Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ВОПРОСУ ОБ ОБРАТИМОСТИ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

И. Г. Малкин

(Свердловск)

В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия существования функции Ляпунова, удовлетворяющей всем условиям его теоремы об асимптотической устойчивости.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (X_s(t, 0, \ldots, 0) = 0;\ s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

определенную в области

$$t \geqslant 0,\ x \leqslant H^2, \qquad x = \sum_{s=1}^{n} x_s^2 \tag{1.2}$$

где H — положительная постоянная. Согласно хорошо известной теореме Ляпунова невозмущенное движение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ будет асимптотически устойчиво, если существует определенно-положительная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, полная производная которой по времени, составленная в силу уравнений (1.1), есть функция определенно-отрицательная, и если при этом функция V допускает бесконечно малый высший предел. Возникает вопрос об обратимости этой теоремы, т. е. вопрос о существовании функции V, удовлетворяющей всем указанным условиям, всякий раз, когда невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Положительный ответ на этот вопрос содержится в работе [1] для случая автономных систем при $n = 2$. Случай автономных систем с произвольным n рассмотрен Е. А. Барбашиным [2], а случай автономных и периодических систем при произвольном n — И. Л. Массерой [3]. Эти авторы показали, что в указанных случаях теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости обратима. Иначе обстоит дело, если система (1.1) не автономна и не периодическая, т. е. если функции X_s содержат явно t и не являются относительно него периодическими. А именно, в общем случае теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости не обратима. Этот вопрос исследован [1] для случая, когда функции X_s линейны относительно $x_1, \ldots, x_n$ и по отношению к t непрерывны и ограничены, причем для такого рода систем установлены необходимые и достаточные условия существования функций V, удовлетворяющих всем условиям теоремы Ляпунова. При этом выяснилось, что одной асимптотической устойчивости для существования такого рода функций недостаточно.

В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия существования этих функций в общем случае неустановившихся движений. Мы будем при этом предполагать, что правые части уравнений (1.1) в области (1.2) непрерывны по всем аргументам и допускают непрерывные и ограниченные частные производные по $x_1, \ldots, x_n$.

§ 2. Необходимые и достаточные условия существования функции V. Рассмотрим решение $x_s = F_s(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0)$ уравнений (1.1) с начальными условиями $F_s(t_0, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0) = x_s^\circ$. Если невозмущенное движение асимптотически устойчиво, то найдется такое достаточно малое положительное число δ, что при всех начальных значениях, лежащих в области

$$x^\circ \leqslant \delta^2, \qquad t_0 \geqslant 0 \tag{2.1}$$

будут выполняться соотношения

$$\lim_{t\to\infty} F_s(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) = 0 \tag{2.2}$$

Мы сейчас покажем, что для того, чтобы для уравнений (1.1) существовала функция V, удовлетворяющая всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы соотношения (2.2) выполнялись равномерно относительно x_j° и t_0. Мы докажем, следовательно, что имеют место две следующие теоремы.

Теорема 1. Если существует такое положительное число δ, что соотношения (2.2) выполняются равномерно относительно $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0$, лежащих в области (2.1), то существует допускающая бесконечно малый высший предел определенно-положительная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, полная производная которой по времени, составленная в силу уравнений (1.1), есть функция определенно-отрицательная.

Доказательство. Заметим прежде всего, что при выполнении условий теоремы невозмущенное движение будет равномерно устойчивым. Другими словами, для всякого положительного числа ε можно найти не зависящее от t_0 положительное число $\eta(\varepsilon)$ — такое, что при всех $t \geqslant t_0$ будут выполняться условия $F < \varepsilon^2$, коль скоро $x^\circ \leqslant \eta^2$. Здесь введено обозначение

$$F(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) = \sum_{s=1}^{n} F_s^2(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0) \tag{2.3}$$

