Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С. Н. Шиманов

(Свердловск)

В работе рассматриваются периодические колебания неавтономной квазилинейной системы при неаналитической характеристике нелинейности.

§ 1. Постановка задачи. Допустим, что колебания системы описываются уравнениями вида:

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1} x_1 + \ldots + a_{sn} x_n + \mu f_s(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где a_{si} — постоянные, а μ — малый параметр. Функции f_s по отношению к t непрерывные периодические, с периодом 2π, допускают непрерывные частные производные первого порядка по $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой замкнутой области G.

Задача состоит в отыскании периодических решений (периода 2π) уравнений (1.1), обращающихся при $\mu = 0$ в периодические решения порождающей системы

$$\frac{dx_s^{(0)}}{dt} = a_{s1} x_1^{(0)} + \ldots + a_{sn} x_n^{(0)} \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{1.2}$$

Эту задачу рассмотрел И. Г. Малкин в работе [1], предполагая, что производные первого порядка от функций f_s непрерывны и удовлетворяют по отношению к $x_1, \ldots, x_n$ условиям Коши-Липшица.

Можно показать, что метод последовательных приближений, развитый в упомянутой выше работе И. Г. Малкина для отыскания периодических решений, справедлив и для системы (1.1).

Рассмотрим характеристическое уравнение системы

$$| a_{si} - \delta_{si} \lambda | = 0 \tag{1.3}$$

Назовем критическими корнями этого уравнения те корни, которые либо равны нулю, либо имеют вид $\pm N \sqrt{-1}$, где N — целое число.

Различают два случая: нерезонансный, когда уравнение (1.4) не имеет корней, мало отличающихся от критических (на величины порядка малости μ), и резонансный, когда такие корни имеются.

В нерезонансном случае существует периодическое решение периода 2π, которое при $\mu = 0$ обращается в тривиальное $x_s = 0$. Оно может быть построено методом последовательных приближений [1]. Доказательство сходимости приближений к искомому периодическому решению не представляет трудностей. На этом случае мы не останавливаемся.

В резонансном случае порождающая система уравнений (1.2) имеет m периодических решений, где m меньше или равно числу критических корней. Пусть эти решения будут $\varphi_{s1}, \ldots, \varphi_{sm}$ $(s = 1, \cdots, n)$. Сопряженная система уравнений для системы (1.2) будет иметь тоже m периодических решений: $\psi_{s1}, \ldots, \psi_{sm}$ $(s = 1, \ldots, m)$.

Как показал И. Г. Малкин, для того чтобы система (1.1) допускала периодическое решение, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее периодическое решение системы (1.2):

$$x_s^{(0)} = M_1^{(0)} \varphi_{s1} + \cdots + M_m^{(0)} \varphi_{sm}$$

необходимо, чтобы постоянные $M_i^{(0)}$, входящие в порождающее решение, удовлетворяли уравнениям

$$P_i^{(0)}(M_1, \ldots, M_m) = \sum_{s=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_s(t, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \psi_{si}(t)\, dt = 0 \qquad (i = 1, \cdots, m) \tag{1.4}$$

где ψ_{si} — периодические решения системы, сопряженной с (1.2). Для каждого решения уравнений (1.4), для которого выполняется условие

$$\left. \frac{\partial (P_1^{(0)}, \ldots, P_m^{(0)})}{\partial (M_1, \ldots, M_m)} \right|_{M_i = M_i^{(0)}} \neq 0 \tag{1.5}$$

и для которого порождающее решение лежит в области G, существует при достаточно малом $|\mu|$ одно и только одно периодическое решение системы (1.1), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее.

И. Г. Малкин в работе [1] дает метод последовательных приближений для построения периодических решений. Доказательство этого метода опиралось на предположение о том, что первые частные производные от функций f_s удовлетворяют условиям Коши-Липшица. Ниже показано, что последнее ограничение можно отбросить. Доказательство при этом упрощается.

