Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

А. А. Лебедев

(Москва)

Рассматривается задача об устойчивости движения на заданном интервале времени, конечном или бесконечном, для общего случая неустановившегося движения. Основным методом решения этой задачи служит второй метод Ляпунова[1].

При постановке задачи были использованы работы [2, 3].

1. Постановка задачи. Пусть задача об устойчивости движения какой-либо материальной системы приведена к исследованию n неизвестных вещественных функций $x_i(t)$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений возмущенного движения вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t)\,x_1 + \ldots + p_{in}(t)\,x_n + X_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь $p_{ij}(t)$ представляют собой вещественные, непрерывные и ограниченные функции времени t, а $X_i(t, x_1, \ldots, x_n)$—обладающие такими же свойствами функции времени t и возмущений $x_i(t)$, имеющие порядок малости выше первого относительно возмущений x_i и обращающиеся в нуль, когда все x_i равны нулю.

Предположим, что функции X_i таковы, что для каждой системы начальных возмущений x_{i0} уравнения (1.1) допускают единственное решение. Пусть все эти предположения относительно правых частей уравнений возмущенного движения (1.1) выполняются в области

$$T_1 \leqslant t \leqslant T_2, \qquad |x_i| \leqslant h \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

где $T_1 \neq T_2$ и $h \neq 0$ суть постоянные[1], причем h предполагается всегда достаточно малой.

Пусть вещественная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ вещественных переменных $t, x_1, \ldots, x_n$ является знакоопределенной при условиях (1.2). Тогда замкнутая подвижная поверхность $V(t, x_1, \ldots, x_n) = c$ ограничивает в каждый момент времени в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ некоторую область $V(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant c$, содержащую в себе начало координат.

При решении вопроса об устойчивости движения на конечном интервале времени недостаточно потребовать, чтобы возмущения $x_i(t)$ были на этом интервале времени ограниченными. Это условие на конечном интервале времени выполняется всегда. Вместе с тем представляет интерес оценка величин возмущений $x_i(t)$ по сравнению с начальными возмущениями $x_{i0} = x_i(t_0)$.

---

[1] В частном случае, когда рассматривается неограниченный интервал времени $[T_1, \infty)$, величина T_2 предполагается бесконечно большой.

Чтобы задача об устойчивости на конечном интервале времени стала определенной, необходимо задать требуемую область изменения возмущений $x_i(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T_2$ $(T_1 \leqslant t_0 < T_2)$. Эту область зададим, пользуясь знакоопределенной функцией $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, следующим образом.

На интервале времени $[t_0, T]$ точка $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, соответствующая решению уравнений возмущенного движения, должна находиться в области

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant A \tag{1.3}$$

Число A зададим так, чтобы при $t = t_0$ точка $(x_{10}, \ldots, x_{n0})$, отвечающая начальным возмущениям, лежала на поверхности

$$V(t_0, x_1, \ldots, x_n) = V(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) = A \tag{1.4}$$

Однако число A уже не может характеризовать размеры области (1.3), так как эта область изменяется со временем. Поэтому введем понятие диаметра области (1.3); так назовем точную верхнюю границу расстояний между любыми двумя точками этой области. Величину области (1. 3) будем оценивать величиной ее диаметра $D(t)$. В частном случае диаметр области (1.3) может быть неизменным и равным диаметру при $t = t_0$. В общем же случае возможно задание области (1.3) на интервале $[t_0, T_2]$ так, что ее диаметр является некоторой ограниченной функцией времени.

Определение. Пусть на интервале времени $[t_0, T]$, конечном или бесконечном, неравенством (1.3), где A — достаточно малое число, задана область переменных $x_1, \ldots, x_n$, диаметр которой — известная ограниченная функция времени.

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что при всяких начальных возмущениях x_{i0}, удовлетворяющих условию $V(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) = A$, возмущения $x_i(t)$ на интервале времени $[t_0, T]$ удовлетворяют неравенству (1.3), то невозмущенное движение по отношению к области (1.3) устойчиво на данном интервале времени; в противном случае неустойчиво на этом интервале по отношению к области (1.3).

