

ВТОРИЧНАЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ВОЛНА

Н. Ф. Лебедев

(Новозыбков)

Распространение упруго-пластической волны в коротком стержне исследовано В. С. Ленским ^[1] в предположении линейного упрочнения материала. Ниже рассматривается эта же задача в предположении нелинейного упрочнения. При этом оказывается необходимым решить задачу о распространении упруго-пластической волны вдоль стержня переменного предела упругости, убывающего в направлении распространения волны.

Известно общее решение задачи о распространении упруго-пластической волны вдоль стержня с переменным пределом упругости методом характеристик, данное Х. А. Рахматулиным ^[2]. Однако возможен и несколько иной подход к решению задач о распространении плоских упруго-пластических волн ^[3].

В работе ^[3] было показано, что волновой процесс можно рассматривать как результат «наложения» прямой и обратной волн, что непосредственно следует из уравнений характеристик. Там исследовался вопрос о распространении ударной волны в полубесконечном стержне. Результаты полностью совпадают с результатами, полученными раньше Х. А. Рахматулиным ^[4] и Г. С. Шапиро ^[5].

Решение, предлагаемое в настоящей работе, отличается от решения, данного Х. А. Рахматулиным в § 2 работы ^[2]. Это расхождение, повидимому, обусловлено не методом решения, а несколько иным представлением о механизме распространения прямой и обратной волн ¹.

Недавно появилась статья Е. Ли ^[7], в которой рассматривается этот же вопрос. Полученные им результаты являются непосредственным продолжением работы Х. А. Рахматулина ^[2], на которую, однако, не делается ссылки.

Решение Х. А. Рахматулина получено в предположении, что при повторном нагружении за предел упругости скорости распространения прямой и обратной волн одинаковы и равны скорости распространения пластических волн. Ниже показано, что это предположение справедливо в случае возрастающего предела упругости. Если же прямая волна вызывает нагрузку за предел упругости, а предел упругости убывает в направлении распространения прямой волны, то обратная волна вызывает (менее интенсивную) разгрузку и распространяется, следовательно, со скоростью звука. Таким образом, оказывается, что прямая и обратная волны распространяются с различными скоростями.

Решение задачи о распространении такой «вторичной упруго-пластической волны», т. е. определение напряженно-деформированного состояния стержня, дается при помощи построения сетки характеристик.

Постановка подобной задачи методами математической физики, повидимому, свелась бы к рассмотрению системы двух совместных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных относительно двух неизвестных функций.

Рассмотрение задачи такого типа в литературе пока не встречалось.

¹ В работах ^[3,6] использовались термины «бегущая» и «отраженная» волна, которые в настоящей работе заменены более распространенными терминами «прямая» и «обратная» волна. Однако верхние индексы «б» и «о» сохранены для обозначения величин, относящихся к прямой («бегущей») и обратной («отраженной») волне.

1. **Распространение волны, отраженной от свободного конца стержня.** В работе [3] было показано, что распространение упруго-пластической волны и волны разгрузки можно рассматривать как наложение прямой и обратной волн. В области разгрузки напряжения прямой волны σ^b и напряжения обратной волны σ^o изменяются с изменением бывшего при нагрузке максимального напряжения $\sigma_0(x)$ (напряжения на волне Рахматулина).

Связь между изменениями указанных напряжений¹ дается следующими уравнениями:

$$d\sigma^b = -\frac{1}{2} \left(\frac{a_*}{a} - 1 \right) d\sigma_0, \quad dx = a_* dt \quad (1.1)$$

$$d\sigma^o = \frac{1}{2} \left(\frac{a_*}{a} - 1 \right) d\sigma_0, \quad dx = -a_* dt \quad (1.2)$$

Здесь

$$a_* = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2}, \quad a = \left(\rho \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \right)^{-1/2} \quad (1.3)$$

обозначают соответственно скорости распространения упругой и пластической волн; при этом скорость распространения пластической волны $a = a(\sigma)$ с возрастанием напряжения σ убывает по известному закону; ρ — плотность однородного стержня, относящаяся к недеформированному состоянию. Сечения стержня будем характеризовать лагранжевой координатой x , причем левому концу соответствует значение $x = 0$, а правому соответствует $x = l$. Рассмотрим случай, когда при $t < 0$ стержень покоится и не нагружен, а при $0 \leq t \leq t^*$ к левому концу приложено постоянное напряжение σ_m , превышающее предел упругости σ_s . Правый конец стержня будем считать свободным.

Вследствие убывания $a(\sigma)$ с возрастанием σ упругое напряжение волны $\sigma^b = \sigma_s$, распространяющееся с левого конца, обгонит пластические напряжения $|\sigma^b| > |\sigma_s|$ и, достигнув правого конца стержня, вызовет обратную волну с напряжением $\sigma^o = -\sigma_s$, так как правый конец свободен и общее напряжение

$$\sigma = \sigma^b + \sigma^o = 0, \quad x = l$$

Это напряжение обратной волны, распространяясь со скоростью $-a_*$ влево, вызовет разгрузку стержня.

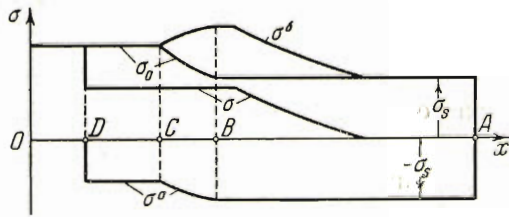
Для простоты дальнейших рассуждений будем предполагать, что функция $\varepsilon(\sigma)$ терпит разрыв первой производной при переходе от упругих к пластическим деформациям, так что, согласно зависимостям (1.3),

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow |\sigma_s| + 0} [a_* - a(\sigma)] = b \neq 0$$

При этом предположении (не имеющем принципиального значения) к моменту возникновения на правом конце обратной волны будет участок стержня конечной длины bl/a_* , на котором $\sigma^b = \sigma_s = \text{const.}$

¹ В работе Уайта и Гриффиза [8] имеется соотношение, соответствующее первому уравнению из системы (1.2).

