Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПОВЕДЕНИИ В ЦЕЛОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

§ 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \tag{1.1}$$

где функции X, Y имеют непрерывные частные производные первого порядка при всех значениях x, y; кроме того, $X(0, 0) = 0$, $Y(0, 0) = 0$.

Известно, что в случае линейных функций X, Y поведение интегральных кривых (1.1) на всей плоскости xy определяется характером корней λ_1, λ_2 уравнения

$$\begin{vmatrix} \partial X / \partial x - \lambda & \partial X / \partial y \\ \partial Y / \partial x & \partial Y / \partial y - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2}$$

Цель настоящей заметки — показать, что и при нелинейных функциях X, Y в ряде случаев можно судить о поведении траекторий (1.1) по корням $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$ уравнения (1.2).

§ 2. При решении вопросов устойчивости в большом [1] представляет интерес оценка области устойчивости (в случае, когда нет устойчивости в целом). Обозначим

$$m(r) = \min\left(\sqrt{X^2(x, y) + Y^2(x, y)}\right) \quad \text{при } x^2 + y^2 = r^2 \tag{2.1}$$

$$N = \max\left(\sqrt{X^2 + Y^2}\right) \quad \text{на окружности } x^2 + y^2 = R^2$$

Теорема 2.1. Для того чтобы окружность

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{2.2}$$

лежала внутри области притяжения G_0 точки $x = 0$, $y = 0$, достаточно, чтобы уравнение (1.2) имело корни с отрицательными вещественными частями в области

$$x^2 + y^2 \leqslant R_1^2 \tag{2.3}$$

где число R_1 удовлетворяет неравенству

$$\int_R^{R_1} m(r)\, dr > 2\pi R N \tag{2.4}$$

Доказательство. Условия теоремы обеспечивают асимптотическую устойчивость решения $x = y = 0$ по Ляпунову [2]. Пусть теорема неверна, т. е. в области $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ есть точки, лежащие на границе области притяжения G_0. Граница открытой области G_0 состоит из целых траекторий [3]. Рассмотрим точку p на граница G_0, ближайшую к началу координат. (Такая точка существует, так как граница G_0 есть замкнутое множество.) Рассмотрим траекторию $f(p, t)$ системы (1.1). Предположим сначала, что $f(p,t)$ при $t>0$ не выходит из круга (2.3). Тогда ω—предельное множество L траектории $f(p,t)$ содержит устойчивую по Пуассону траекторию, т. е. либо замкнутую кривую, либо особую точку [4]. Однако всякая особая точка q, лежащая в круге (2.3), асимптотически устойчива, так как при условиях теоремы система первого приближения в такой точке q имеет характеристические корни с отрицательными вещественными частями. Граничная для G_0 точка p не может принадлежать области притяжения точки q, поэтому L не может содержать особых точек. Существование периодических траекторий в области (2.3) исключается признаком Бендиксона, так как при условиях теоремы

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}<0 \qquad \text{при} \quad x^2+y^2\leqslant R_1^2 \tag{2.5}$$

Итак, следует рассмотреть лишь случай, когда $f(p,t)$ при $t>0$ выходит из круга (2.3). Рассмотрим отрезок op (фиг. 1). Вследствие непрерывности траектории (1.1), пересекающие op при $t=0$ вблизи точки p, частично лежат вне круга (2.3) при $t>0$. Пусть p_1 — граница множества таких точек n, лежащих на op, для которых $f(n,t)$ частично лежат вне (2.3) при $t>0$. Очевидно, траектория $f(p_1,t)$ касается в некоторой точке p_3 окружности (2.3), не выходя из нее при $t>0$.

В области H (фиг. 1) нет особых точек системы (1.1). Действительно, в противном случае внутри H была бы траектория (1.1), ограничивающая область притяжения особой точки, лежащей в H. Так как эта граничная траектория не принадлежит области притяжения $x=0$, $y=0$, она не может пересечь отрезок op_1. Невозможность существования таких граничных траекторий в конечной части плоскости доказана выше.