Назовем устойчивость движения по отношению к области (1.3) монотонной на интервале $[t_0, T]$, если на этом интервале интегральные кривые пересекают поверхности $V(t, x_1, \ldots, x_n) = c$ только снаружи во внутрь.

Понятие о монотонной устойчивости характеризует поведение интегральных кривых относительно подвижных замкнутых поверхностей $V = c$. В тех случаях, когда исследуется устойчивость по отношению к области $V \leqslant A$, диаметр которой постоянен или уменьшается на интервале времени $[t_0, T]$, монотонная устойчивость указывает на то, что интегральные кривые на этом интервале времени приближаются к началу координат $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

В тех случаях, когда исследуется устойчивость по отношению к области $V \leqslant A$, диаметр которой с течением времени возрастает, может оказаться, что при наличии монотонной устойчивости интегральные кривые, пересекая каждую из поверхностей $V = c$ снаружи внутрь, будут удаляться от начала координат $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Однако при этом будет увеличиваться и расстояние между поверхностью $V = A$ и точками $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ решения уравнений возмущенного движения.

Назовем устойчивость движения по отношению к области $V(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \leqslant A$, заданной на интервале времени $[T_1, T_2]$, равномерной на этом интервале, если невозмущенное движение устойчиво по отношению к этой области на любом отрезке $[t_0, T_2]$, где $T_1 \leqslant t_0 < T_2$.

В настоящей работе даются по уравнениям первого приближения условия устойчивости на данном интервале времени для тех случаев, когда область (1.3) задается квадратичной формой $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами, зависящими определенным образом от коэффициентов $p_{ij}(t)$ системы уравнений (1.1). При этом предполагается, что уравнение, представленное определителем n-го порядка

$$| p_{ij}(t) - \varkappa(t) \delta_{ij} | = 0 \qquad (\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j, \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j) \tag{1.5}$$

ни в один момент времени $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$ не имеет кратных корней[1] $\varkappa_i(t)$.

В тех же случаях, когда требуется исследовать устойчивость движения по отношению к области (1.3), заданной через функцию $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ произвольного вида, решение вопроса об устойчивости может основываться на следующем предложении. Если на данном интервале времени $V_1(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant V_2(t, x_1, \ldots, x_n)$ и $V_1(t_0, x_1, \ldots, x_n) = V_2(t_0, x_1, \ldots, x_n)$ при $t = t_0$, то невозмущенное движение, устойчивое по отношению к области $V_1(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant A$, будет устойчивым также и по отношению к области $V_2(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant A$.

2. Преобразование уравнений возмущенного движения. Применим к системе уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t) x_1 + \ldots + p_{in}(t) x_n + X_i(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

линейное преобразование

$$y_i = \varphi(t) [a_{i1}(t) x_1 + \ldots + a_{in}(t) x_n] \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

обладающее следующими свойствами при $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$:

(1) все функции $a_{ij}(t)$ и $\varphi(t)$, а также их производные по времени являются вещественными, непрерывными и ограниченными функциями;

(2) определитель, составленный из функций $a_{ij}(t)$, не равен нулю;

(3) $\varphi(t) \neq 0$ — положительная функция.

Тогда коэффициенты $b_{ij}(t) / \varphi(t)$ обратного преобразования

$$x_i = \frac{1}{\varphi(t)} [b_{i1}(t) y_1 + \ldots + b_{in}(t) y_n] \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

будут также вещественными, непрерывными и ограниченными функциями времени. Дифференцируя (2.2), получим

$$\frac{dy_i}{dt} = \varphi \left(a_{i1} \frac{dx_1}{dt} + \ldots + a_{in} \frac{dx_n}{dt} \right) + \\ + \left(\frac{d\varphi}{dt} a_{i1} + \varphi \frac{da_{i1}}{dt} \right) x_1 + \ldots + \left(\frac{d\varphi}{dt} a_{in} + \varphi \frac{da_{in}}{dt} \right) x_n \tag{2.4}$$

---

[1] Случай, когда это уравнение имеет кратные корни, будет рассмотрен особо.