Следовательно, и разгрузка, вызываемая обратной волной, будет происходить при постоянном значении $\sigma_0 = \sigma_s$ вдоль участка стержня длиной AB (фиг. 1) до тех пор, пока обратная волна не встретится с возрастающим напряжением прямой упруго-пластической волны. На участке BC обратная волна встретит возрастающее напряжение прямой волны, которое соответствует σ_0 , так как обратная волна вызывает разгрузку. Следовательно, согласно уравнениям (1.1), (1.2), σ^o будет возрастать (убывать по модулю) при распространении влево, а напряжение σ^b будет возрастать при распространении вправо.



Фиг. 1

В момент времени t_c напряжение $\sigma^o = \sigma^o(C)$ достигло сечения C , где значение напряжения $\sigma_0 = \sigma_m$. Левее этого сечения σ^o будет встречать постоянное значение $\sigma^b = \sigma_0 = \sigma_m$; следовательно, σ^o не будет изменяться при дальнейшем распространении.

На фиг. 1 изображено распределение напряжений σ^b , σ^o , σ_0 и σ в момент времени, когда обратная волна дошла до сечения D .

Из уравнения (1.2) легко определить значение $\sigma^o(C)$:

$$\sigma^o(C) = -\sigma_s + \frac{1}{2} \int_{\sigma_s}^{\sigma_m} \left(\frac{a_*}{a} - 1 \right) d\sigma \quad (1.4)$$

Общее напряжение

$$\sigma = \sigma^b + \sigma^o \quad (1.5)$$

в сечении C после разгрузки определится уравнением

$$\sigma(C) = \sigma_m - \sigma_s + \frac{1}{2} \int_{\sigma_s}^{\sigma_m} \left(\frac{a_*}{a} - 1 \right) d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\sigma_s}^{\sigma_m} \left(\frac{a_*}{a} + 1 \right) d\sigma \quad (1.6)$$

Если $\sigma(C)$ будет меньше предела упругости, то правее сечения C уже не может возникнуть пластическая деформация.

Обозначим напряжение прямой волны, распространяющееся от сечения C вправо со скоростью a_* , через σ_c^b . Оно соответствует напряжению прямой волны вдоль характеристики $x - x_c = a_*(t - t_c)$. Согласно уравнениям (1.1), (1.2), напряжение σ_c^b будет возрастать вместе с убыванием σ^o . Следовательно, вдоль характеристики прямой волны $dx = a_* dt$ общее напряжение может измениться лишь за счет прихода дополнительного напряжения обратной волны с правого конца стержня. Ограничимся случаем, когда участок AB настолько большой, что напряжение $\sigma^o(B)$ будет постоянным в течение такого промежутка времени, который нам потребуется. Вопрос о том, как изменится напряжение на левом конце, когда до него дойдет напряжение обратной волны, зависит от граничных условий ($\sigma = \sigma(t)$ при $x = 0$) и в настоящей работе не рассматривается.

Отметим два характерных значения σ_m . Максимальное напряжение $\sigma_m = \sigma_k$, при котором σ_c^b все еще не вызовет пластической деформации правее сечения C , т. е. при котором $\sigma(C) = \sigma_s$, определится из уравнения (1.6):

$$\sigma_k = 2\sigma_s - \frac{1}{2} \int_{\sigma_s}^{\sigma_k} \left(\frac{a^*}{a} - 1 \right) d\sigma \quad (1.7)$$

Рассмотренный выше случай (фиг. 1) соответствует $|\sigma_m| < |\sigma_k|$.

Если же $|\sigma_m| > |\sigma_k|$, то напряжение $|\sigma(C)| > |\sigma_s|$. При указанном ограничении (постоянство $\sigma^o(B)$) напряжение σ_c^b распространяется со скоростью a_* вправо и вызывает одинаковые напряжения $\sigma = \sigma(C)$, пока не достигнет такого сечения стержня на участке CB , в котором $\sigma_0 = \sigma(C)$. Правее этого сечения напряжение прямой волны вызовет вторичную пластическую деформацию.

Кроме того, характерным будет минимальное значение $\sigma_m = \sigma_{k1}$, при котором σ^o сделается равным нулю в момент встречи с $\sigma^b = \sigma_{k1}$. Оно определится из уравнения (1.4):

$$\frac{1}{2} \int_{\sigma_s}^{\sigma_{k1}} \left(\frac{a^*}{a} - 1 \right) d\sigma = \sigma_s \quad (1.8)$$

Очевидно ¹, что $|\sigma_{k1}| > |\sigma_k|$.

Нам предстоит теперь выяснить, как меняется напряжение σ^b и σ^o в области вторичной упруго-пластической деформации.

2. Предварительные замечания. Случай разгрузки пластически деформированного участка рассмотрен в работах [4,5], где решение волнового уравнения дается методом характеристик. В работе [3], посвященной этому же вопросу, была указана однозначная связь между изменением напряжения σ_0 на волне Рахматулина и напряжениями σ^b , σ^o [уравнения (1.1), (1.2)]. Существенным являлось то обстоятельство, что σ_0 , которое заранее неизвестно, представляло функцию только координаты x , т. е. разгрузка не переходила в нагрузку. При этом скорости распространения прямой и обратной волн одинаковы и равны скорости звука a_* .

Случай удара о стержень с переменным пределом упругости, когда новый предел упругости $\sigma_0'(x)$ представляет известную функцию, возрастающую с возрастанием x , рассмотрен в § 1 работы [2]. Напряжения прямой волны, превышающие предел упругости, вызванные ударом о левый конец стержня, будут встречать в направлении своего распространения возрастающий предел упругости $\sigma_0'(x)$.