В самом деле, полагая $\eta < \delta$, мы на основании условий теоремы найдем такое число $T(\varepsilon)$, зависящее только от ε, что при всех $t \geqslant t_0 + T$ будет выполняться неравенство $F < \varepsilon^2$. Будем теперь считать η настолько малым, чтобы это неравенство выполнялось также в течение конечного промежутка времени $(t_0, t_0 + T)$. Это возможно в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий (решение F_s сравниваем с тривиальным решением $x_1 = \ldots = x_n = 0$). При этом, как это вытекает из доказательства указанной теоремы, число η определяется исключительно числом $T(\varepsilon)$ и верхними пределами функций $|X_s|$ и их постоянных Липшица по переменным x_j в области $t_0 \leqslant t < t_0 + T$,

$x \leqslant \varepsilon^2$. Полученное таким образом число η будет удовлетворять всем требуемым условиям. Из сказанного следует, что если число δ в неравенствах (2.1) достаточно мало, то функция F будет при всех $t > t_0$ во всяком случае оставаться в области $x \leqslant H^2$. Мы будем в дальнейшем предполагать, что число δ удовлетворяет указанному условию.

Покажем теперь, что для функции F при всех $\tau > 0$ выполняется неравенство

$$F(t_0 + \tau, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0) < \varphi(\tau) \tag{2.4}$$

где $\varphi(\tau)$ — некоторая положительная непрерывная функция, для которой $\lim \varphi(\tau) = 0$ при $\tau \to \infty$. С этой целью рассмотрим какую-нибудь убывающую и сходящуюся к нулю бесконечную последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ По условию теоремы для всякого числа ε_i этой последовательности найдется число $T_i(\varepsilon_i)$ такое, что при всех $\tau > T_i$ будет выполняться неравенство $F(t_0 + \tau, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) < \varepsilon_i$ и это число T_i не будет зависеть от x_s°, t_0. Последовательность T_i будет, очевидно, расходящейся, и мы можем при этом предполагать, что $T_{i+1} > T_i$. Рассмотрим теперь произвольную монотонно убывающую функцию $\varphi(\tau)$, для которой $\varphi(T_{i+1}) = \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Если мы при этом предположим, что в интервале $(0, T_2)$ справедливо неравенство $F < \varphi(\tau)$, что, очевидно, возможно, так как при всех значениях аргументов $F \leqslant H^2$, то построенная таким образом функция $\varphi(\tau)$ будет удовлетворять всем требуемым условиям.

Рассмотрим теперь частные производные $\partial F / \partial x_s^\circ$ и $\partial F / \partial t_0$. Так как по доказанному при всех $t \geqslant t_0$ и всех значениях x_s°, лежащих в области (2.1), функции F_s остаются в области (1.1), то эти частные производные при указанных значениях аргументов существуют и непрерывны. Покажем, что при $\tau > 0$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial F(t_0 + \tau, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0)}{\partial x_s^\circ} \right| < Ae^{\lambda\tau} = M(\tau)$$

$$\left| \left\{ \frac{\partial F(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0)}{\partial t_0} \right\}_{t = t_0 + \tau} \right| < Ae^{\lambda\tau} = M(\tau) \tag{2.5}$$

где A и λ — не зависящие от x_j°, t_0 положительные числа. С этой целью рассмотрим уравнения в вариациях для системы (1.1):

$$\frac{du_s}{dt} = p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n \qquad \left(p_{sj} = \frac{\partial X_s}{\partial x_j}\right) \tag{2.6}$$

При этом в производных p_{sj} величины x_s заменены функциями F_s. Пусть $u_{sj}(t, t_0)$ и $u_s^*(t, t_0)$ — решения этой системы, определяемые начальными условиями

$$u_{sj}(t_0, t_0) = \delta_{sj} \qquad (\delta_{sj} \text{ — символ Кронекера})$$

$$u_s^*(t_0, t_0) = -X_s(t_0, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \tag{2.7}$$

Тогда, как известно, имеем тождественно

$$u_{sj} = \frac{\partial F_s}{\partial x_j^\circ}, \qquad u_s^* = \frac{\partial F_s}{\partial t_0}$$