Выражения

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d\varphi}{dt}a_{ik}+\varphi\frac{da_{ik}}{dt}\right)x_k$$

в этих уравнениях преобразованием (2.3) приводятся к виду:

$$Q_i(t, y_j) = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{in}y_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

где

$$q_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d\ln\varphi}{dt}a_{ik} + \frac{da_{ik}}{dt}\right)b_{kj} \tag{2.6}$$

Введем обозначение $\psi(t) = d\ln\varphi(t)/dt$. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \delta_{ij} \tag{2.7}$$

то

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\frac{da_{ik}}{dt}b_{kj} + \psi\delta_{ij} \tag{2.8}$$

Функции $a_{ij}(t)$ выберем таким образом, чтобы в каждый момент времени имело место равенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(p_{k1}x_1 + \ldots + p_{kn}x_n) = \varkappa_i\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k \tag{2.9}$$

Пусть уравнение

$$|p_{ij}(t) - \varkappa(t)\delta_{ij}| = 0 \tag{2.10}$$

которое будем называть характеристическим, имеет только различные корни, среди которых m вещественных корней $\varkappa_j(t)$ и 2σ комплексных корней $\lambda_s(t) \pm i\mu_s(t)$. Тогда система уравнений (2.1) преобразованием (2.2) приводится на интервале времени $[T_1, T_2]$ в пространстве вещественных переменных к виду:

$$\begin{aligned} &\frac{dy_j}{dt} = \varkappa_j y_j + Q_j + Y_j \qquad (j = 1, \ldots, m) \\ &\frac{dy_s}{dt} = \lambda_s y_s - \mu_s y_{\sigma+s} + Q_s + Y_s \\ &\qquad\qquad (s = m+1, \ldots, n-\sigma) \\ &\frac{dy_{\sigma+s}}{dt} = \lambda_s y_{\sigma+s} + \mu_s y_s + Q_{\sigma+s} + Y_{\sigma+s} \end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$Y_i(t, y_j) = \varphi(a_{i1}X_1 + \ldots + a_{in}X_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.12}$$

3. Построение функций Ляпунова. Рассмотрим определенно-положительные функции вида

$$V = y_1^2 + \ldots + y_n^2 = \varphi^2\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)^2 \tag{3.1}$$

и их производные dV/dt, составленные в силу уравнений возмущенного движения (2.1). При этом будем предполагать, что коэффициенты $\varphi(t)a_{ij}(t)$ преобразования (2.2) выбраны таким образом, что система уравнений (2.1) приводится к виду (2.11).

Найдем диаметр области переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$\varphi^2 \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n)^2 \leqslant A \tag{3.2}$$

Для этого квадратичную форму

$$\sum_{s,t=1}^{n} \alpha_{st} x_s x_t = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n)^2 \tag{3.3}$$

элементы матрицы которой имеют вид:

$$\alpha_{st}(t) = a_{1s} a_{1t} + \ldots + a_{ns} a_{nt} \tag{3.4}$$

ортогональным преобразованием приведем к сумме квадратов.

Пусть $\gamma_i(t)$ — корни характеристического уравнения матрицы квадратичной формы (3.3)

$$|\alpha_{st} - \gamma\delta_{st}| = 0 \tag{3.5}$$

Тогда ортогональным преобразованием (3.1) приводится к виду:

$$V = \varphi^2 (\gamma_1 \xi_1^2 + \ldots + \gamma_n \xi_n^2) \tag{3.6}$$

Следовательно, диаметр области (3.2) равен

$$D(t) = \frac{2}{\varphi(t)} \sqrt{\frac{A}{\gamma_{\min}(t)}} = D(t_0) \frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t)} \sqrt{\frac{\gamma_{\min}(t_0)}{\gamma_{\min}(t)}} \tag{3.7}$$

где $\gamma_{\min}(t)$ — наименьший в любой момент времени корень уравнения (3.5).