Не ставя задачу детального рассмотрения этого случая методами, изложенными в работе [3], укажем лишь, что изменению предела упру-

¹ Если в выражении (1.8) перейти к деформациям, то значение ϵ_{k1} , соответствующее σ_{k1} , определится уравнением

$$\frac{1}{2a_*^2} \int_{\epsilon_s}^{\epsilon_{k1}} a(a_* - a) d\epsilon = \epsilon_s$$

которое получено методом характеристик и дается В. С. Ленским в конце работы [9].

гости σ_0' на величину $d\sigma_0'$ при вторичной пластической деформации соответствует «источник» дополнительных напряжений прямой волны $d\sigma^{*b}$ и обратной $d\sigma^{*o}$, определяющихся уравнением

$$d\sigma^{*b} = d\sigma^{*o} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{a(\sigma_0')}{a_*} \right] d\sigma_0' \quad (2.1)$$

Так как $\sigma_0'(x)$ есть функция возрастающая, то из уравнения (2.1) видно, что как $d\sigma^{*b}$, так и $d\sigma^{*o}$ вызывают дополнительную нагрузку стержня и $d\sigma^{*o}$ распространяется, следовательно, со скоростью пластических деформаций $a(\sigma)$. Таким образом, происходит только нагрузка стержня, что является характерным отличием этого случая от рассматриваемого в настоящей работе.

Так как $a(\sigma_0')$ — известная функция напряжения σ_0' , а $\sigma_0' = \sigma_0'(x)$ предполагается заданной функцией координаты x , то

$$d\sigma^{*b} = d\sigma^{*o} = df(x)$$

представляет дифференциал известной функции $f(x)$.

Теперь же предстоит рассмотреть случай распространения упруго-пластической волны, когда новый предел упругости $\sigma_0'(x)$ убывает с возрастанием x . Будем рассматривать кривую $\epsilon(\sigma)$ как предел ломаной, когда длина каждого звена ломаной стремится к нулю. При этом скорость распространения пластических волн $a(\sigma)$ (1.3) будет функцией разрывной, меняющейся скачками. Каждому звену ломаной $\epsilon(\sigma)$ соответствует горизонтальная площадка графика функции $a(\sigma)$; углу ломаной соответствует «ступенька» функции $a(\sigma)$.

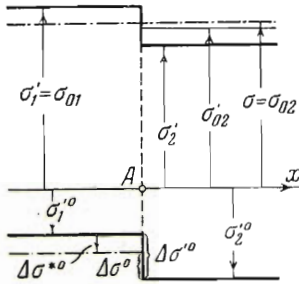
Таким образом, здесь принимается, что действительный «непрерывный» процесс распространения упруго-пластической волны можно получить, рассматривая прерывный процесс, когда скачки значений $a(\sigma)$, а следовательно, и скачки значений $\sigma(x, t)$ будут стремиться к нулю.

3. Уравнение вторичной упруго-пластической волны. Рассмотрим случай когда σ_m больше σ_k , определенного равенством (1.7). Тогда появится вторичная упруго-пластическая деформация.

Обозначим величины, относящиеся к моменту времени t' , штрихами и будем считать их известными. Аппроксимируя плавные кривые $\sigma^{*b}(x)$, $\sigma^{*o}(x)$ ступенчатыми, рассмотрим случай, когда скачок напряжений прямой волны, вызывающий вторичную пластическую деформацию, встретит в момент t' в сечении A скачок напряжений обратной волны. Это значит, что в момент времени t' общие напряжения σ' и скорости сечений v' в стержне непосредственно слева и справа от сечения A не равны между собой. Такое состояние стержня в сечении A было названо в работе [3] «динамически неравновесным». Все величины, относящиеся к сечениям, находящимся непосредственно слева от сечения A , обозначены индексом 1, справа — индексом 2.

Вследствие неравенства напряжений σ_1' , σ_2' и скоростей сечений v_1' и v_2' произойдет «внутреннее соударение», в результате чего появятся

напряжение σ и скорость v , общие для сечений, прилегающих слева и справа к сечению A . Сечению A будет соответствовать «динамически равновесное» состояние. Напряжения и скорости, получившиеся после внутреннего соударения, обозначены без штрихов.



Фиг. 2

На фиг. 2 значения σ^b не указаны, так как они легко определяются из соотношения

$$\sigma' = \sigma^b + \sigma^o \quad (3.1)$$

Для общности взят случай, когда на участке 1 (непосредственно слева от сечения A) напряжение $\sigma_1' = \sigma_{01}'$, а на участке 2 (непосредственно справа от сечения A) напряжение σ_2' меньше (по модулю) σ_{02}' , т. е. на участке 2 произошла незначительная разгрузка. Как увидим,

напряжения σ_{02}' и σ_2' не будут играть никакой роли, если (что и предполагается) после соударения общее напряжение σ будет больше σ_{02}' , т. е. процесс нагрузки распространится с участка 1 на участок 2 и

$$\sigma = \sigma_{02}, \quad |\sigma_{02}| > |\sigma_{02}'| \quad (3.2)$$

Заметим, что, заменив плавное изменение напряжений ступенчатым, мы получили возможность при рассмотрении внутреннего соударения в сечении A исключить влияние стержня вне малого участка близ сечения A , на котором выполнены условия $\sigma_1' = \text{const}$, $\sigma_1^o = \text{const}$, $\sigma_2' = \text{const}$, $\sigma_2^o = \text{const}$. Разности напряжений получаются малыми и можно ограничиться малыми первого порядка, т. е. воспользоваться формулой (1.2):

$$\Delta\sigma^o = \frac{1}{2} \left(\frac{a_*}{a} - 1 \right) \Delta\sigma_0 \quad (3.3)$$