Напомним метод последовательных приближений, развитый И. Г. Малкиным [1]. В качестве нулевого приближения берем порождающее периодическое решение системы (1.2), которое можно представить в виде

$$x_s^{(0)} = M_1 \varphi_{s1} + \ldots + M_m \varphi_{sm}$$

где M_i — произвольные постоянные, а φ_{si} — частные периодические решения системы (1.2). В качестве дальнейших приближений берем периодические решения уравнений

$$\frac{dx_s^{(l)}}{dt} = a_{s1} x_1^{(l)} + \ldots + a_{sn} x_n^{(l)} + \mu f_s(t, x_1^{(l-1)}, \ldots, x_n^{(l-1)}) \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n \\ l = 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Для того чтобы система (1.6) допускала периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{s=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_s(t, x_1^{(l-1)}, \ldots, x_n^{(l-1)}) \psi_{si}\, dt = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.7}$$

При $l=1$ приходим к уже приведенным уравнениям (1.4), определяющим постоянные $M_i^{(0)}$ в порождающем решении.

Периодические решения линейной неоднородной системы (1.6) имеют вид

$$x_s^{(l)} = M_1^{(l)} \varphi_{s1} + \ldots + M_m^{(l)} \varphi_{sm} + \varphi_s^{(l)}(t)$$

где $M_i^{(l)}$ — произвольные постоянные, а $\varphi_s^{(l)}$ — какое-нибудь частное периодическое решение неоднородной системы (1.6).

Постоянными $M_i^{(l-1)}$ можно воспользоваться для удовлетворения соотношениям (1.7). Из этих уравнений постоянные $M_i^{(l-1)}$ находятся однозначно, если только $|\mu|$ достаточно мал. В самом деле, функции $x_s^{(l-1)}$ при $\mu=0$ и $M_i^{(l-1)} = M_i^{(0)}$ совпадают с $x_i^{(0)}$, и поэтому уравнения (1.6) на основании (1.4) тождественно удовлетворяются при $\mu=0$ и

$$M_i^{(i-1)} = M_i^{(0)}.$$

Так как при этом по предположению выполняется условие (1.5), то уравнения (1.6) допускают при достаточно малом $|\mu|$ одно и только одно решение $M_i^{(l-1)}(\mu)$, где $M_i^{(l-1)}(0) = M_i^{(0)}$.

Переходя от $l-1$ к l, получаем вполне определенный процесс последовательных приближений.

Прежде чем перейти к доказательству сходимости последовательных приближений, докажем вспомогательные предложения.

§ 2. Вспомогательные предложения из теории неявных функций. Рассмотрим систему уравнений

$$F_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

где F_s — функции, непрерывные относительно μ и допускающие непрерывные частные производные по x_i первого порядка в некоторой замкнутой области, содержащей точку $x_i = \mu = 0$.

Допустим, что

(1) $$F_s(0, \ldots; 0) = 0$$

(2) $$\left[\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right]_{x_1=\ldots=x_n=\mu=0} \neq 0 \tag{2.2}$$

(3) $$|F(x_1 \ldots, x_n; \mu) - F_s(x_1, \ldots, x_n; 0)| \leqslant C|\mu|$$

где C — положительное число.

Согласно теореме о неявных функциях система уравнений (2.1) допускает единственное решение

$$x_i = x_i(\mu), \qquad x_i(0) = 0; \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

непрерывное в окрестности точки $\mu = 0$.

Лемма 1. Решение (2.3) системы (2.1), удовлетворяющей условию (2.2), удовлетворят неравенствам

$$|x_s(\mu)| < C|\mu| K \tag{2.4}$$

в окрестности точки $\mu = 0$ (K — некоторая константа, не зависящая от μ).