Полагая в уравнениях (2.6) $v_s = u_s e^{-\lambda t}$, будем иметь

$$\frac{dv_s}{dt} = p_{s1}v_1 + \ldots + p_{sn}v_n - \lambda v_s$$

Откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n} v_s^2 = \sum_{s,\,j=1}^{n} p_{sj}v_s v_j - \lambda \sum_{s=1}^{n} v_s^2$$

Правая часть этого выражения при достаточно большом положительном λ будет формой определенно-отрицательной, так как, по определению, в области (1.2) частные производные функций X_s ограничены. Полагая, что λ удовлетворяет указанному условию, получим при $t > t_0$

$$\sum_{s=1}^{n} v_s^2(t) < \sum_{s=1}^{n} v_s^2(t_0)$$

и, следовательно,

$$\sum_{s=1}^{n} u_s^2(t) < \sum_{s=1}^{n} u_s^2(t_0)\, e^{2\lambda(t-t_0)}$$

Применяя эти неравенства к решениям u_{sj} и u_s^* и учитывая, что на основании (2.7) для модулей начальных значений этих решений могут быть назначены некоторые не зависящие от x_s°, t_0 верхние пределы, находим, что частные производные $\partial F_s / \partial x^\circ$, $\partial F_s / \partial t_0$, а следовательно, также и частные производные $\partial F / \partial x_j^\circ$, $\partial F / \partial t_0$ удовлетворяют неравенствам вида (2.5).

Как показал И. Л. Массера, для всякой пары положительных функций $M(\eta)$ и $\varphi(\eta)$, определенных при всех $\eta \geqslant 0$, из которых первая возрастающая, а вторая стремится к нулю при $\eta \to \infty$, можно построить функцию $G(\eta)$, удовлетворяющую следующим условиям.

1. Функциям $G(\eta)$ — положительная возрастающая функция, определенная при всех $\eta \geqslant 0$ и обладающая непрерывной возрастающей (очевидно, положительной) производной $G'(\eta)$.

2. Значения $G(0) = 0$, $G'(0) = 0$.

3. Имеют место неравенства

$$\int_0^\infty G[\varphi(\tau)]\,d\tau < \infty, \qquad \int_0^\infty G'[\varphi(\tau)]\,M(\tau)\,d\tau < \infty \tag{2.8}$$

Полагая, что $\varphi(\eta)$ и $M(\eta)$ — функции, фигурирующие в неравенствах (2.4) и (2.5), положим

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = \int_t^\infty G[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)]\,d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_0^\infty G[F(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t)]\,d\tau \tag{2.9}$$

и покажем, что функция V удовлетворяет всем условиям теоремы.

Заметим прежде всего, что в области

$$t \geqslant 0, \qquad x \leqslant \delta^2 \tag{2.10}$$

на основании (2.4) справедливы при всех $\tau > 0$ неравенства

$$G[F(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] < G[\varphi(\tau)]$$

так как $G(\eta)$ — функция возрастающая. Отсюда на основании (2.8) вытекает, что интеграл, фигурирующий в выражении V, сходится и притом равномерно в области (2.10). Следовательно, в этой области функция V существует и непрерывна по всем своим аргументам. Дифференцируя далее выражение V формально под знаком интеграла, будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = \int_t^\infty G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_j} d\tau \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -G[F(t, x_1, \ldots, x_n, t)] + \int_t^\infty G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} d\tau$$

Но на основании (2.4) и (2.5) в области (2.10) при всех $\tau > t$ имеем

$$\left| G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_j} \right| < G'[\varphi(\tau - t)] M(\tau - t)$$

$$\left| G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} \right| < G'[\varphi(\tau - t)] M(\tau - t)$$

так как функция $G'(\eta)$ также возрастающая. Поэтому интегралы, входящие в (2.11), сходятся в области (2.10) абсолютно и равномерно. Следовательно, выражения (2.11) представляют в области (2.10) непрерывные и ограниченные функции, которые действительно являются частными производными функции V. Итак, функция V обладает в области (2.10) непрерывными и ограниченными частными производными первого порядка. Но это условие является более сильным, чем существование бесконечно малого высшего предела.

