**Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954**
**Институт механики Академии наук Союза ССР**

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ ОРГАНАМИ УПРАВЛЕНИЯ

**А. П. Дувакин, А. М. Летов**

(Москва)

А. И. Лурье [1] разработал метод построения функций Ляпунова, решающих задачу об устойчивости регулируемых систем с одним органом управления. И. Г. Малкин [2] предложил другой метод построения указанных функций. В работе [3] метод А. И. Лурье распространен на регулируемые системы с двумя органами управления. Ниже строятся функции Ляпунова по методу И. Г. Малкина для систем с двумя органами управления. Полученные при этом достаточные условия устойчивости оказываются более простыми и более широкими, чем условия, приведенные в работе [3].

**§ 1. Постановка задачи.** Допустим, что движение регулируемой системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\alpha} x_\alpha + \sum_{s=1}^{2} u_{si} \varphi_s(\sigma_s) \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ \sigma_s &= \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} x_\alpha \qquad\qquad\qquad (s = 1, 2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь обозначено $b_{i\alpha}$, $u_{si}$ — постоянные числа, $j_{s\alpha}$ — параметры регулятора, $\varphi_s(\sigma_s)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \varphi_s(\sigma_s) &= 0 \qquad \text{для} \quad \sigma_s = 0 \\ \sigma_s \varphi_s(\sigma_s) &> 0 \qquad \text{для} \quad \sigma_s \neq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

и такие, что положение равновесия

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \tag{1.3}$$

является единственным во всем пространстве переменных.

Предположим также, что уравнение

$$\| b_{i\alpha} - \delta_{i\alpha} \lambda \| = 0 \tag{1.4}$$

имеет различные корни $\lambda_i$, у которых

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \tag{1.5}$$

Определим достаточные условия асимптотической устойчивости по Ляпунову очевидного решения (1.3) при любых конечных начальных возмущениях.

**§ 2. Построение функции Ляпунова.** Зададимся произвольной знакоопределенной всюду отрицательной квадратичной формой $W(x_1, \ldots, x_n)$

$$-W = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}) \tag{2.1}$$

Тогда, как показал Ляпунов, можно единственным образом составить квадратичную форму

$$F = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} B_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}) \tag{2.2}$$

удовлетворяющую условию

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \left( \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\alpha} x_\alpha \right) = W \tag{2.3}$$

причем эта форма будет обязательно знакоопределенной положительной.

Коэффициенты формы (2.2) определяются из сравнения коэффициентов при подобных членах в выражении (2.3). За функцию Ляпунова $V$ примем знакоопределенную положительную функцию

$$V = F + 2\int_0^{\sigma_1} \varphi_1(\sigma_1)\, d\sigma_1 + 2\int_0^{\sigma_2} \varphi_2(\sigma_2)\, d\sigma_2 \tag{2.4}$$

Эта функция пригодна для исследования устойчивости при любых конечных возмущениях, так как она удовлетворяет условию Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [4] ввиду наличия квадратичной формы $F$ от всех переменных $x_1, \ldots, x_n$. Полная производная функции Ляпунова (2.4) по времени, составленная в силу уравнений (1.1), равна

$$-\dot{V} = -W + 2\sum_{k=1}^{2} \sum_{\alpha=1}^{n} P_{\alpha k} x_\alpha \varphi_k(\sigma_k) + 2\sum_{s, k=1}^{2} r_{sk} \varphi_s(\sigma_s)\, \varphi_k(\sigma_k) \tag{2.5}$$

Здесь

$$-P_{\alpha k} = \sum_{i=1}^{n} (b_{i\alpha} j_{ki} + B_{i\alpha} u_{ki}), \qquad -r_{sk} = \sum_{i=1}^{n} j_{ki} u_{si} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, n \\ s,\ k = 1,\ 2 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Очевидное решение системы (1.1) будет асимптотически устойчиво если выражение (2.5) будет знакоопределенной положительной функцией аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Будем рассматривать выражение (2.5) как квадратичную форму $n+2$ аргументов $x_1, \ldots, x_n, \varphi_1, \varphi_2$.

