится расходящимся и $a_{mn}^{(0)}$ не будут беспредельно убывать при возрастании индексов m, n.

Каждому члену разложения (1.1) соответствует некоторый частный интеграл дифференциальных уравнений теории оболочек и, следовательно, частный интеграл, отвечающий нагрузке $P(\alpha, \beta)$, может быть представлен в виде

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(\alpha, \beta) \tag{1.2}$$

Заметим, что, пользуясь терминологией, введенной автором [1], можно утверждать, что каждый член разложения (1.1) представляет собой нагрузку с определенным показателем изменяемости, возрастающим при одновременном возрастании индексов m и n.

Представим теперь ряд (1.2) в виде $Q = Q_1 + Q_2$, где

$$Q_1 = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} Q_{mn}, \qquad Q_2 = \sum_{m=M+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} Q_{mn}$$

и рассмотрим Q_1 и Q_2 раздельно.

Принимая во внимание основное предположение этой статьи, мы можем утверждать, что при любых M, N и g (в частности, и при $g = 0$) частный интеграл Q_1 можно выбрать так, что в окрестности точки M он не будет давать особенностей, а следовательно, не будет представлять интереса с точки зрения исследуемого здесь вопроса. Частный интеграл Q_2 при достаточно больших M и N можно определить так, что он будет соответствовать напряженному состоянию со сколь угодно большим показателем изменяемости.

Следствие. При исследовании характера особенностей напряженного состояния оболочки в окрестности точки приложения сосредоточенной силы можно исходить из предположения, что вызванное действием сосредоточенной силы напряженное состояние имеет сколь угодно большой показатель изменяемости.

Показано [1], что при достаточно большом показателе изменяемости напряженное состояние оболочки произвольного очертания распадается на изгибное и тангенциальное напряженные состояния, причем в первом из них нормальный прогиб оболочки определяется из уравнения изгиба пластинки, а во втором — тангенциальные усилия определяются из уравнений обобщенного плоского напряженного состояния.

Поэтому можно сформулировать два следующих результата, относящихся к оболочкам с произвольной срединной поверхностью (конечно, с оговоркой, сделанной в начале статьи).

1. В окрестности точки приложения нормальной сосредоточенной силы нормальный прогиб w в оболочке имеет такую же особенность, как и в пластинке, т. е. особенность вида $\rho^2 \ln \rho$.

2. В окрестности точки приложения тангенциальной сосредоточенной силы функция напряжения c имеет такую же особенность ($\rho^2 \ln \rho$), как и функция Эри в обобщенном плоском напряженном состоянии [1].

---

[1] Однородные уравнения равновесия теории оболочек допускают введение четырех функций напряжения; под c подразумевается та из них, которая соответствует функции Эри в плоской задаче.

Более сложными являются вопросы о том, какую особенность имеет функция напряжения c, если на оболочку действует нормальная сосредоточенная сила, и какую особенность имеет прогиб w, если на оболочку действует тангенциальная сосредоточенная сила. Эти вопросы мы исследовать не будем и ограничимся формулировкой двух физически очевидных предположений, которые дополняют полученные выше результаты.

1. В окрестности точки приложения нормальной сосредоточенной силы функция напряжения c имеет особенность не более высокого порядка, нежели в окрестности приложения тангенциальной сосредоточенной силы.

2. В окрестности точки приложения тангенциальной сосредоточенной силы нормальный прогиб w имеет особенность не более высокого порядка, нежели в окрестности нормальной сосредоточенной силы. (Порядок особенности считается более высоким, если функция имеет меньшее число ограниченных производных.)

Можно показать [2], что для сферической оболочки могут быть построены, и притом единственным образом, решения, обладающие всеми сформулированными здесь свойствами. Общие выводы настоящей статьи находят подтверждение и в результатах В. М. Даревского [3, 4], исследовавшего особенности, возникающие вблизи точки приложения сосредоточенных сил для круговых цилиндрических оболочек.

2. Как известно, при расчете не слишком длинных круговых цилиндрических оболочек можно пользоваться приближенным уравнением [1]

$$\triangle\triangle V + i\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2R^2}}\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} = 0 \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) \tag{2.1}$$

Здесь R — константа, равная радиусу оболочки, а V — комплексная неизвестная, имеющая следующий смысл:

$$V = \sqrt{\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}}\,2Ehw + ic$$

при этом w — нормальный прогиб, c — функция напряжений, соответствующая функции Эри в плоской задаче теории упругости.