Покажем теперь, что функция V определенно-положительна. С этой целью положим

$$\alpha = \frac{1}{2L\sqrt{n}} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

где L — верхний предел величин $|X_s|$ в области (1.2). Из (2.9) имеем

$$V > \int_0^\alpha G[F(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] d\tau \tag{2.12}$$

Но

$$|F_s(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t) - x_s| =$$

$$= \left| \int_t^{t+\tau} X_s\Big(\eta, F_1(\eta, x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, F_n(\eta, x_1, \ldots, x_n, t)\Big) d\eta \right| < L\tau$$

и, следовательно, в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha$ справедлива оценка

$$\sum_{s=1}^n \{F_s(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t) - x_s\}^2 < nL^2\alpha^2 = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^n x_s^2$$

откуда

$$F(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t) \geqslant \frac{1}{4}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

и из (2.12) получаем

$$V > \frac{1}{2L\sqrt{n}} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\ G\left[\frac{1}{4}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\right]$$

Правая часть этого неравенства представляет собой не зависящую от t определенно-положительную функцию. Следовательно, V есть определенно-положительная функция.

Составим теперь выражние для полной производнний dV / dt в силу дифференциальных уравнений (1.1). Мы будем, очевидно, иметь

$$dV / dt = dV^* / \alpha t$$

где $V^*(t)$ означает результат замены в выражении V величин x_s функциями $F_s(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0)$. Имеем

$$V^*(t) = \int\limits_t^\infty G\{F[\tau, F_1(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0), \ldots, F_n(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0)]\} d\tau \equiv$$

$$\equiv \int\limits_t^\infty G\{F(\tau, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0)\} d\tau$$

откуда

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV^*}{dt} = -G\{F(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0)\} = -G\{x_1^2 + \ldots + x_n^2\}$$

Следовательно, dV/dt есть функция определенно-отрицательная. Таким образом, V удовлетворяет всем нужным условиям, что и доказывает теорему.

Теорема 2. Если для системы уравнений (1.1) существует допускающая бесконечно малый высший передел определенно-положительная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, то существует такое достаточно малое число $\delta > 0$, что решения $x_s = F_s(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0)$ удовлетворяют соотношениям (2.2) равномерно относительно величин x_s°, t_0, лежащих в области (2.1)[1].

Доказательство. Согласно условию теоремы существует допускающая бесконечно малый высший предел функция V такая, что в области $t \geqslant 0$, $x \leqslant H^2$ выполняются неравенства

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W_1(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{2.13}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s \leqslant -W_2(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{2.14}$$

где W_1 и W_2 — не зависящие от t определенно-положительные функции.

Пусть $C > 0$ — точный нижний предел функции W_1 при условии $x = H^2$. Так что на основании (2.13) имеем

$$V(t, x_1, \ldots, x^n) \geqslant C \quad \text{при } x = H^2,\ t > 0 \tag{2.15}$$

[1] К. П. Персидский доказал, что при выполнении условий теоремы решения стремятся к нулю равномерно относительно t_0, а И. Л. Массера — что при тех же условиях решения стремятся к нулю равномерно относительно x_s°.

Так как V допускает бесконечно малый высший передел, то найдется такое положительное число δ, что будет справедливо неравенство

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) < C \quad \text{при } x < \delta^2, \qquad t > 0 \tag{2.16}$$

Покажем, что δ и является искомым числом, фигурирующим в теореме. С этой целью рассмотрим произвольное положительное число $\varepsilon < \delta$ и обозначим через $c > 0$ точный нижний предел функции W_1 при условии $H^2 \geqslant x \geqslant \varepsilon^2$. На основании (2.13) будем иметь

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant c \quad \text{при } H^2 \geqslant x \geqslant \varepsilon^2, \qquad t \geqslant 0 \tag{2.17}$$

Далее выберем настолько малое положительное число $\alpha < \varepsilon$, чтобы выполнялось условие

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) < c \quad \text{при } x < \alpha^2, \qquad t > 0 \tag{2.18}$$

и обозначим через $l > 0$ точный нижний предел функции W_2 при условии $H^2 \geqslant x \geqslant \alpha^2$. Таким образом, на основании (2.14)

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -l \quad \text{при } H^2 \geqslant x \geqslant \alpha^2, \qquad t > 0 \tag{2.19}$$

Рассмотрим теперь произвольное решение $x_s = F_s(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0)$ уравнения (1.1), начальные значения которого x_s° и t_0 лежат в области, определенной неравенствами (2.1).