пренебрегая различием в скорости $a(\sigma)$ при изменении σ_0 на $\Delta\sigma_0$. Здесь

$$\Delta\sigma_0 = \sigma_{02} - \sigma_{01} = \sigma - \sigma_{01}' \quad (3.4)$$

т. е. в момент внутреннего соударения изменяется не только σ^b и σ^o , но и σ_{02}' согласно (3.2). Напряжение же $\sigma_{01} = \sigma_{01}'$ останется неизменным, так как возникающее при внутреннем соударении дополнительное напряжение обратной волны вызовет, как будет показано ниже, разгрузку участка 1 . Кроме того, приращение σ^b распространяется вправо, а приращение σ^o влево и, следовательно,

$$\sigma_1^b = \sigma_1^b, \quad \sigma_2^o = \sigma_2^o \quad (3.5)$$

Тогда можно получить [с учетом соотношения (3.4)] следующее выражение для $\Delta\sigma_0$:

$$\Delta\sigma_0 = \sigma - \sigma_{01}' = \sigma_1^b + \sigma_1^o - \sigma_1^b - \sigma_1^o = \sigma_1^o - \sigma_1^o \equiv \Delta\sigma^{*o}$$

Это означает, что уменьшение полного напряжения произошло на участке 1 только за счет появления дополнительного напряжения обратной волны:

$$\Delta\sigma_0 = \Delta\sigma^{*o} = \sigma_1^o - \sigma_1^o \quad (3.6)$$

Используя соотношения (3.5) и (3.6), выразим $\Delta\sigma^o$ следующим образом:

$$\Delta\sigma^o = \sigma_2^o - \sigma_1^o = \sigma_2^{o'} - \sigma_1^{o'} - \Delta\sigma_0 \equiv \Delta\sigma^{o'} - \Delta\sigma_0$$

Подставляя значение $\Delta\sigma^o$ в уравнение (3.3), получим, что

$$\Delta\sigma^{*o} = \Delta\sigma_0 = \frac{2a}{a_* + a} \Delta\sigma^{o'} \quad (3.7)$$

Так как σ^o в рассматриваемом случае убывает (возрастая по модулю) вместе с убыванием σ_0^o в направлении возрастания x , то $\Delta\sigma^{o'} = \sigma_2^{o'} - \sigma_1^{o'}$ обратно по знаку с σ_0^o . Из уравнения (3.7) видно, что $\Delta\sigma_0$ соответствует понижению общего напряжения, а дополнительное напряжение $\Delta\sigma^{*o}$ действительно вызывает разгрузку участка I [в противоположность уравнению (2.1)]. Из (3.7) можно сделать следующие выводы:

1. Напряжение прямой волны, вызывая пластические деформации, распространяется со скоростью $a(\sigma)$, тогда как возникающие дополнительно напряжения обратной волны вызывают разгрузку и распространяются со скоростью a_* . Вывод остается справедливым, если стремиться $\Delta\sigma^{o'}$ к нулю. При этом предполагается, что при переходе к пределу, когда конечные приращения перейдут в дифференциалы, в результате будет получен «непрерывный» процесс распространения волны.

2. Уменьшение общего напряжения и возникновение дополнительных напряжений обратной волны однозначно определяются и полностью обусловлены тем скачком напряжения обратной волны $\Delta\sigma^{o'}$, который встретит на своем пути приращение напряжения прямой волны, распространяющееся со скоростью $a(\sigma)$.

3. Процесс происходит таким образом, что в каждом сечении стержня вызывается поочередно то нагрузка, то разгрузка (в рассмотренном выше случае после внутреннего соударения нагрузке подвергался участок 2 , разгрузке — участок I). При этом нагрузка более интенсивна, чем разгрузка, так что общее напряжение повышается, но повышение напряжения происходит как бы «возвратно-поступательно». Чередование нагрузки и разгрузки будет тем чаще, чем меньше будут «ступеньки» кривых $\sigma^o(x, t')$, $\sigma^o(x, t')$, чем короче будут звенья ломаной $\varepsilon(\sigma)$.

При переходе к пределу получится плавный рост напряжений $\sigma^o(t)$, $\sigma^o(t)$ и $\sigma(t) = \sigma^o(t) + \sigma^o(t) = \sigma_0(t)$ в каждом сечении стержня.

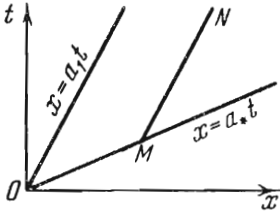
Процесс нагрузки стержня выше предела упругости за счет распространения волны одного направления при наличии менее интенсивной разгрузки за счет распространения волны противоположного направления назовем *вторичной упруго-пластической волной*. Такое явление наблюдается, когда предел упругости убывает в направлении распространения волны, вызывающей пластические деформации.

Замечание. То обстоятельство, что напряжение обратной волны соответствует разгрузке в области вторичной упруго-пластической волны, можно также показать, используя решение, приводимое в § 2 работы [2]. Интересуясь качественной стороной вопроса, можно рассмотреть лишь небольшие изменения напряжения вдоль характеристик в области вторичной упруго-пластической волны. Тогда возможно принять схему линейного упрочнения.