Для иллюстрации высказанных выше общих положений решим следующую задачу. Найдем частное решение уравнения (2.1), соответствующее действию на оболочку в точке $\alpha = 0$, $\beta = 0$ единичной нормальной сосредоточенной силы. Уравнение (2.1), следуя Ю. Н. Работнову [5] и А. И. Лурье [6, 7], заменим системой уравнений

$$\triangle v_1 + 2i\lambda^2 v_1 = 0, \qquad \triangle v + 2i\lambda^2 v = e^{-2(1-i)\lambda\alpha} v_1 \tag{2.2}$$

где

$$v = e^{-(1-i)\lambda\alpha} V, \qquad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3(1-\sigma^2)}{4h^2R^2}} \tag{2.3}$$

Нетрудно проверить, что, перейдя от v к V и исключив v_1 из системы (2.2), мы вернемся к (2.1).

Также можно вместо уравнения (2.1) пользоваться и системой

$$\triangle v_1 + 2i\lambda^2 v_1 = 0, \qquad \triangle v + 2i\lambda^2 v = e^{2(1-i)\lambda\alpha} v_1 \tag{2.4}$$

где $v = e^{(1-i)\lambda\alpha} V$, а λ имеет прежний смысл. Конкретные рассуждения будем проводить применительно к системе (2.2).

Положим пока, что $R = \infty$, а следовательно, в соответствии с (2.3) $\lambda = 0$. Тогда уравнения (2.2) примут вид:

$$\triangle v_1 = 0, \qquad \triangle v = v_1 \tag{2.5}$$

а первая формула (2.3) даст $v = V$. Система (2.5) эквивалентна бигармоническому уравнению и, следовательно, действительные интегралы (2.5) дают значения прогибов пластинки, не загруженной по поверхности, а чисто мнимые интегралы (2.5) дают значения функции Эри для плоской задачи при отсутствии объемных сил.

Будем искать только такие решения системы (2.5), которые являются функцией одного переменного $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Тогда, введя полярную систему координат (ρ, θ) и отбросив члены, содержащие производные по θ, мы приведем систему (2.5) к виду

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial v_1}{\partial\rho} = 0, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial v}{\partial\rho} = v_1 \tag{2.6}$$

Четыре линейно независимых решения полученных уравнений можно записать так:

$$\begin{gathered} v^{(1)} = \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\,\rho^2\ln\rho, \qquad v^{(2)} = \rho^2, \qquad v^{(3)} = \ln\rho, \qquad v^{(4)} = 1 \\ v_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\,(\ln\rho + 1), \qquad v_1^{(2)} = 4, \qquad v_1^{(3)} = 0, \qquad v_1^{(4)} = 0 \end{gathered} \tag{2.7}$$

Первое из этих решений имеет при $\rho = 0$ особенность, которая соответствует действию на пластинку единичной сосредоточенной силы, второе и четвертое решения особенностей не имеют, а третье решение дает при $\rho = 0$ неограниченный прогиб. Рассмотрим теперь функцию

$$v = V = \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\iint\limits_G \ln r\,(\ln\rho^* + 1)\,d\xi\,d\eta \tag{2.8}$$

где $r = \sqrt{(\alpha-\xi)^2 + (\beta-\eta)^2}$, $\rho^* = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, а областью интегрирования G является круг радиуса a с центром в точке $(\xi = 0,\ \eta = 0)$.

Очевидно, что функция v, определяемая формулой (2.8), обладает следующими свойствами: а) она зависит только от a и ρ; б) остается ограниченной при $\alpha = 0$, $\beta = 0$, так как несобственный интеграл

$$\iint \ln^2\rho^*\,d\xi\,d\eta$$

сходится; в) всюду в области G, за исключением точки $\alpha = 0$, $\beta = 0$, удовлетворяет уравнению

$$\triangle v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\,(\ln\rho + 1)$$

Отсюда на основании замечаний, высказанных относительно решений системы (2.6), можно сделать вывод, что в области G функция (2.8) имеет вид:

$$v = \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\,\rho^2\ln\rho + A\rho^2 + B \qquad (A,\ B = \mathrm{const})$$

В формуле (2.8) интегрирование можно выполнить и по любой односвязной области, содержащей точку $\xi = 0$, $\eta = 0$. Тогда функция v или, что то же, функция V примет другой вид, но характер ее особенности в точке $\alpha = 0$, $\beta = 0$, очевидно, не изменится. Можно поэтому утверждать, что формулой (2.8) определяется некоторое частное решение (2.1), соответствующее (при $R = \infty$) случаю, когда в точке $\alpha = 0$, $\beta = 0$ действует единичная нормальная сосредоточенная сила.