Системе уравнений (2.1) соответствует бесчисленное множество определенно-положительных функций вида (3.1). Каждая из них определяется n произвольными коэффициентами $\varphi(t) a_{ik_i}(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ преобразования (2.2), так как функции $a_{i1}(t), \ldots, a_{in}(t)$ определяются из системы однородных линейных уравнений с точностью до произвольного множителя $a_i(t)$.

В дальнейшем будем предполагать, что в преобразовании (2.2) n произвольных функций a_{ik_i} представляют собой постоянные величины. В этом случае функции $a_{ij}(t)$ (с точностью до n постоянных множителей) определяются только коэффициентами $p_{ij}(t)$ в уравнениях (2.1), причем $\gamma_{\min}(t)$ также зависит только от этих коэффициентов $p_{ij}(t)$.

Найдем выражение для производной dV/dt, составленной в силу уравнений (2.1). При вычислении этой производной воспользуемся преобразованием (2.2). Тогда получим

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \varkappa_j y_j^2 + \sum_{s=m+1}^{m+\sigma} \lambda_s (y_s^2 + y^2_{\sigma+s}) + \sum_{i,k=1}^{n} q_{ik} y_i y_k + \sum_{i=1}^{n} y_i Y_j \tag{3.8}$$

Это выражение может быть представлено таким образом:

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = H + S, \qquad H = \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} y_i y_k, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} y_i Y_i \tag{3.9}$$

Здесь $H(t, y_i)$ — квадратичная форма переменных y_i с ограниченными и непрерывными относительно t коэффициентами, а $S(t, y_i)$ — непрерывная функция переменных y_i и времени t, удовлетворяющая неравенству

$$|S| < k(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \tag{3.10}$$

где k — достаточно малая постоянная.

Матрица $\| h_{ik} \|$ квадратичной формы H может быть вычислена как сумма матриц:

$$\| h_{ik} \| = \| e_{ik} \| + \| f_{ik} \| + \| \psi \delta_{ik} \| \tag{3.11}$$

Матрица $\| e_{ik} \|$ является диагональной матрицей:

$$\begin{Vmatrix} \varkappa_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \varkappa_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots \lambda_\sigma \end{Vmatrix} \tag{3.12}$$

ненулевые элементы которой — вещественные корни $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ и вещественные части $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ комплексных корней характеристического уравнения (2.10).

Элементы же матрицы $\| f_{ik} \|$ выражаются формулой

$$f_{ik}(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{da_{is}}{dt} b_{sk} + \frac{da_{ks}}{dt} b_{si} \right) \tag{3.13}$$

В дальнейшем для сокращения изложения введем матрицу

$$\| c_{ik} \| = \| e_{ik} \| + \| f_{ik} \| \tag{3.14}$$

Выведем условия неположительности и отрицательной определенности квадратичной формы H, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Характеристическое уравнение матрицы квадратичной формы H

$$| c_{ik} + (\psi - \rho) \delta_{ik} | = 0 \tag{3.15}$$

имеет n корней $\rho_i(t)$, являющихся вещественными непрерывными функциями t. Корни этого уравнения могут быть представлены в виде

$$\rho_i(t) = \psi(t) - \psi_{*i}(t) \tag{3.16}$$

где $\psi_{*i}(t)$ — корень уравнения

$$| c_{ik} + \psi_{*i} \delta_{ik} | = 0 \tag{3.17}$$

Все n корней $\psi_{*i}(t)$ уравнения (3.17) представляют тобой вещественные непрерывные функции коэффициентов $p_{ij}(t)$ системы (2.1).

