Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В ЦЕЛОМ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Н. Н. Красовский
(Свердловск)

**§ 1.** Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывные функции, обращающиеся в точке $x_1 = \ldots = x_n = 0$ в нуль. Пусть решение $x_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ уравнений (1.1) устойчиво в целом. Очевидно, практический смысл имеет лишь такая устойчивость в целом, которая не нарушается при произвольных, достаточно малых изменениях правых частей системы (1.1). Наряду с системой (1.1) рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) + R_i(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{1.2}$$

где $R_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ — также непрерывные функции, не обращающиеся, вообще говоря, в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Решение $x_1 \equiv 0, \ldots, x_n \equiv 0$ системы (1.1) назовем устойчивым в целом при постоянно действующих возмущениях, если оно устойчиво (в малом) при постоянно действующих возмущениях [1] и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta(\varepsilon) > 0$, что всякое решение системы (1.2) обладает свойством

$$\overline{\lim}\, |x_i(t)| < \varepsilon \qquad \text{при } t \to \infty \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

при произвольных $R_i$, удовлетворяющих вне области $|x_i| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ при всех $t \geqslant t_0$ неравенствам

$$|R_i(x_1, \ldots, x_n, t)| < \eta(\varepsilon) f(r) \qquad \left(r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right) \tag{1.4}$$

Здесь $f(r)$ — наперед заданная функция, характеризующая порядок возможного возрастания возмущающих сил при удалении точки фазового пространства уравнений (1.2) от начала координат.

Цель настоящей заметки — указать достаточные условия устойчивости в целом при постоянно действующих возмущениях для некоторых нелинейных систем двух уравнений, рассмотренных в ряде статей [2–5]. При этом принимаем $f(r) = r$.

Известно, что для устойчивости тривиального решения $x_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ уравнений (1.1) при постоянно действующих возмущениях достаточно, чтобы это решение было асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова [1].

Очевидно, для устойчивости в целом при постоянно действующих возмущениях недостаточно асимптотической устойчивости решения $x_1 \equiv \ldots \equiv x_n \equiv 0$ системы (1.1) при любых начальных возмущениях, в чем проще всего убедиться на следующем примере

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{1+x^2} \tag{1.5}$$

Действительно, добавка в правой части (1.5) произвольно малой положительной постоянной $\eta$ нарушает свойство устойчивости решения $x = 0$ в целом.

Поэтому для того, чтобы обеспечить устойчивость при постоянно действующих возмущениях в целом, приходится на правые части рассматриваемых систем налагать некоторые дополнительные ограничения.

§ 2. Рассмотрим систему уравнений [4]

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = f(\sigma) \tag{2.1}$$
$$\sigma = c_1 x - d_1 y$$

где $c_1$, $d_1$ — постоянные, $c_1 \neq 0$, функции $F(x, y)$, $f(\sigma)$ непрерывны и в точке $x = 0$, $y = 0$ обращаются в нуль. Кроме того, предполагается [2], что выполнены условия единственности решения $x = y = 0$.

Укажем сначала одно достаточное условие устойчивости в целом.

Обозначим

$$\varphi(\sigma, y) = c_1 F\left(\frac{\sigma + d_1 y}{c_1}, y\right) - d_1 f(\sigma) \tag{2.2}$$

*Теорема 2.1.* Если выполнены условия

$$y\varphi(0, y) < 0, \qquad \sigma f(\sigma) > 0 \qquad (\sigma \neq 0, \quad y \neq 0) \tag{2.3}$$

$$\sigma[\varphi(\sigma, y) - \varphi(0, y)] < 0 \qquad (\sigma \neq 0) \tag{2.4}$$

$$\left|\int_0^{+\infty} f(\sigma)\, d\sigma\right| = \infty, \qquad \left|\int_0^{+\infty} \varphi(0, y)\, dy\right| = \infty \tag{2.5}$$

то решение $x = y = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво при любых начальных отклонениях.

*Доказательство.* Функция

$$v(\sigma, y) = \int_0^{\sigma} f(\sigma)\, d\sigma - \int_0^{y} \varphi(0, y)\, dy$$

при условиях теоремы есть определенно положительная функция, неограниченно возрастающая при удалении точки фазовой плоскости $xy$ в бесконечность. Производная $dv/dt$ в силу уравнений (2.1) имеет вид:

$$\frac{dv}{dt} = f(\sigma)[\varphi(\sigma, y) - \varphi(0, y)]$$

При условиях теоремы $dv/dt$ есть знакоотрицательная функция, обращающаяся в нуль лишь на прямой $\sigma = 0$.

Вследствие (2.3) на прямой $\sigma=0$ имеем

$$\frac{d\sigma}{dt}=\varphi(0, y)\neq 0 \qquad \text{при } y\neq 0$$

Следовательно, прямая $\sigma=0$ не содержит на себе целиком положительных полутраекторий системы (2.1), кроме $x=0$, $y=0$.

Таким образом, для системы уравнений (2.1) выполняются все условия теоремы 4 работы [6]. (Тот факт, что при доказательстве теоремы 4 предполагалось выполнение свойства единственности решений при всех начальных данных, не имеет существенного значения, так как теорема 4 остается верной и в рассматриваемом случае [1].) Теорема доказана.