Тогда по теореме Сильвестра необходимым и достаточным условием знакоопределенной положительности формы (2.5) является положительность всех главных миноров ее дискриминанта

$$D_{n+2} = \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1n} & P_{11} & P_{12} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} \ldots A_{nn} & P_{n1} & P_{n2} \\ P_{11} \ldots P_{n1} & 2r_{11} & r_{12} + r_{21} \\ P_{12} \ldots P_{n2} & r_{12} + r_{21} & 2r_{22} \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

Первые $n$ миноров этого выражения положительны в силу знакоопределенной положительности формы $-W$.

Остаются два существенных условия:

$$D_{n+1} > 0, \qquad D_{n+2} > 0 \tag{2.8}$$

Отсюда вытекает теорема. Невозмущенное движение (1.3) системы регулирования (1.1) является асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях, если выполняются условия (1.5) и (2.8) в совокупности.

**§ 3. Система уравнений с двойным нулевым корнем.** Рассмотрим систему уравнений $n+2$-го порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\alpha} x_\alpha + \sum_{s=1}^{2} u_{si} \varphi_s(\sigma_s) \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ \dot{x}_{n+s} &= \varphi_s(\sigma_s), \qquad \sigma_s = \sum_{\alpha=1}^{n+2} j_{s\alpha} x_\alpha \qquad (s = 1,\ 2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

в которой функции $\varphi_s(\sigma_s)$ аналитические и не содержат линейных членов. Характеристическое уравнение первого приближения такой системы имеет двойной нулевой корень, которому соответствуют две группы решений.

Пусть корни уравнения $\| b_{i\alpha} - \delta_{i\alpha}\lambda \| = 0$ различны и удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Будем предполагать, что очевидное решение

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+2} = 0 \tag{3.2}$$

системы (3.1) является единственным во всем пространстве переменных.

Это значит, что, в частности, выполняется неравенство

$$j_{1,\,n+1} j_{2,\,n+2} - j_{1,\,n+2}\, j_{2,\,n+1} \neq 0$$

Достаточные условия устойчивости решения (3.2) при любых конечных начальных возмущениях определятся аналогично предыдущему. Для этого за функцию Ляпунова следует принять выражение (2.4), в котором для функций $\varphi_s(\sigma_s)$ выполняются соотношения

$$\int_0^{\sigma_s} \varphi_s(\sigma_s)\, d\sigma_s \to +\infty \quad \text{при } \sigma_s \to \pm\infty \qquad (s = 1,\ 2) \tag{3.3}$$

(Тогда условия Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [4] будут выполняться.)

Достаточные условия устойчивости запишутся в виде тех же равенств (2.8), в которых следует считать

$$\begin{aligned} -P_{\alpha k} &= \sum_{i=1}^{n} (b_{i\alpha} j_{ki} + B_{i\alpha} u_{ki}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \\ -r_{sk} &= \sum_{i=1}^{n} j_{ki} u_{si} + j_{k,\,n+s} \qquad (s, k = 1,\ 2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

*Замечание 1.* Порядок детерминанта (2.7) на две единицы больше порядка системы уравнений (1.1) и совпадает с порядком системы (3.1).

Поэтому наличие дополнительных нулевых корней в характеристическом уравнении первого приближения не повышает порядка вычисляемого детерминанта и, следовательно, не усложняет решения задачи об устойчивости.

*Замечание 2.* Легко доказывается [2], что величины $r_{ks}$ являются инвариантными относительно любого неособого линейного преобразования переменных. Такое свойство $r_{ks}$ может оказаться полезным при упрощении выкладок.

**§ 4. Пример.** Рассмотрим простейшую систему регулирования с двумя органами управления, описываемую уравнениями [3]

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u_{11}\varphi_1(\sigma_1) + u_{21}\varphi_2(\sigma_2), \quad \dot{\sigma}_1 = j_{11}x_1 + j_{12}x_2 - r_1\varphi_1(\sigma_1)$$
$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u_{12}\varphi_1(\sigma_1) + u_{22}\varphi_2(\sigma_2), \quad \dot{\sigma}_2 = j_{21}x_1 + j_{22}x_2 - r_2\varphi_2(\sigma_2) \qquad (4.1)$$

в которых числа $\lambda_i$ удовлетворяют условию (1.5). Найдем достаточные условия устойчивости при любых конечных возмущениях очевидного решения

$$x_1 = x_2 = \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \qquad (4.2)$$