Как известно квадратичная форма H является на данном интервале времени определенно-отрицательной тогда и только тогда, когда на этом интервале все корни $\rho_i(t)$ уравнения (3.15) отрицательны. Для того же чтобы квадратичная форма H была знакопостоянной отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы на данном интервале времени все корни $\rho_i(t)$ уравнения (3.15) были неположительны.

Из (3.16) следует, что квадратичная форма H определенно-отрицательна тогда и только тогда, когда все $\psi_{*i}(t) > \psi(t)$.

Для того же чтобы квадратичная форма H была знакопостоянной отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все $\psi_{*i}(t) \geqslant \psi(t)$.

Эти условия запишем в другой форме. Пусть $\psi_k(t)$ — наименьший (в каждый момент времени) корень $\psi_{*i}(t)$ уравнения (3.17):

$$\psi_k(t) = \min \psi_{*i}(t) \tag{3.18}$$

Тогда, для того чтобы квадратичная форма H была определенно-отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\psi(t) = \frac{d \ln \varphi}{dt} < \psi_k(t) \tag{3.19}$$

Квадратичная форма H является знакопостоянной отрицательной тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$\psi(t) \leqslant \psi_k(t) \tag{3.20}$$

Функцию $\psi_k(t)$, являющуюся в каждый момент времени наименьшим корнем уравнения (3.17), назовем критической функцией $\psi(t)$.

Критической функции $\psi_k(t)$ соответствует критическая функция $\varphi_k(t)$, равная

$$\varphi_k(t) = \exp \int_{t_0}^{t} \psi_k(t)\, dt \tag{3.21}$$

Функцию V вида (3.1), определяемую функцией $\varphi_k(t)$, назовем критической функцией Ляпунова. Эта функция имеет вид:

$$V_k = \varphi_k^2 \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n)^2 \tag{3.22}$$

Ей соответствует критическая область

$$\varphi_k^2 \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n)^2 \leqslant A \tag{3.23}$$

Из всего вышеизложенного следует, что для каждой системы уравнений возмущенного движения, заданной на интервале времени $[T_1, T_2]$, всегда существует критическая функция $\psi_k(t)$, определенная (3.18).

4. Теоремы об устойчивости на заданном интервале времени. Сформулируем условия устойчивости невозмущенного движения на данном интервале времени $[T_1, T_2]$ по отношению к области, имеющей ограниченный диаметр и заданной неравенством

$$\varphi^2 \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n)^2 \leqslant A \tag{4.1}$$

Здесь $\varphi(t)\, a_{ij}(t)$ — коэффициенты преобразования (2.2), приводящего систему уравнений возмущенного движения (2.1) к виду (2.11), а число A, определяемое равенством [1]

$$A = \varphi^2(t_0) \sum_{i=1}^{n} [a_{i1}(t_0)\, x_{10} + \ldots + a_{in}(t_0)\, x_{n0}]^2 \tag{4.2}$$

предполагается всегда достаточно малым

[1] Очевидно, что можно принимать $\varphi(t_0) = 1$.

Теорема 1. Для того чтобы невозмущенное движение было монотонно и равномерно устойчивым по отношению к области (4.1), заданной на интервале времени $[T_1, T_2]$, при любом выборе функции X_i в уравнениях (2.1), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале времени выполнялось неравенство

$$\psi(t) = \frac{d \ln \varphi}{dt} < \psi_k(t) \tag{4.3}$$

Докажем достаточность. Если неравенство (4.3) выполняется на интервале времени $[T_1, T_2]$, то квадратичная форма H на любом интервале $[t_0, T_2]$, где $T_1 \leqslant t_0 < T_2$, является определенно-отрицательной. Пусть начальные возмущения настолько малы, что производная $V' = 2(H + S)$ является на интервале времени $[t_0, T_2]$ определенно-отрицательной при любом выборе функции S. Тогда функция $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$, где $x_i(t)$ — решения уравнений (2.1), на интервале времени $[t_0, T_2]$ непрерывно убывает и интегральные кривые пересекают поверхности $V(t, x_1, \ldots, x_n) = c$ только снаружи внутрь.