Рассмотрим траекторию $f^*(p_3,t)$, ортогональную (1.1). Координаты $f^*(p_3,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx^*}{dt}=-Y(x^*,y^*) \qquad \frac{dy^*}{dt}=X(x^*,y^*) \tag{2.6}$$

Траекторию $f^*(p_3,t)$ можно продолжить внутри H до пересечения с дугой $p_2p_5p_4$. Действительно, лежать целиком внутри H вне (2.2) полутраектория $f^*(p_3,t)$ не может. Особые точки системы (1.1) и (2.6) совпадают, поэтому внутри H нет особых точек системы (2.6). Если предположить, что внутри H есть замкнутые траектории (2.6), то внутри таких замкнутых траекторий должны содержаться особые точки (1.1), так как траектории (1.1) пересекают кривые (2.6) все время в одном направлении. Вычислим интеграл

$$J=\oint_l X\,dy-Y\,dx \tag{2.7}$$

где l — контур $p_5p_3p_2$, проходимый против часовой стрелки. Вдоль отрезка p_5p_3 траектории $f^*(p_3,t)$ имеем

$$\int_{p_5p_3} X\,dy-Y\,dx=\int_{t_5}^{t_3}(X^2+Y^2)\,dt=\int_{S_5}^{S_3}\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)ds \tag{2.8}$$

где ds — дифференциал дуги $f^*(p_3, t)$. Вследствие очевидного неравенства $ds \geqslant dr$ должно быть

$$\int\limits_{p_5 p_3} X\,dy - Y\,dx \geqslant \int\limits_{R}^{R_1} m(r)\,dr > 2\pi RN \tag{2.9}$$

Вдоль дуги $p_2 p_3$ имеем оценку

$$\left| \int\limits_{p_2 p_5} X\,dy - Y\,dx \right| < 2\pi RN \tag{2.10}$$

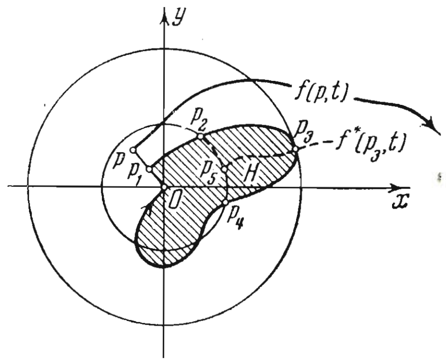
Вдоль $p_2 p_3$ интеграл равен нулю.

Сравнивая (2.9) и (2.10), получим

$$J > 0 \tag{2.11}$$

что вследствие

$$\oint\limits_{l} X\,dy - Y\,dx = \iint\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx\,dy \tag{2.12}$$



Фиг. 1

противоречит (2.5). Противоречие доказывает теорему. Следствием теоремы 2.1 является следующая теорема.

Теорема 2.2. Если во всех точках плоскости xy корни $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$ уравнения (1.2) имеют отрицательные действительные части и

$$\int\limits_{0}^{\infty} m(r)\,dr = \infty \tag{2.13}$$

то решение $x = y = 0$ уравнений (1.1) устойчиво в целом. Следствием теоремы 2.2. является следующий факт. Рассмотрим функции

$$u = X(x, y), \quad v = Y(x, y) \tag{2.14}$$

Если собственные числа $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$ матрицы Якоби для (2.14) на всей плоскости xy имеют отрицательные действительные части и

$$\lim m(r) = \infty \quad \text{при } r \to \infty \qquad (2.15$$

то функции X, Y осуществляют взаимно однозначное отображение всей плоскости xy на всю плоскость uv.

Действительно, если предположить, что в двух различных точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) функции u, v имеют равные значения $u = u_0$, $v = v_0$, то придем к противоречию с теоремой 2.2, так как система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y) - u_0, \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) - v_0 \tag{2.16}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2. Пусть существует точка (u_0, v_0), лежащая на границе той области uv, на которую функции (2.14) отображают плоскость xy. Выберем последовательность точек $u_k(x_k, y_k)$, $v_k(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к точке (u_0, v_0).

Последовательность точек (x_k, y_k) вследствие (2.15) ограничена и имеет предельную точку (x_0, y_0). Функции (2.14) отображают окрестность точки (x_0, y_0) на окрестность точки (u_0, v_0). Противоречие доказывает теорему.

Заметим, что условия, наложенные на функции X, Y, можно несколько ослабить. Докажем сначала теорему, являющуюся некоторым обобщением теоремы об устойчивости по первому приближению.

Пусть функции X, Y не дифференцируемы по одной переменной (например, по x), а по другой переменной (y) имеют в окрестности начала координат $x=0$, $y=0$ непрерывные производные первого порядка. Кроме того, предполагается, что верхние и нижние производные по x функции X, Y конечны в точке $x=0$, $y=0$.

Теорема 2.3. Для того чтобы решение $x=y=0$ системы (1.1) было асимптотически устойчивым по Ляпунову, достаточно, чтобы корни λ_1, λ_2 всех уравнений, которые получаются из (1.2) заменой $\partial X / \partial x$, $\partial Y / \partial x$ на верхние и нижние производные функций X, Y по x, в точке $x=0$, $y=0$ имели отрицательные действительные части[1].