Доказательство. Систему уравнений (2.1) можно записать в виде

$$F_s(x_1, \ldots, x_n; 0) = F_s(x_1, \ldots, x_n; 0) - F_s(x_1, \ldots, x_n; \mu)$$

и, учитывая то, что F_s имеет непрерывные частные производные и условие (1) из (2.2), систему уравнений (2.1) можно записать следующим образом:

$$x_1 \psi_{s1}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + x_n \psi_{sn}(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= F_s(x_1, \ldots, x_n; 0) - F_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) \quad (s = 1, \ldots, n)$$

где функции ψ_{si}, при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ обращаются в частные производные от функции $F_s|_{\mu=0}$ в точке $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Полученную систему уравнений можно разрешить относительно $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой достаточно малой окрестности ε точки $x_1 = \ldots = x_n = \mu = 0$:

$$x_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\Delta_{si}}{\Delta}(F_s(x_1, \ldots, x_n; 0) - F_s(x_1, \ldots, x_n; \mu)) \tag{2.5}$$

где $\Delta = |\psi_{si}|$, а Δ_{si} — алгебраическое дополнение к ψ_{si}.

В этой ε-окрестности функции $|\Delta_{si}|$ меньше некоторой константы C_1, а $|\Delta|$ более некоторой константы C_2. Учитывая неравенство (2.2), из формулы (2.5) получаем оценку

$$|x_i(\mu)| < \frac{nC_1}{C_2} C |\mu| \tag{2.6}$$

в некоторой достаточно малой окрестности точки $\mu = 0$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим рядом с системой (2.1) систему уравнений

$$\Phi_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.7}$$

Допустим, что Φ_s — непрерывные функции x и μ в замкнутой области G_1, содержащей точку $x = \mu = 0$; в окрестности точки $x = \mu = 0$ система (2.7) допускает решение $x_s = x_s^*(\mu)$, где $x_s^*(0) = 0$.

Имеют место неравенства

$$|F_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) - \Phi_s(x_1, \ldots, x_n; \mu)| < C|\mu| \quad \text{в области } G_1 \tag{2.8}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Для решения $x_s^*(\mu)$ системы (2.7) в малой окрестности точки $\mu = 0$ имеет место оценка

$$|x_s^*(\mu) - x_s(\mu)| < CD|\mu| \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

где $x_s(\mu)$ — решение (2.3) системы уравнений (2.1), D — некоторое положительное число.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Систему уравнений (2.7) записываем в виде

$$F_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) = F_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) - \Phi_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.10}$$

Делаем замену переменных:

$$x_s = x_s(\mu) + z_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Тогда система (2.10) примет вид:

$$\Psi_s(z_1, \ldots, z_n; \mu) = F_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) - \Phi_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.11}$$

Здесь $\Psi_s(z_1, \ldots, z_n; \mu)$ — непрерывно дифференцируемые функции $z_1, \ldots, z_n$ такие, что $\Psi_s(0, \ldots, 0; \mu) = 0$.

Поэтому эту систему можно записать следующим образом:

$$z_1 \psi_{s1}(z_1, \ldots, z_n; \mu) + \ldots + z_n \psi_{sn}(z_1, \ldots, z_n; \mu) =$$
$$= F_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) - \Phi_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.12}$$

где ψ_{si} при $z = \mu = 0$ обращаются в частные производные от функций $F_s(x_1, \ldots, x_n; \mu)$ по $x_1, \ldots, x_n$ в точке $x_1 = \cdots = x_n = \mu = 0$, так как

$$\Psi_s(z_1, \ldots, z_n; \mu) \equiv F_s(x_1(\mu) + z_1, \ldots, x_n(\mu) + z_n; \mu)$$

Разрешая (2.12) относительно $z_1, \ldots, z_n$ в некоторой ε-окрестности точки $z = \mu = 0$, имеем

$$z_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\Delta_{si}}{\Delta} (F_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) - \Phi_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Учитывая неравенство (2.9), а также то, что ψ_{si} непрерывны в ε-окрестности точки $z = \mu = 0$, а $|\psi_{si}|$ отличен от нуля согласно условию (2) из (2.2), получаем неравенство (2.9), что и требовалось доказать.

§ 3. Доказательство сходимости последовательных приближений. Докажем, что последовательные приближения, метод построения которых приведен нами в § 1, сходятся при достаточно малом $|\mu|$ к искомому периодическому решению.