Общее решение задачи Коши дано формулой (2.2) работы [2]:

$$u = \Phi_3(x - a_1 t) + \Phi_4(x + a_1 t) - \frac{a_*^2 - a_1^2}{a_1^2} \int_0^x \varepsilon_s(x) dx$$

Здесь $\varepsilon_s(x)$ — деформация, соответствующая переменному пределу упругости $\sigma_s(x)$, — предполагается известной функцией, убывающей с увеличением аргумента; $a_1 = (E_1 / \rho)^{1/2}$ — скорость пластических волн, E_1 — модуль упрочнения, a_* дается формулой (1.3) настоящей работы. Значение u_x определится уравнением



Фиг. 3

$$u_x = \Phi_3'(x - a_1 t) + \Phi_4'(x + a_1 t) - \frac{a_*^2 - a_1^2}{a_1^2} \varepsilon_s(x)$$

Заметив, что

$$\frac{a_*^2 - a_1^2}{a_1^2} = \frac{E - E_1}{E_1}$$

определим значение u_x вдоль характеристики MN прямой волны (фиг. 3), на которой $x = a_1 t + c'$. Обозначив $\Phi_3'(x - a_1 t) = \Phi_3'(c') = C$, получим

$$u_x = C + \Phi_4'(x + a_1 t) - \frac{E - E_1}{E_1} \varepsilon_s(x)$$

Легко видеть, что при линейном упрочнении напряжение

$$\sigma = E \varepsilon_s + E_1 (u_x - \varepsilon_s) = (E - E_1) \varepsilon_s + E_1 u_x$$

Внося сюда полученное выше значение u_x , определим напряжение σ вдоль MN :

$$\sigma = (E - E_1) \varepsilon_s + E_1 C + E_1 \Phi_4'(x + a_1 t) - (E - E_1) \varepsilon_s(x)$$

На этом конкретном примере видно, что при решении задачи в напряжениях пропадает (после приведения подобных) слагаемое, обусловленное неоднородностью волнового уравнения. Учтя, что $x = a_1 t + c'$, получим

$$\sigma = E_1 C + E_1 \Phi_4'(2x - c')$$

Функция Φ_4' определяется из граничных условий формулой (2.4) работы [2]:

$$\Phi_4'([a_* + a_1] t) = \frac{1}{2a_1} \left[\frac{a_1}{\lambda^2} - a_* \right] \varepsilon_s(x)$$

Здесь $t = x / a_*$, $\lambda^2 = a_1^2 / a_*^2$ и потому

$$\Phi_4' \left(\left[1 + \frac{a_1}{a_*} \right] x \right) = \frac{a_*}{2a_1} \left[\frac{a_*}{a_1} - 1 \right] \varepsilon_s(x)$$

Так как $\varepsilon_s(x)$ убывает с ростом x , то Φ_4' также убывает с ростом аргумента, откуда следует, что напряжение σ убывает вдоль характеристики прямой волны. Изменение же напряжения вдоль характеристики прямой волны обусловлено изменениями напряжения обратной волны. Таким образом, изменения напряжения обратной волны соответствуют разгрузке.

Следует отметить, что разбиение напряжения σ на σ^b и σ^o по заданным значениям напряжения σ и скорости сечения v не однозначено, в силу нелинейной зависимости $\sigma - \varepsilon$. Однако можно показать, используя результаты работы [3], что σ^b и σ^o определяются однозначно, если для выбранного сечения с координатой x напряжение σ и скорость сечения v известны как функции времени t .

Обозначим общее напряжение, вызываемое распространением прямой волны от сечения A , через σ_{0a} . Оно является переменной величиной и соответствует значению $\sigma = \sigma_0$ вдоль характеристики $dx = a(\sigma) dt$. Уравнение (3.7) позволяет определить падение напряжения σ_{0a} в зависимости от встречаемого им изменения $\Delta\sigma^0$. Безразлично, произошло ли это изменение одним скачком или множеством бесконечно малых скачков. Нужно лишь, чтобы суммарное изменение $\Delta\sigma^0$ было достаточно мало.

Если рассматривать бесконечно большое число бесконечно малых скачков, то в случае, когда начало вторичной упруго-пластической волны находится впереди σ_{0a} , то, как показывает уравнение (3.7), за счет напряжений $\sigma_{0a1}, \sigma_{0a2}, \dots, \sigma_{0an}, \dots$, которые распространяются впереди σ_{0a} , уже появились дополнительные напряжения $\Delta\sigma^{*0}$. Эти дополнительные напряжения будут вызывать изменение напряжения σ^0 в каждом сечении x стержня с течением времени, которое обозначим $\Delta_t\sigma^0$. Следовательно, для определения $\Delta\sigma_0 = \Delta\sigma^{*0}$ нужно подставить в уравнение (3.7) выражение $\Delta\sigma^0$ в виде суммы изменений:

$$\Delta\sigma^{*0} = \Delta\sigma_0 = \frac{2a}{a_* + a} (\Delta_x\sigma^{0'} + \Delta_t\sigma^0)$$

Здесь $\Delta_x\sigma^{0'} = \sigma_2^{0'} - \sigma_1^{0'}$, по определению, известно, $\Delta_t\sigma^0$ — неизвестная величина, подлежащая определению. При переходе к пределу конечные приращения перейдут в частные дифференциалы. Опуская штрихи в обозначениях, так как момент t' был выбран произвольно, получим

$$d\sigma^{*0} = d\sigma_0 = \frac{2a}{a_* + a} (d_x\sigma^0 + d_t\sigma^0), \quad dx = a dt$$

Выразим частные дифференциалы с учетом уравнения характеристики:

$$d\sigma^{*0} = d\sigma_0 = \frac{2a}{a_* + a} \left(\frac{\partial\sigma^0}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial\sigma^0}{\partial t} \right) dx \quad (3.8)$$

Заметив, что $\Delta\sigma^{*0} = \sigma_1^0 - \sigma_1^{0'}$ характеризует изменение σ^0 в данном сечении (левее сечения A) с течением времени $t - t'$, определим

$$d\sigma^{*0} = d_t\sigma^0 = \frac{\partial\sigma^0}{\partial t} dt_1 \quad (3.9)$$