Пусть функция Ляпунова имеет вид:

$$V = F + 2\int_0^{\sigma_1} \varphi_1(\sigma_1)\,d\sigma_1 + 2\int_0^{\sigma_2} \varphi_2(\sigma_2)\,d\sigma_2 \qquad (F = B_{11}x_1^2 + 2B_{12}x_1x_2 + B_{22}x_2^2) \qquad (4.3)$$

Здесь $F$ — произвольная знакоопределенная положительная функция, а второе и третье слагаемые удовлетворяют условиям (3.3). Производная функции Ляпунова по времени, составленная в силу уравнений (4.1), равна

$$-\dot{V} = A_{11}x_1^2 + 2A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2 + 2P_{11}x_1\varphi_1(\sigma_1) + 2P_{21}x_2\varphi_1(\sigma_1) +$$
$$+ 2P_{12}x_1\varphi_2(\sigma_2) + 2P_{22}x_2\varphi_2(\sigma_2) + 2r_1\varphi_1^2(\sigma_1) + 2r_2\varphi_2^2(\sigma_2) \qquad (4.4)$$

причем

$$-A_{11} = 2\lambda_1 B_{11}, \qquad -A_{12} = (\lambda_1 + \lambda_2)B_{12}, \qquad -A_{22} = 2\lambda_2 B_{22}$$
$$-P_{11} = B_{11}u_{11} + B_{12}u_{12} + j_{11}, \qquad -P_{12} = B_{11}u_{21} + B_{12}u_{22} + j_{21} \qquad (4.5)$$
$$-P_{21} = B_{12}u_{11} + B_{22}u_{12} + j_{12}, \qquad -P_{22} = B_{12}u_{21} + B_{22}u_{22} + j_{22}$$

Обозначим (4.6)

$$D_{31} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & P_{11} \\ A_{12} & A_{22} & P_{21} \\ P_{11} & P_{21} & 2r_1 \end{vmatrix}, \qquad D_{32} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & P_{12} \\ A_{12} & A_{22} & P_{22} \\ P_{12} & P_{22} & 2r_2 \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & P_{11} & P_{12} \\ A_{12} & A_{22} & P_{21} & P_{22} \\ P_{11} & P_{21} & 2r_1 & 0 \\ P_{12} & P_{22} & 0 & 2r_2 \end{vmatrix}$$

Пусть второй орган управления выключен ($u_{21} = u_{22} = j_{21} = j_{22} = r_2 = 0$). Тогда достаточное условие устойчивости очевидного решения системы (4.1) имеет вид:

$$D_{31} > 0 \qquad (4.7)$$

При выключенном первом органе управления оно имеет ту же форму: $D_{32} > 0$

При включении обоих органов управления, невозмущенное движение системы (4.1) будет устойчиво, если при выполнении (4.7) и (4.8) выполняется условие $D_4 > 0$. При $B_{11} = 1$, $B_{22} = 1$, $B_{12} = 0$ имеем:

$$\frac{1}{2}D_{31} = 2^2 r_1\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1(u_{12} + j_{12})^2 + \lambda_2(u_{11} + j_{11})^2 > 0$$
$$\frac{1}{2}D_{32} = 2^2 r_2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1(u_{22} + j_{22})^2 + \lambda_2(u_{21} + j_{21})^2 > 0 \qquad (4.8)$$

$$D_4 = 2r_2D_{31} + 2r_1D_{32} - 2^4 r_1r_2\lambda_1\lambda_2 + [(u_{11} + j_{11})(u_{22} + j_{22}) - (u_{12} + j_{12})(u_{21} + j_{21})]^2 > 0$$

Условия устойчивости (4.8) являются более широкими по сравнению с условиями, указанными в работе [3], поскольку они не содержат равенств, выражающих дополнительные зависимости между параметрами регулятора.

Поступила 10 XII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ, т. IX, вып. 5, 1945.
2. Малкин И. Г. К теории устойчивости регулируемых систем. ПММ, т. XV, вып. 1, 1951.
3. Летов А. М. Устойчивость регулируемых систем с двумя исполнительными органами. ПММ, т. XVII, вып. 4, 1953.
4. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. LXXXVI, № 3.