Эти приближения могут быть представлены в виде

$$x_s^{(l)} = M_1^{(l)} \varphi_{s1} + \ldots + M_m^{(l)} \varphi_{sm} + \mu L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)}) \tag{3.1}$$

Здесь L_s — операторы, дающие частное периодическое решение системы (1.6): $f_s^{(i)} = f_s(t, x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}) \quad (i = 1, \ldots, n)$

Операторы L_s, как установил И. Г. Малкин, обладают следующими свойствами:

(а) операторы линейны, т. е. если F_s и Φ_s — две системы функций от x, а C — постоянная, то

$$L_s(t, F_1 + \Phi_1, \ldots, F_n + \Phi_n) = L_s(t, F_1, \ldots, F_n) + L_s(t_1, \Phi_1, \ldots, \Phi_n)$$
$$L_s(t, CF_1, \ldots, CF_n) = CL_s(t, F_1, \ldots, F_n) \tag{3.2}$$

(б) если выполняются неравенства $|F_s| < A$, где A — некоторая постоянная, то будут выполняться неравенства

$$|L_s| < BA \tag{3.3}$$

где B — тоже постоянная, не зависящая от того или иного частного выбора функций F_s.

Введем обозначения

$$\xi_s^{(l)}(M_1,\ldots,M_m t)=M_1\varphi_{s1}+\ldots+M_m\varphi_{sm}+\mu L_s(t,f_1^{(l-1)},\ldots,f_n^{(l-1)})$$

$$P_i^{(l)}(M_1,\ldots,M_m\mu)=\sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi} f_s(t,\xi_1^{(l)},\ldots,\xi_n^{(l)})\psi_{si}dt \tag{3.4}$$

$$(s=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,m;\ l=1,2,\ldots)$$

Тогда уравнения, определяющие произвольные постоянные $M_i^{(l)}$, можно представить в виде

$$P_i^{(l)}(M_1^{(l)},\ldots,M_m^{(l)})=0 \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{3.5}$$

так как, очевидно,

$$x_s^{(l)}=\xi_s^{(l)}(t,M_1^{(l)},\ldots,M_m^{(l)}) \tag{3.6}$$

При достаточно малом $|\mu|$ все величины $x_s^{(l)}$ лежат в области G. Допустим, что это условие выполнено для $x_s^{(0)},\ldots,x_s^{(l-1)}$, и покажем, что тогда оно будет выполняться и для $x_s^{(l)}$. На основании (3.3) имеем

$$|L_s(t,f_1^{(l-1)},\ldots,f_n^{(l-1)}|<BA \tag{3.7}$$

где через A обозначен верхний предел функции f_s в области G.

Далее возьмем число h настолько малым, чтобы при выполнении

$$|M_i-M_i^{(0)}|\leqslant h \tag{3.8}$$

величины $M_1\varphi_{s1}+\ldots+M_m\varphi_{sm}$ лежали в области G. Это можно обеспечить, так как по предположению порождающее решение расположено в области G. Теперь можно указать число $\eta>0$ такое, что при $|\mu|\leqslant\eta$ величины $\xi_s^{(l)}$ будут лежать в области G, если M_i удовлетворяют неравенствам (3.8). Потребуем теперь, чтобы при выполнении $|\mu|\leqslant\eta$ корни уравнений (3.5) лежали в области (3.8). Последнее можно обеспечить на основании положения, доказанного в § 2. Оценим для этого разности $P_i^{(l)}-P_i^{(0)}|$. Имеем

$$|P_i^{(l)}-P_i^{(0)}|=\left|\sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi} f_s(t,\xi_1^{(l)},\ldots,\xi_n^{(l)})\psi_{si}dt-\sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi} f_s(t\,\xi_1^{(0)},\ldots,\xi_n^{(0)})\psi_{si}dt\right|<$$

$$<\sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi}K\{|\xi_1^{(l)}-\xi_1^{(0)}|+\ldots+|\xi_n^{(l)}-\xi_n^{(0)}|\}\,dt$$

где K — постоянная в условиях Липшица для функций f_s. Далее имеем

$$|P_i^{(l)}-P_i^{(0)}|<K|\mu|\sum_{s=1}^{n}|L_s(t,f_1^{(l-1)},\ldots,f_n^{(l-1)})dt|<KBA2\pi n^2|\mu|$$

Согласно лемме 1, доказанной в § 2, имеем оценку для всех $M_i^{(l)}$:

$$|M_i^{(l)}-M_i^{(0)}|<KABD2\pi n^2|\mu| \tag{3.9}$$

где D — некоторое положительное число, зависящее от вида $P_i^{(0)}$.