Обобщим теперь этот результат на случай, когда $R \neq \infty$ и, следовательно, $\lambda \neq 0$. Тогда система (2.5) заменится системой (2.2), и, сохраняя прежнюю последовательность выкладок, нам надо начать с интегрирования уравнения

$$\triangle v_1 + 2i\lambda^2 v_1 = 0$$

Решением этого уравнения, в частности, является функция

$$v_1 = CK_0\,[(1+i)\lambda\rho] \tag{2.9}$$

где C — константа, K_0 — видоизмененная функция Бесселя второго рода нулевого индекса, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Для K_0 известно разложение

$$K_0(t) = -J_0(t)\left\{\ln\frac{t}{2} + \gamma\right\} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(s!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2s}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s}\right)$$

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(t/2)^{2k}}{(k!)^2}$$

Откуда видно, что, выбрав

$$C = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}$$

мы можем представить (2.9) в виде

$$v_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\,\ln\rho + v_1^*$$

где v_1^* — аналитическая функция ρ.

Таким образом, формулой (2.9) дается обобщение решения $v_1^{(1)}$, полученного для случая $R = \infty$. Второе из уравнений (2.2) принимает вид:

$$\triangle v + 2i\lambda^2 v = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\;e^{-2(1-i)\lambda\alpha}K_0\,[(1+i)\lambda\rho]$$

За истокообразное решение этого уравнения можно взять функцию

$$\Gamma(\alpha, \beta, \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}K_0\,[(1+i)\lambda r] \qquad \left(r = \sqrt{(\alpha-\xi)^2 + (\beta-\eta)^2}\right)$$

Тогда не представляет труда написать и обобщение формулы (2.8), т. е. дать решение уравнения (2.1), действительная часть которого имеет особенность вида:

$$\frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\,\rho^2\ln\rho$$

а мнимая часть имеет особенность не более высокого порядка. Это решение имеет вид:

$$V = \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\,e^{(1-i)\lambda\alpha}\iint K_0\,[(1+i)\lambda r]\,e^{-2(1-i)\lambda\xi}K_0\,[(1+i)\lambda\rho^*]\,d\xi\,d\eta \tag{2.10}$$

Нетрудно было бы дать строгое обоснование этого утверждения, но мы ограничимся в качестве косвенного доказательства приведенной выше аналогией. Так же, исходя из системы (2.4), получим (2.11)

$$V = \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\, e^{-(1-i)\lambda\alpha}\iint K_0\,[(1+i)\lambda r]\, e^{2(1-i)\lambda\xi} K_0\,[(1+i)\lambda\rho^*]\, d\xi\, d\eta$$

Или, наконец, составив полусумму полученных решений: (2.12)

$$V = \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\iint K_0\,[(1+i)\lambda r]\,\mathrm{ch}\,[(1-i)\lambda(\alpha-2\xi)]\, K_0\,[(1+i)\lambda\rho^*]\, d\xi\, d\eta$$

Во всех трех формулах интегрирование надо распространять на область, соответствующую срединной поверхности рассматриваемой оболочки. В частности, для оболочки с замкнутым поперечным сечением граница этой области будет содержать отрезки линий $\beta = +\pi$ и $\beta = -\pi$. На них полученные решения не удовлетворяют условиям периодичности и, следовательно, они отвечают случаю, когда на оболочку, помимо сосредоточенной силы, действуют нормальные силы, распределенные вдоль образующей $\beta = \pm\pi$. Интенсивность этих дополнительных нагрузок будет весьма малой, так как можно доказать, что функции (2.10), (2.11), (2,12) быстро убывают по модулю вместе с возрастанием модуля β. Аналогичным путем можно получить и частные решения уравнения (2.1), соответствующие действию на цилиндрическую оболочку тангенциальной сосредоточенной силы.

3. А. И. Лурье, исходя из систем (2.2) и (2.4), решил задачу о концентрации напряжений вблизи малого отверстия в круговой цилиндрической оболочке [6, 7]. Просматривая набор решений, полученных А. И. Лурье мы убеждаемся, что в них отсутствуют интегралы с особенностями, соответствующими действию на оболочку сосредоточенных сил. Такими особенностями (вида $\rho^2 \ln \rho$) обладают в отдельности действительные или мнимые части решений А. И. Лурье, но при этом соответственно в мнимой или действительной части этих решений появляется особенность более высокого порядка (вида $\ln \rho$), что противоречит предположениям п. 1. Это объясняется тем, что А. И. Лурье было достаточно пользоваться только такими интегралами, в которых $V_1 = 0$, а среди них, как показывает (2.7), нет решений с нужными особенностями.

Поступила 14 I 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
2. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ, т. VIII, вып. 6, 1944.
3. Даревский В. М. К теории цилиндрических оболочек. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.
4. Даревский В. М. Решение некоторых вопросов теории цилиндрических оболочек. ПММ, т. XVI, вып. 2, 1952.
5. Работнов Ю. Н. Изгиб цилиндрической оболочки сосредоточенной силой. ДАН СССР, т. LII, № 3, 1946.
6. Лурье А. И. Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра. ПММ, т. X, вып. 3, 1946.
7. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.