Здесь dt_1 соответствует времени, в течение которого напряжение прямой волны пройдет участок стержня dx от сечения x к сечению $x + dx$ и все вызванные им дополнительные напряжения обратной волны пройдут участок dx от сечения $x + dx$ к сечению x . Учтя скорости распространения прямой и обратной волн, получим, что

$$dt_1 = \frac{dx}{a} + \frac{dx}{a_*} = \frac{a_* + a}{a_* a} dx$$

Тогда вместо уравнения (3.9) запишем

$$d\sigma^{*0} = d_t\sigma^0 = \frac{a_* + a}{a_* a} \frac{\partial\sigma^0}{\partial t} dx \quad (3.10)$$

Подставим теперь в уравнение (3.8) значение $d\sigma^{*0}$ в форме (3.10)

$$\frac{a_* + a}{a_* a} \frac{\partial\sigma^0}{\partial t} dx = \frac{2a}{a_* + a} \left(\frac{\partial\sigma^0}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial\sigma^0}{\partial t} \right) dx$$

Отсюда, вводя обозначение

$$\varphi(a) = \frac{2a_*}{a_*^2/a^2 + 1} \quad (3.11)$$

получим основное уравнение распространения вторичной упруго-пластической волны

$$\frac{\partial \sigma^0}{\partial t} = \varphi(a) \frac{\partial \sigma^0}{\partial x} \quad (3.12)$$

Заметим, что в основе вывода лежит предположение о том, что изменение производной $\partial \sigma^0 / \partial t$, обусловленное прохождением данного напряжения σ_{0a} , есть величина бесконечно малая. Докажем это положение.

Значение производной $(\partial \sigma^0 / \partial t)_a \equiv \sigma_t^0$, обусловленное прохождением данного напряжения σ_{0a} , определяется через $d\sigma^{*0}$ уравнением (3.10). В свою очередь $d\sigma^{*0}$ уравнением (3.8) связано со значением производной $(\partial \sigma^0 / \partial t)_{a1} \equiv \sigma_{t1}^0$, предшествующим прохождению напряжения σ_{0a} . Производная σ_{t1}^0 обусловлена прохождением напряжения σ_{0a1} , предшествующего напряжению σ_{0a} . При этом расстояние $\Delta'x$ между сечениями стержня, которых достигли в данный момент напряжения σ_{0a} и σ_{0a1} , не влияет на соотношения между производными σ_t^0 и σ_{t1}^0 , если это расстояние достаточно мало и можно пренебречь изменением скорости $a(\sigma_0)$ при уменьшении $\Delta'x$.

Если допустить, что $\sigma_t^0 = \psi(\sigma_{t1}^0) \neq \sigma_{t1}^0$, то, устремив $\Delta'x$ к нулю, обнаруживаем разрыв производной σ_t^0 в произвольном сечении A области вторичной упруго-пластической волны.

Произвольность выбранного сечения A в отличие от случая простой разгрузки [4], где имеется в каждый момент лишь одно сечение с разрывом вторых производных от смещения $u(x, t)$, позволяет заключить, что $\sigma_t^0 = \sigma_{t1}^0$.

4. Исследование распространения вторичной упруго-пластической волны методом характеристик. Под уравнениями характеристик вторичной упруго-пластической волны будем понимать уравнения, определяющие изменения напряжений прямой и обратной волн вдоль интегральных кривых, определяемых уравнениями типа $dx = f(x, t)dt$, справедливые при любых начальных и граничных условиях. Несколько необычное определение характеристик объясняется тем, что мы не пользовались волновым уравнением, связывающим вторые производные от смещения сечений стержня $u(x, t)$. Такой подход к изучаемому явлению, видимо, имеет преимущество, так как квадрат скорости распространения возмущения, входящий коэффициентом в волновое уравнение, будет различным для прямой и обратной волн.

В случае распространения волны разгрузки (волны Рахматулина) в каждый момент имеется лишь одно сечение, отделяющее область нагрузки от области разгрузки. При этом форма волнового уравнения в области разгрузки отлична от формы уравнения в области нагрузки. Рассматриваемое же явление характерно тем, что такие сечения распределены по всей области вторичной упруго-пластической волны в плоскости xt .

Написав обыкновенное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (3.12):

$$\frac{dt}{1} = - \frac{dx}{\varphi(a)}$$

убеждаемся, что вдоль интегральной кривой $dx = -\varphi(a)dt$ напряжения обратной волны постоянны, т. е.

$$d\sigma^o = 0, \quad dx = -\varphi(a)dt \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) представляет, согласно принятой терминологии, уравнение характеристик обратной волны. Функция $-\varphi(a)$ играет, следовательно, роль скорости, с которой перемещается в области вторичной упруго-пластической волны вдоль стержня сечение, для которого напряжение σ^o имеет заданное значение.

Сложность уравнения (4.1) заключается в том, что $\varphi(a) = \varphi[a(x, t)]$ — неизвестная функция координаты x и времени t , так как $a = a(\sigma_0)$ зависит от неизвестного нам напряжения σ_0 , не входящего явно в уравнения (3.12), (4.1).

Изменение напряжения σ_0 можно учесть, используя уравнение (3.7):

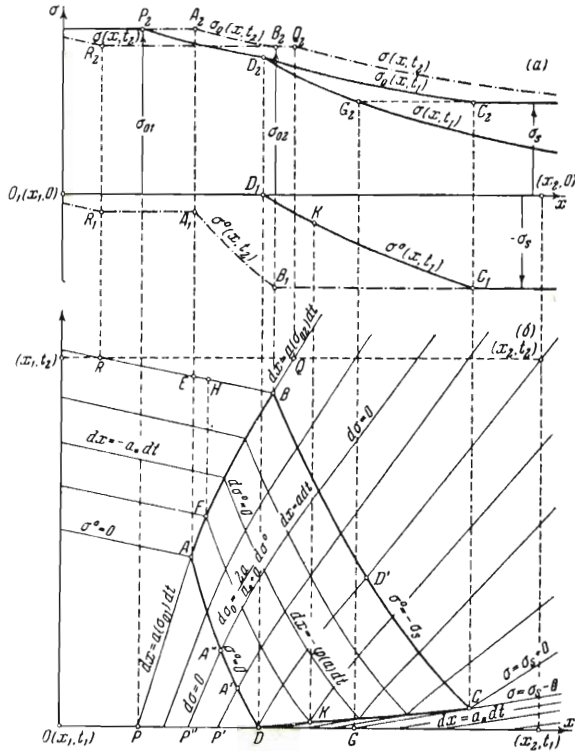
$$d\sigma_0 = \frac{2a}{a_* + a} d\sigma^o, \quad dx = a dt \tag{4.2}$$