Если теперь выбрать η настолько малым, чтобы $DBKA2\pi n^2\eta<h$, то очевидно, что все $x_s^{(l)}$ при $|\mu|\leqslant\eta$ будут находиться в области G.

Заметим, что $M_i^{(l)}(\mu)$ и $x_s^{(l)}$ определены в области $|\mu| \leqslant \eta$, так как при достаточно малых h и η (не зависящих от номера l)

$$D^{(l)}(M_1 \ldots M_m, \mu) = |\partial P_i^{(l)} / \partial M_j| \neq 0$$

Переходим теперь к оценке разностей последовательных приближений. Прежде всего можем записать

$$|L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)}) - L_s(t, f_1^{(l-2)}, \ldots, f_n^{(l-2)})| < a_l, \quad |M_i^{(l)} - M_i^{(l-1)}| < b_l$$

где b_l и a_l — постоянные, для которых можно указать на основании предыдущих оценок некоторые верхние пределы, не зависящие от l. Далее, на основании (3.2) имеем

$$L_s(t, f_1^{(l)}, \ldots, f_n^{(l)}) - L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)}) = L_s(t, f_1^{(l)} - f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l)} - f_n^{(l-1)})$$

Но функции f_s удовлетворяют условиям Коши-Липшица; поэтому

$$|f_s^{(l)} - f_s^{(l-1)}| < K \sum_{\alpha=1}^{n} |x_\alpha^{(l)} - x_\alpha^{(l-1)}| \leqslant K \sum_{\alpha=1}^{n} \Big| \Big\{ \sum_{i=1}^{m} (M_i^{(l)} - M_i^{(l-1)}) \varphi_{\alpha i} +$$

$$+ \mu \Big[L_\alpha(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)}) - L_\alpha(t, f_1^{(l-2)}, \ldots, f_n^{(l-2)}) \Big] \Big\} \Big| < nR(mMb_l + a_l|\mu|)$$

где K — постоянная в условиях Коши-Липшица для функций f_s, а M — верхний предел функции $|\varphi_{si}|$. Далее

$$a_{l+1} > |L_s(t, f_1^{(l)}, \ldots, f_n^{(l)}) - L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)})$$

С другой стороны,

$$|L_s(t, f_1^{(l)}, \ldots, f_n^{(l)}) - L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)})| =$$

$$= |L_s(t, f_1^{(l)} - f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l)} - f_n^{(l-1)})| < BnK(mb_l + a_l|\mu|)$$

Полагаем

$$a_l = BnK(mb_l + a_l|\mu|) \tag{3.10}$$

Оценим разность $M_i^{(l+1)}(\mu) - M_i^{(l)}(\mu)$. Для этого воспользуемся оценкой

$$|P_i^{(l+1)}(M_1, \ldots, M_m; \mu) - P_i^{(l)}(M_1, \ldots, M_m; \mu)| =$$

$$= \Big| \sum_{s=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_s(t, \xi_1^{(l+1)}, \ldots, \xi_n^{(l+1)}) \psi_{si} dt -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_s(t, \xi_1^{(l)}, \ldots, \xi_n^{(l)}) \psi_{si} dt \Big| < \Big| \sum_{s=1}^{n} K \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(l+1)} - \xi_k^{(l)}| dt \Big| <$$

$$< K|\mu| \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} |L_k(t, f_1^{(l)}, \ldots, f_n^{(l)}) - L_k(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)})| < K|\mu| \, 2\pi n^2 a_{l+1}$$

Отсюда согласно лемме 2 имеем

$$|M_i^{(l+1)}(\mu) - M_i^{(l)}(\mu)| < K|\mu| \, 2\pi n^2 a_{l+1} D_1$$

где D_1 — положительное число.