Доказательство. При условиях теоремы систему (1.1) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = X(x,0) + ay + R_1(x,y) \qquad (a = \mathrm{const})$$
$$\frac{dy}{dt} = Y(x,0) + by + R_2(x,y) \qquad (b = \mathrm{const}) \tag{2.17}$$

где функции $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$ имеют в начале координат порядок малости выше первого, а функции $X(x,0)$, $Y(x,0)$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{X(x,0)}{x} + b < -3\varepsilon, \qquad \left(\frac{X(x,0)}{x} + \varepsilon\right)(b+\varepsilon) - a\frac{Y(x,0)}{x} > \varepsilon \quad (x \neq 0) \tag{2.18}$$

где ε — достаточно малое положительное число.

Пусть $a \neq 0$. В этом случае для доказательства теоремы достаточно заметить, что определенно положительная функция

$$2v(x,y) = 2\int_0^x F(x)\,dx + (ay - (b+\varepsilon)x)^2 \tag{2.19}$$

где $F(x) = (X(x,0) + \varepsilon x)(b+\varepsilon) - aY(x,0)$, удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [2]. Действительно,

$$\frac{dv}{dt} = F(x)\varphi(x) - \varepsilon x F(x) - \varepsilon(ay - (b+\varepsilon)x)^2 + F(x)R_1(x,y) +$$
$$+ (b+\varepsilon)((b+\varepsilon)x - ay)R_1(x,y) + a(ay - (b+\varepsilon)x)R_2(x,y) \tag{2.20}$$

где $\varphi(x) = X(x,0) + (b+2\varepsilon)x$, и вследствие (2.18) dv/dt есть определенно отрицательная функция в достаточно малой окрестности начала.

В случае $a=0$ функцией Ляпунова для системы (2.17) служит функция $u(x,y) = Mx^2 + y^2$, где M — достаточно большое положительное число. Теорема доказана.

Используя теорему 2.3 и формулу стр. 466 из статьи [5], можно аналогично предыдущему доказать теоремы, являющиеся обобщением теорем этого параграфа на случай, когда функции X, Y не дифференцируемы по x. При этом для наличия устойчивости достаточно [кроме условий (2.4) или (2.13)], чтобы все уравнения, получающиеся из (1.2) заменой

---

[1] Как следует из примера, приведенного в статье [4], в случае, если по крайней мере одна из функций X, Y не имеет производных по обеим переменным x, y, утверждение, подобное теореме 2.3, неверно.

$\partial X / \partial x$, $\partial Y / \partial x$ на верхние и нижние производные функций X, Y по x, имели корни $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x,y)$ с отрицательными вещественными частями. Аналогичным образом указанные факты можно обобщить на случай, когда функции X и Y не дифференцируемы соответственно по x и по y.

§ 3. В этом параграфе предполагается, что система (1.1) не имеет особых точек, отличных от начала координат.

Теорема 3.1. Если в точке $x = 0$, $y = 0$ уравнение (1.2) имеет корни с положительными вещественными частями, а вне некоторого круга

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{3.1}$$

действительные части этих корней отрицательны и выполняется условие (2.13), то система уравнений (1.1) имеет по крайней мере одну устойчивую периодическую траекторию.

Доказательство. При условиях теоремы точка $x = y = 0$ является особой точкой отталкивательного типа. Область отталкивания G_0 этой точки не охватывает всей плоскости. Предположим противное. Обозначим

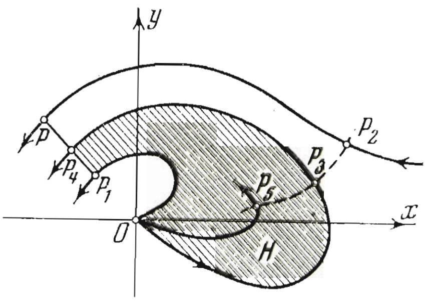
$$M = \max \left| \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right| \quad \text{при } x^2 + y^2 \leq R^2 \tag{3.2}$$

Выберем точку $q(x_q, y_q)$ такую, чтобы

$$\int_0^{R_q} m(r)\, dr > 2\pi R^2 M \qquad (R_q{}^2 = x_q{}^2 + y_q{}^2) \tag{3.3}$$