Полученное уравнение является уравнением характеристик полного напряжения $\sigma = \sigma_0$. Кроме того, из соотношения (1.5) следует, что $d\sigma_0 = d\sigma^s + d\sigma^o$, и достаточно заменить значение $d\sigma_0$ его выражением из (4.2), чтобы получить уравнение характеристик прямой волны

$$d\sigma^s = - \frac{a_* - a}{a_* + a} d\sigma^o, \quad dx = a dt \tag{4.3}$$

Система уравнений (4.1), (4.2) позволяет при заданных начальных и граничных условиях построить характеристики (4.1), (4.2). Не производя конкретных вычислений, которые будут зависеть от функции $\varepsilon(\sigma)$, плотности ρ и длины l стержня, выясним лишь принципиальную сторону вопроса.

На фиг. 4 взят случай $\sigma^s(x_1, t) = \sigma_{01} = \text{const}$, $\sigma^o(x_2, t) = -\sigma_s = \text{const}$, причем момент t_1 соответствует началу возникновения вторичной



Фиг. 4

упруго-пластической волны, т. е. σ^o в сечении D впервые достигло нулевого значения. Так как общее напряжение σ не везде равно σ_0 , поэтому задано распределение напряжений обратной волны $\sigma^o(x, t_1)$, общих напряжений $\sigma(x, t_1) = \sigma^o(x, t_1) + \sigma_0(x, t_1)$ и дополнительно распределение $\sigma_0(x, t_1)$ на участке $x_d \leq x \leq x_2$. Очевидно, напряжение $\sigma^o = \sigma_0$ в сечении D равно σ_{k1} , определяемому уравнением (1.8).

Вверху, в плоскости $x\sigma$ (фиг. 4, а), сплошными линиями нанесены графики этих функций. Штрих-пунктирными линиями нанесены графики напряжений в момент t_2 после прохождения вторичной упруго-пластической волны. Последние графики определяются уже после построения характеристик в плоскости xt (фиг. 4, б). Ниже, в плоскости xt , нанесен примерный вид характеристик обратной волны (4.1) и характе-

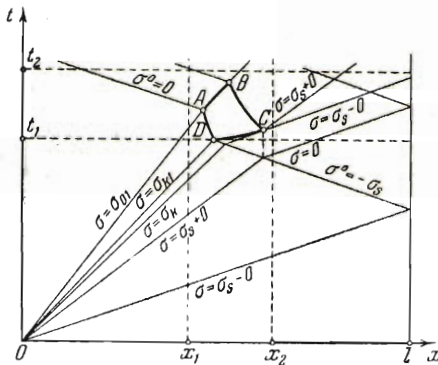
ристик полного напряжения (4.2).

На фиг. 5 дана в уменьшенном масштабе плоскость xt для значений $0 \leq t \leq t_2$, $0 \leq x \leq l$.

Область PAD соответствует распространению напряжений прямой упруго-пластической волны до встречи с напряжениями обратной волны (фиг. 4, б). Кривая DA является пограничной, вдоль которой $\sigma^o = 0$, правее же $|\sigma^o| > 0$. Так как напряжения вдоль характеристик полного напряжения $P'A'$, $P'A''$, ..., PA известны из начальных условий, то может быть вычислена и функция $\varphi(a)$ в точках D , A' , A'' , ..., т. е. определен угол наклона кривой DA .

Область ниже кривой DC соответствует распространению напряжений прямой волны, когда общее напряжение σ не превышает предела упругости $\sigma_0(x, t_1)$. Кривая DC указывает моменты времени в каждом сечении, когда общее напряжение σ становится равным $\sigma_0(x, t_1)$. Построение ее и определение на ней σ^o производятся без дополнительных вычислений на основании заданных графиков $\sigma^o(x, t_1)$, $\sigma_0(x, t_1)$, $\sigma(x, t_1)$ (фиг. 4, а). Методом численного интегрирования, зная напряжения $\sigma = \sigma_0$ вдоль пограничной кривой DA и напряжения σ^o вдоль пограничной кривой DC , можно построить характеристики полного напряжения $dx = a dt$ и определить на них полное напряжение $\sigma = \sigma_0$, а также построить характеристики обратной волны $dx = -\varphi(a) dt$ и определить вдоль них напряжение $\sigma^o = \text{const}$. Таким образом, получим область $ABCD$ — область вторичной упруго-пластической волны, характерной особенностью которой является нагрузка стержня за счет прямой волны при одновременной, менее интенсивной разгрузке за счет обратной волны.

Очевидно, необходимым условием существования вторичной упруго-пластической волны является менее быстрый рост в каждом сечении напряжений обратной волны в сравнении с напряжением прямой волны, т. е. чтобы $|\partial\sigma^o/\partial t| > |\partial\sigma^o/\partial t|$.



Фиг. 5

Данное неравенство может нарушиться за счет изменения напряжений σ^o , приходящих с правого свободного конца стержня, если не предполагать наличия разрыва производной функции $\varepsilon(\sigma)$ при переходе от упругих к пластическим деформациям. На этом вопросе, не представляющем принципиальных трудностей, но требующем дополнительного исследования, мы останавливаться не будем.