Покажем, что D_1 можно считать не зависящим от номера l. В самом деле, из доказательства леммы 2 следует, что

$$D_1 \geqslant \frac{n \max |\Delta_{ij}^{(l)}|}{\min |\Delta^{(l)}|}$$

где Δ_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу $\partial P_i^{(l)} / \partial M_j$ в определителе $|\partial P_i^{(l)} / \partial M_j| = \Delta^{(l)}$. Легко установить, что

$$\frac{\partial P_i^{(l)}}{\partial M_j} = \sum_{s=1}^{n} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_s^{(l)}}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi^{(l-1)}}{\partial M_j} \psi_{si} dt = \sum_{s=1}^{n} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_s^{(l)}}{\partial \xi_k} \varphi_{kj} \psi_{si}\, dt$$

В силу непрерывности частных производных от f_s, непрерывности функций φ_{kj} и ψ_{si} производные $\partial P_i^{(l)} / \partial M_j$ ограничены числом, не зависящим от номера l. Поэтому и $|\Delta_{ij}^{(l)}|$ ограничены таким же числом. Так как согласно (3.7), (3.10) при достаточно малом $|\mu|$ траектория $x_s^{(l)}$ лежит в малой окрестности порождающего решения, которая не зависит от l и может быть сделана сколь угодно узкой, то $|\Delta^{(l)}(\mu) - \Delta^{(0)}|$ может быть сделано меньше $^1/_2 |\Delta^{(0)}|$. При этом $|\Delta^{(l)}(\mu)| > {}^1/_2 |\Delta^{(0)}|$. Таким образом, $|\Delta_{ij}^{(l)}|$ ограничены сверху, а $|\Delta^{(l)}|$ ограничен снизу числами, не зависящими от l. Поэтому D_1 можно считать не зависимым от l.

Итак, имеем окончательно

$$|M_i^{(l+1)}(\mu) - M_i^{(l)}(\mu)| < b_{l+1}, \qquad b_{l+1} = K 2\pi n^2 |\mu| a_{l+1} D_1 \qquad (3.11)$$

Из формулы (3.11) вытекает, что b_{l+1} / a_{l+1} не зависит от индекса l. Следовательно, можно считать, что и b_l / a_l тоже не зависит от l.

Но тогда и отношения b_{l+1} / b_l и a_{l+1} / a_l также не зависят от l, так как на основании (3.10)

$$\frac{a_{l+1}}{a_l} = nKB\left(mM \frac{b_l}{a_l} + |\mu|\right), \qquad \frac{b_{l+1}}{b_l} = D_1 K^2 n^3 2\pi B |\mu| \left(mM + \frac{|\mu| a_l}{b_l}\right) \qquad (3.12)$$

Так как (3.11) b_l / a_l содержит множитель $|\mu|$, то из (3.12) вытекает, что при достаточно малом $|\mu|$ отношения a_{l+1} / a_l и b_{l+1} / b_l будут меньше единицы. Отсюда следует, что при достаточно малом $|\mu|$ последовательности $L_s(t, f_1^{(l)}, \ldots, f_n^{(l)})$ и $M_i^{(l)}$ равномерно сходятся.

Следовательно, последовательность функции $x_s^{(l)}$ также равномерно сходится к некоторым функциям x_s. Так как все функции $x_s^{(l)}$ периодические, то и функции x_s будут также периодическими. Легко показать, что эти функции удовлетворяют уравнениям (1.1) и, стало быть, составляют искомое периодическое решение, что и требовалось доказать.

Поступила 27 XII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. К теории колебаний квазилинейных систем со многими степенями свободы. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.
2. Малкин И. Г. Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности. ПММ, т. XIV, вып. 1, 1950.
3. Малкин И. Г. К теории периодических решений Пуанкаре. ППМ, т. XIII, вып. 6, 1949.