Покажем прежде всего, что при всех $t > t_0$ справедливо неравенство

$$F < H^2$$

В самом деле, функция $V^*(t) = V(t, F_1, \ldots, F_n)$ на основании (2.14) монотонно убывающая и при $t = t_0$ на основании (2.1) и (2.16) $V^*(t) < C$. Следовательно, то же самое неравенство справедливо и при всех $t > t_0$. Но тогда при всех $t > t_0$ будет справедливо неравенство $F < H$, ибо если бы в какой-нибудь момент времени это неравенство нарушилось, то для этого момента на основании (2.15) мы имели бы $V^*(t) > C$.

Обозначим теперь через $T(\varepsilon)$ зависящее только от ε положительное число, определяемое равенством

$$T(\varepsilon) = \frac{C - c}{l}$$

и покажем, что в интервале $(t_0, t_0 + T)$ найдется такой момент времени $t = t_1$, для которого

$$V^*(t_1) < c$$

В самом деле, рассмотрим следующее тождество:

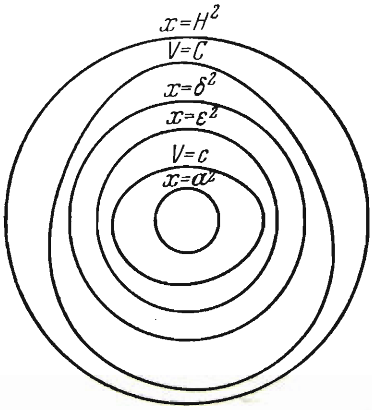
$$V^*(t_0 + T) = V(t_0, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) + \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dV^*}{dt}\, dt \tag{2.20}$$

Если бы во всем интервале $(t_0, t_0 + T)$ было справедливо неравенство $V^*(t) > c$ и, следовательно, на основании (2.18) также и неравенство $F \geqslant \alpha^2$, то из (2.20) на основании (2.16) и (2.19) мы получили бы

$$V^*(t_0 + T) < C - lT = c$$

что противоречит условию. Таким образом, в интервале $(t_0, t_0 + T)$ найдется такой момент времени, для которого $V^*(t) < c$. Так как $V^*(t)$ — функция убывающая, то это неравенство будет справедливо при всех значениях
$$t \geqslant t_0 + T.$$

Но тогда при всех $t \geqslant t_0 + T$ будет на основании (2.17) выполняться неравенство $x < \varepsilon^2$, что и доказывает теорему, так как число ε можно взять сколь угодно малым.



Фиг. 1

Приведенное доказательство может быть проиллюстрировано геометрически, что мы и делаем на чертеже (фиг. 1).

Для анализа чертежа необходимо учесть, что уравнение $W_1\ (x_1, \ldots, x_n) = k^2$ при k, достаточно малом, представляет собой замкнутую поверхность, окружающую начало координат. Точно так же и уравнение $V(t, x_1, \ldots, x_n) = k^2$ представляет собой в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ замкнутую поверхность, окружающую начало координат, но изменяющуюся с течением времени. При этом при всех $t > 0$ поверхность $V = k^2$ в силу (2.13) лежит внутри поверхности $W_1 = k^2$ и остается вне некоторой окрестности начала координат, так как V допускает бесконечно малый высший предел.

Поверхность $W_1 = C$ лежит внутри сферы $x = H^2$ и имеет с нею по крайней мере одну общую точку (на фигуре эта поверхность не показана). То же самое можно сказать и относительно поверхности $W_1 = c$ и сферы $x = \varepsilon^2$.

Примечание. Для справедливости теоремы 2 нет, очевидно, необходимости, чтобы функции X_s допускали частные производные. Достаточно, чтобы эти функции были непрерывными и такими, чтобы была обеспечена единственность решений для уравнений (1.1). Впрочем, последнее условие также не существенно, но мы считаем, что рассмотрение задач устойчивости, в которых для уравнений возмущенного движения нарушены условия единственности, не представляют ни теоретического, ни практического интереса.