Необходимость докажем от противного. Пусть невозмущенное движение монотонно и равномерно устойчиво на интервале $[T_1, T_2]$, какова бы ни была функция S, удовлетворяющая неравенству (3.10).

Предположим, что неравенство (4.3) при этом не выполняется, например при $t = t_1$ $(T_1 \leqslant t_1 \leqslant T_2)$. Тогда среди корней уравнения (3.15) имеется при $t = t_1$ по крайней мере один положительный или нулевой корень.

Пусть, например, $\rho_1(t_1) > 0$. Тогда квадратичная форма H при $t = t_1$ в области переменных $x_1, \ldots, x_n$, определяемой условием

$$\eta_2 = \ldots = \eta_n = 0 \tag{4.4}$$

имеет вид: $H = \rho_1 \eta_1^2$, т. е. принимает только положительные значения.

Так как квадратичная форма H является непрерывной функцией времени t и переменных $x_1, \ldots, x_n$, то в течение некоторого конечного отрезка времени $[t_1, t_1 + \tau']$ существует некоторая зависящая от времени область переменных $x_1, \ldots, x_n$, где H принимает только положительные значения. Эта область, которую будем обозначать через U, при $t = t_1$ включает в себя область (4.4) и ее окрестность. Если возмущения $x_i(t)$ достаточно малы, то на отрезке $[t_1, t_1 + \tau']$ в области U производная V' принимает только положительные значения независимо от выбора функции S. Составим уравнение

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) - V(t_1, x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)) = \int_{t_1}^{t_1+\tau} V'(t, x_1, \ldots, x_n)\, dt \tag{4.5}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют уравнениям возмущенного движения (2.1)

Пусть $x_i(t_1)$ принадлежат области (4.4) Тогда по крайней мере на отрезке $[t_1, t_1 + \tau'']$ возмущения $x_i(t)$ будут находиться в области U, где $V' > 0$.

Обозначим наименьшее из чисел τ', τ'', $T_2 - t_1$ через τ. Тогда при указанных условиях из уравнения (4.5) получим, что на отрезке $[t_1, t_1 + \tau]$

возмущения $x_i(t)$ удовлетворяют условию

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) > V(t_1, x_1(t), \ldots, x_n(t_1))$$

Следовательно, всякое возмущенное движение, начавшееся при $t = t_1$ в области (4.4), в течение некоторого конечного интервала времени $[t_1, t_1 + \tau]$ пересечет поверхности $V(t, x_1, \ldots, x_n) = c$ изнутри наружу. В этом случае невозмущенное движение на интервале $[t_1, T_2]$ неустойчиво по отношению к данной области (4.1) и не является монотонно устойчивым на любом интервале $[t_0, T_2]$, где $t_0 < t_1$.

Предположим теперь, что $\rho_1(t_1) = 0$. Тогда квадратичная форма H в области (4.4) при $t = t_1$ равняется нулю, а $V' = 2S$. Так как квадратичная форма H и функция S являются непрерывными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$ и времени t, то в течение некоторого конечного отрезка времени $[t_1, t_1 + \tau']$ существует некоторая зависящая от времени область переменных $x_1, \ldots, x_n$, в которой знак производной $V' = 2(H + S)$ определяется знаком функции S. Тогда при помощи рассуждений, аналогичных проведенным выше, можно доказать, что решение вопроса о поведении интегральных кривых на некотором отрезке времени $[t_1, t_1 + \tau]$ определяется знаком функции S при $t = t_1$ в области (4.4).

Полученные противоречия и доказывают необходимость условий, сформулированных в теореме.