Левее характеристики AB нагрузка прекратилась, уравнение (4.1) не имеет места и происходит простое суммирование дополнительных напряжений $d\sigma^{*o}$, вызванных прохождением прямой волны максимального напряжения, характеристика которой и представляет кривую AB . Поэтому нанесены характеристики обратной волны вида $dx = -a_* dt$, падение напряжений σ^o вдоль которых определится следующим образом.

Левее вертикальной прямой AE напряжение $\sigma_0 = \sigma_{01} = \text{const}$; следовательно, и σ^o вдоль характеристики $dx = -a_* dt$ постоянно [согласно уравнению (1.2)].

В области же ABE происходит падение (по модулю) напряжения σ^o согласно тому же уравнению.

Воспользуемся тем, что вдоль AB известно σ''^o . Тогда из уравнения (3.7) определяем

$$d\sigma^{*o} = \frac{2a}{a_* + a} d\sigma''^o$$

где $d\sigma''^o$ берутся вдоль характеристики прямой волны $dx = a dt$. Тогда вдоль характеристик обратной волны $dx = -a_* dt$ следует взять значение $d\sigma''^o$ с обратным знаком и падение напряжения обратной волны определится соотношением

$$d\sigma^o = d\sigma''^o - \frac{2a}{a_* + a} d\sigma''^o = \frac{a_* - a}{a_* + a} d\sigma''^o \quad (4.4)$$

Здесь $d\sigma''^o$ берется вдоль кривой BA , а $d\sigma^o$ вдоль характеристик $dx = -a_* dt$ между точками с одинаковыми абсциссами x . Так, например, напряжение σ^o в произвольной точке H характеристики BE определим, зная напряжения σ''^o в точке B и в точке F . Напряжения же $\sigma''^o(B) = \sigma^o(C) = -\sigma_s$, $\sigma''^o(F) = \sigma^o(K)$ равны значениям $\sigma^o(x, t_1)$ в точках C_1 и K_1 на фиг. 4, а. Следовательно, из уравнения (4.4) получаем после интегрирования

$$\sigma^o(H) = \sigma''^o(B) + \int_{\sigma''^o(B)}^{\sigma''^o(F)} \frac{a_* - a}{a_* + a} d\sigma''^o \quad (4.5)$$

Область внутри угла, образованного характеристиками BQ и BR , соответствует динамически равновесному состоянию стержня.

Укажем значение полного напряжения σ внутри угла RBQ , т. е. того напряжения, которое будет после прохождения вторичной упруго-пластической волны.

Очевидно, $\sigma = \sigma_{02}$ соответствует полному напряжению вдоль характеристики BQ . Из уравнения (4.2) имеем

$$\frac{a_* + a}{2a} d\sigma_0 = d\sigma^o, \quad dx = a dt$$

Проинтегрировав это уравнение вдоль характеристики BA от B до A , учитывая, что

$$\sigma''_0(A) = 0, \quad \sigma''_0(B) = -\sigma_s, \quad \sigma_0(A) = \sigma_{01}, \quad \sigma_0(B) = \sigma_{02}$$

получим

$$\int_{\sigma_{02}}^{\sigma_{01}} \frac{a_* + a}{2a} d\sigma = \sigma_s \quad (4.6)$$

Построение графиков напряжений в момент времени t_2 , после окончания вторичной упруго-пластической волны, не вызывает затруднений и выполнено штрих-пунктирными линиями на фиг. 4, а.

Легко видеть, что полученные результаты непосредственно распространяются на случай повторного удара о стержень с одного и того же конца.

В заключение отметим следующее обстоятельство. Мы полагали, что скорость распространения пластических волн $a = a(\sigma)$, тогда как в работе [2] берется зависимость вида $a = a(\sigma - \sigma_0)$, что соответствует различным зависимостям деформации от напряжения. Однако если положить $a = a(\sigma - \sigma_0)$, то в области вторичной упруго-пластической волны, где полное напряжение σ все время совпадает с новым пределом упругости, так как нагрузка и разгрузка чередуются, мы получили бы, что $a = a(0) = \text{const}$. Если, кроме того, считать, что $\partial \varepsilon / \partial \sigma$ меняется плавно, то $a = a_*$ и, несмотря на нагрузку за предел упругости, не возникало бы остаточных деформаций.

Поступило 6 VI 1951

Новозыбковский государственный
педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Ленский В. С. Упруго-пластический удар стержня о жесткую преграду. ПММ, т. XIII, вып. 2, 1949.
2. Рахматулин Х. А. Исследование законов распространения плоских упруго-пластических волн в среде с переменным пределом упругости. ПММ, т. XIV, вып. 1, 1950.
3. Лебедев Н. Ф. Распространение ударной волны в полубесконечном однородном стержне. Инженерный сборник, т. XI, 1952.
4. Рахматулин Х. А. О распространении волны разгрузки. ПММ, т. IX, вып. 1, 1945.
5. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержней. ПММ, т. X, вып. 5—6, 1946.
6. Лебедев Н. Ф. О распространении волны разгрузки в случае линейного упрочнения. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.
7. Lee E. H. A boundary value problem in the theory of plastic wave propagation. Quarterly of Applied Mathematics, vol. X, No 4, p. 335—346, 1953.
8. White M. and van Griffis L. The permanent strain in a uniform Bar due to longitudinal impact. Journ. of Applied Mechanics, vol. 14, No 4, p. 337—343, 1947. Есть русский перевод: Уайт М. и Гриффис Л. Остаточные деформации в однородном стержне, подвергнутом продольному удару. Механика. Сборник сокращенных переводов и рефератов иностранной периодической литературы, вып. 1. 1950. Изд. иностранной литературы.
9. Ленский В. С. Метод построения динамической зависимости между напряжениями и деформациями по распределению остаточных деформаций. Вестник Московского университета, № 5, 1951.