При доказательстве теоремы 1 мы видели, что при выполнении условий этой теоремы функция V будет не только допускать бесконечно малый высший предел, но и будет обладать ограниченными частными производными $\partial V / \partial x_j$. Поэтому, принимая во внимание теорему 2, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. Если для уравнений (1.1) существует определенно-положительная функция V, допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, то для этих уравнений существует функция V^{**}, обладающая такими же свойствами и для которой частные производные $\partial V^{**} / \partial x_s$ в некоторой окрестности начала координат и при всех $t > 0$ ограничены.

§ 3. Приложение к задаче об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1 \ldots, x_n) + R_s(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{3.1}$$

где функции R_s непрерывны и такие, что для уравнений (3.1) обеспечены условия единственности решений.

При этом функции R_s в отличие от функций X_s не обращаются, вообще говоря, в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Мы будем говорить [4], что тривиальное решение

$$x_1 = \ldots = x_n = 0$$

уравнений (1.1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если для всякого положительного числа ε существуют два других положительных числа $\eta_1(\varepsilon)$ и $\eta_2(\varepsilon)$ таких, что всякое решение уравнений (3.1) с начальными значениями x_s° (при $t = t_0$), удовлетворяющими неравенствам $|x_s^\circ| \leqslant \eta_1$, при произвольных R_s, удовлетворяющих в области $t \geqslant 0$, $|x_s| \leqslant \varepsilon$ неравенствам $|R_s| \leqslant \eta_2$, удовлетворяют при всех $t > t_0$ неравенствам $|x_s| < \varepsilon$.

В работе [5] мы доказали, что если для уравнений (1.1) существует определенно-положительная функция V, производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, и если частные производные $\partial V / \partial x_s$ этой функции в области (1.2) ограничены, то тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Отсюда, на основании теорем 1 и 3 мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4. Если тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова и если при этом соотношения (2.2) выполняются равномерно относительно x_s° и t_0, лежащих в области (2.1), то это решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

С. И. Горшин в работе [5] высказал[1] следующую теорему: «Если тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (1.1) асимптотически и равномерно устойчиво в смысле Ляпунова и если при этом соотношения (2.2) выполняются равномерно относительно t_0, то это решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях».

Таким образом, формулировка С. И. Горшина отличается от нашей тем, что требование выполнимости соотношений (2.2) равномерно также и относительно x_s° заменяется требованием равномерной устойчивости (что

[1] Эта работа С. И. Горшина не была нам известна при написании монографии[7]. Повидимому, С. И. Горшину не была известна наша работа [5], вышедшая на пять лет раньше его работы, так как он полностью повторяет без ссылки на нас приведенную выше нашу теорему из [5] в такой же точно формулировке, как у нас, сопровождая ее таким же точно, как у нас, доказательством.

при наших условиях выполняется автоматически, как это было показано при доказательстве теоремы 1).

Однако анализ доказательства С. И. Горшина показывает, что им фактически использована также равномерность соотношений (2.2) и относительно величин x_s°.

Таким образом, С. И. Горшиным фактически доказана теорема в нашей формулировке. Вопрос о том, будет ли справедлива также и теорема, высказанная С. И. Горшиным, остается открытым.

Поступила 7 XII 1953

Уральский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые вопросы общей теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. Сборник трудов КАИ, № 7, 1937.
2. Барбашин Е. А. О существовании гладких решений некоторых линейных уравнений с частными производными. ДАН СССР, т. LXXII, № 3, 1950.
3. Massera I. L. On Liapounoff's condition of stability. Annals of Mathematics, vol. 50, № 3, 1949.
4. Дубошин Г. Н. К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений. Труды ГАИШ, т. XIV, вып. 1, 1940.
5. Малкин И. Г. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ПММ, т. VIII, вып. 3, 1944.
6. Горшин С. И. Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями. Известия АН Казахской ССР, № 56, 1948.
7. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.