Тогда траекторию $f^*(q, t)$ системы (2.6) можно продолжить до такой точки q_1, чтобы вдоль дуги qq_1 траектории $f^*(q, t)$

$$\int_{qq_1} X\, dy - Y\, dx > 2\pi R^2 M \tag{3.4}$$



Фиг. 2

Траектории $f(q, t)$ и $f(q_1, t)$ по предположению примыкают к точке $x = 0$, $y = 0$ при $t \to -\infty$. Вычислим интеграл (2.7) по контуру l, образованному дугами $f(q, t)$, $f(q_1, t)$ при $t < 0$ и дугой qq_1 траектории $f^*(q, t)$. Вдоль $f(q, t)$ и $f(q_1, t)$ интеграл равен нулю и по этому вследствие (3.4) будет

$$\oint_l X\, dy - Y\, dx > 2\pi R^2 M \tag{3.5}$$

Вычисляя интеграл (2.7) по формуле (2.12), учитывая (3.2) и тот факт, что вне круга (3.1) выполняется условие (2.5), получим оценку

$$\oint_l X\, dy - Y\, dx < 2\pi R^2 M \tag{3.6}$$

Противоречие показывает, что G_0 не охватывает всей плоскости xy. Рассмотрим траекторию $f(p, t)$ на границе G_0. Пусть $f(p, t)$ не ограничена при $t \to -\infty$. На нормали к $f(p, t)$ в точке p отложим отрезок pp_1, где p_1 лежит внутри G_0 столь малой длины ε, чтобы траектории (1.1) пересекали pp_1 в одном направлении. Пусть $N = \max(\sqrt{X^2 + Y^2})$ на pp_1.

Так как p_1 принадлежит области G_0, то $f(p_1, t) \to 0$ при $t \to -\infty$. Обозначим $R_1^2 = \max(x(p_1, t)^2 + y(p_1, t)^2)$ при $t < 0$. Вследствие (2.13) на $f(p, t)$ существует точка $p_2(x_{p_2}, y_{p_2})$ такая, что

$$\int_{R_1}^{R_{p_2}} m(r)\,dr > 2\pi R^2 M + N\varepsilon \qquad (R_{p_2}{}^2 = x_{p_2}{}^2 + y_{p_2}{}^2) \tag{3.7}$$

Рассмотрим траекторию $f^*(p_2, t)$ системы (2.6). На $f^*(p_2, t)$ выберем точку p_3 в области G_0. Точку p_3 можно выбрать так, что положительная полутраектория $f(p_3, t)$ пересечет pp_1 в некоторой точке p_4 (фиг. 2) и число R_{p_3} удовлетворяло (3.7)

Область H лежит внутри G_0. Действительно, пусть внутри H есть траектория $f(m, t)$, граничная для G_0. Отрицательная полутраектория $f(m, t)$ лежала бы в ограниченной области H, т. е. α — предельное множество $f(m, t)$ — содержало бы предельный цикл или особую точку системы (1.1), что невозможно. Продолжим траекторию $f^*(p_2, t)$ за точку p_3 внутри H до такой точки p_5, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{p_3 p_5} X\,dy - Y\,dx > 2\pi R^2 M + N\varepsilon \tag{3.8}$$

что возможно вследствие выбора точки p_2 (3.7) и p_3 вблизи p_2.

Вычисляя интеграл (2.7) по контуру l op_3p_5o и учитывая оценки (3.2), (3.8) и (2.5), как и выше, придем к противоречию с (2.12). Это противоречие показывает, что рассматриваемая траектория $f(p, t)$ ограничена при $t < 0$ (в случае, если $f(p_3, t)$ при $t < 0$ пересекает p_1p_4 в точке p_6, интеграл (2.7) следует вычислить по контуру $op_1p_6p_3p_5o$). Следовательно, α — предельное множество $f(p, t)$ содержит устойчивую по Пуассону траекторию, т. е. в данном случае периодическую траекторию.

Итак, существует по крайней мере одна периодическая траектория. Применяя аналогично предыдущему интеграл (2.7), условие (2,13) и формулу (2.12), можно показать, что существует замкнутая траектория L системы (1.1), охватывающая все остальные возможные периодические траектории (1.1), и всякая траектория, лежащая вне L, приближается к этой траектории по спирали при $t \to \infty$. Таким образом, на плоскости xy существует кольцевая область такая, что все траектории (1.1) пересекают границы этой области снаружи внутрь. Этого достаточно для существования устойчивой периодической траектории.

Поступила 5 IX 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования двигателей. Гостехиздат, 1952.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, М. — Л., 1952.
3. Еругин Н. П. Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
4. Красовский Н. Н. Об устойчивости в целом решений системы двух уравнений. ПММ, т. XVII, вып. 6, 1953.
5. Еругин Н. П. Некоторые вопросы устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. ПММ, т. XV, вып. 5, 1950.