Замечание, В приложениях можно пользоваться следующими условиями отрицательной определенности квадратичной формы, не требующими определения критической функции ψ_k или вычисления корней уравнения (3.15)

Для того чтобы квадратичная форма H была определенно-отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы у матрицы $\| h_{ik} \|$ последовательные главные миноры $\Delta_\nu(t)$ нечетного порядка были отрицательными и четного порядка — положительными:

$$\Delta_1(t) < 0, \quad \Delta_2(t) > 0, \quad \Delta_3(t) < 0, \ldots, \quad (-1)^n \Delta_n(t) > 0 \tag{4.6}$$

Рассмотрим теперь случай, когда в какой-либо момент времени t_1 на интервале $[T_1, T_2]$ неравенство (4.3) не выполняется. Тогда невозмущенное движение не является ни монотонно, ни равномерно устойчивым на этом интервале по отношению к заданной области (4.1). Однако при этом не исключена возможность, что на некотором интервале времени $[t_0, T_2]$, где $T_1 \leqslant t_0 < t_1 < T_2$, невозмущенное движение будет устойчивым по отношению к заданным условиям при любом выборе функции S.

Для этого случая достаточные условия устойчивости по уравнениям первого приближения даются следующей теоремой.

Теорема 2. Невозмущенное движение устойчиво по отношению к области (4.1), заданной на интервале времени $[t_0, T_2]$, при любом выборе функций X_i в уравнениях (2.1), если на этом интервале выполняется неравенство

$$\varphi(t) \leqslant \exp \int_{t_0}^{t} (\psi_k(t) - \quad) \, dt \tag{4.7}$$

где ε — любое доста[illegible]о малое положительное число [1].

[1] Для линейной системы уравнений невозмущенного движения $\varepsilon \geqslant 0$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что невозмущенное движение при любом выборе функции S, удовлетворяющей условию (3.10), монотонно и равномерно устойчиво на интервале времени $[t_0, T_2]$ по отношению к области

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n)^2 \exp \int_{t_0}^{t} 2(\psi_k(t) - \varepsilon)\, dt \leqslant A \qquad (4.8)$$

Если выполняется неравенство (4.7), то область (4.1) полностью содержит в себе область (4.8), и невозмущенное движение устойчиво по отношению к области (4.1).

Доказанные выше теоремы остаются справедливыми и для неограниченного интервала времени $[T_1, \infty)$. Для этого случая небесполезно сформулировать отдельные предложения в виде следствий из соответствующих теорем.

Следствие 1. Для того чтобы невозмущенное движение было устойчивым асимптотически и притом монотонно и равномерно по отношению к области (4.1), заданной при $t \geqslant T_1$, при любом выборе функций X_i в уравнениях (2.1), необходимо и достаточно, чтобы при всех $t \geqslant T_1$ выполнялось неравенство (4.3).

Следствие 2. Невозмущенное движение устойчиво по отношению к области (4.1), заданной при $t \geqslant t_0$, и притом асимптотически при любом выборе функций X_i в уравнениях (2.1), если при всех $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство (4.7).

Асимптотическая устойчивость здесь следует из основной теоремы Ляпунова. Действительно, при выполнении неравенства (4.3) и при достаточно малых начальных возмущениях производная dV/dt является определенно-отрицательной при любых функциях X_i. Сама же функция V допускает бесконечно малый высший предел, так как производные $\partial V / \partial x_i$ ограничены[4] в силу ограниченности функций $\varphi(t)$ и $a_{ij}(t)$.

Заметим, что следствия из теорем 1 и 2 дают более узкие условия, чем это требуется для асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова. По Ляпунову невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если с беспредельным возрастанием t все возмущения $x_i(t)$ стремятся к нулю. В приведенных же следствиях дополнительно требуется, чтобы все возмущения x_i при всех t, начиная с момента T_1 или t_0, удовлетворяли определенным условиям. Кроме того, предполагается, что характеристическое уравнение (2.10) не имеет кратных корней. Поэтому следствия 1 и 2 дают только достаточные условия для асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова.

Поступила 15 XII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, 1950.
2. Четаев Н. Г. Об одной мысли Пуанкаре. Сб. научн. тр. Казанск. авиац. института, № 3, 1935.
3. Каменков Г. В. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.