*Следствие*. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{2.6}$$

Применяя теорему (2.1) к системе уравнений

$$\frac{dx}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=F(x, y)$$

эквивалентной уравнению (2.6), получим такие достаточные условия устойчивости решения $x=0$ уравнения (2.6) в целом

$$F(x, 0)\,x<0 \qquad \text{при } x\neq 0 \tag{2.7}$$

$$y\,[F(x, y)-F(x, 0)]<0 \qquad \text{при } y\neq 0 \tag{2.8}$$

$$-\int_0^{+\infty} F(x, 0)\,dx=\infty \tag{2.9}$$

Если $F(x, y)$ и $f(\sigma)$ являются линейными функциями, то условия (2.3) и (2.4) совпадают с условиями Рауза — Гурвица, а (2.5) есть тогда следствие этих условий.

Можно показать на примере, что в общем случае решение $x=y=0$ системы (2.1) при нарушении одного из условий (2.5) может оказаться неустойчивым в целом.

**§ 3.** Рассмотрим вопрос об устойчивости решения $x=0$, $y=0$ системы (2.1) при постоянно действующих возмущениях. В этом параграфе предполагается, что функции $F(x, y)$ и $f(\sigma)$ имеют ограниченные непрерывные частные производные первого порядка во всей плоскости $xy$.

---

[1] См., например, работу Е. А. Барбашина *Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка* [7]. Пользуясь случаем, заметим, что в нашей работе *Об устойчивости при любых начальных возмущениях решений одной нелинейной системы трех уравнений* [8] при доказательстве теоремы 2 ошибочно сказано, что «наличие определенно положительной функции $v(x_1, y_1, z_1)$, имеющей определенно отрицательную производную по времени, очевидно, обеспечивает асимптотическую устойчивость решения $x_1=y_1=z_1=0$» (стр. 349).

В действительности функция $dv/dt$ знакоотрицательна. Тот факт, что наличия знакоотрицательной производной $dv/dt$ при условиях теоремы также достаточно для того, чтобы решение было асимптотически устойчиво в целом, установлен в статье Е. А. Барбашина [7], на которую и следовало сослаться в данном случае.

*Теорема 3.1.* Рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} \partial F / \partial x - \lambda & \partial F / \partial y \\ \partial f / \partial x & \partial f / \partial y - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.1}$$

Если корни $\lambda_k \ (k = 1, 2)$ уравнения (3.1) при всех значениях $x, y$ имеют отрицательные действительные части $\alpha_k$, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha_k < -\delta \tag{3.2}$$

где $\delta$ — достаточно малое положительное число, то решение $x = y = 0$ системы (2.1) устойчиво в целом при постоянно действующих возмущениях. (Очевидно, в линейном случае условия теоремы есть условия Рауза — Гурвица.)

*Доказательство.* Система уравнений (2.1) эквивалентна уравнениям

$$\frac{d\sigma}{dt} = \varphi(\sigma, y), \qquad \frac{dy}{dt} = f(\sigma) \tag{3.3}$$

где функция $\varphi(\sigma, y)$ определена формулой (2.2).

Вследствие (3.2) должны выполняться условия

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial \sigma} > \varepsilon_1 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} < -\varepsilon_1 \tag{3.5}$$

где $\varepsilon_1$ — достаточно малое положительное число.

Из (3.4) следует, что функция $\partial\varphi / \partial y$ сохраняет знак на всей плоскости $xy$. Пусть для определенности $\partial\varphi / \partial y < 0$, тогда должно быть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} < -\varepsilon_2 \qquad (\varepsilon_2 > 0) \tag{3.6}$$

так как иначе вследствие ограниченности функции $\partial f / \partial \sigma$ нарушалось бы условие (3.4). Точно так же из (3.4) следует

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} > \varepsilon_2 \tag{3.7}$$

Преобразуем теперь переменные $\sigma$, $y$ в системе уравнений (3.3) при помощи соотношений

$$\sigma = \sigma, \qquad z = y + \delta_1 \sigma$$

где $\delta_1$ — положительная постоянная, значение которой будет указано ниже. Обозначая

$$\varphi(\sigma, z - \delta_1\sigma) = \Phi(\sigma, z), \qquad f_1(\sigma) = f(\sigma) + \delta_1 \Phi(\sigma, 0) \tag{3.8}$$

после простых преобразований получим

$$\frac{d\sigma}{dt} = \Phi(\sigma, z), \qquad \frac{dz}{dt} = f_1(\sigma) + \delta_1 [\Phi(\sigma, z) - \Phi(\sigma, 0)] \tag{3.9}$$

Вычислим производные $\partial\Phi / \partial z$, $\partial\Phi / \partial\sigma$, $\partial f_1 / \partial\sigma$. Имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - \delta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \delta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \tag{3.10}$$

Очевидно, выбирая значение $\delta_1$ достаточно малым по модулю вследствие (3.5) и (3.7), можно добиться выполнения неравенств

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} < -\frac{\varepsilon_1}{2}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial\sigma} > \frac{\varepsilon_2}{2} \tag{3.11}$$

на всей плоскости $xy$. Из (3.6), (3.10) и (3.11) получим оценки

$$[\Phi(\sigma, z) - \Phi(\sigma, 0)]\, z \leqslant -\varepsilon_2 z^2, \qquad \Phi(0, z)\, z \leqslant -\varepsilon_2 z^2 \tag{3.12}$$

$$f_1(\sigma)\,\sigma \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_2\sigma^2 \tag{3.13}$$

$$[\Phi(\sigma, z) - \Phi(0, z)]\,\sigma \leqslant -\frac{1}{2}\varepsilon_1\sigma^2 \tag{3.14}$$

Рассмотрим функцию

$$v(\sigma, z) = \int_0^\sigma f_1(\sigma)\, d\sigma - \int_0^z \Phi(0, z)\, dz$$

Вследствие (3.12) и (3.13) $v(\sigma, z)$ есть определенно положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$v(\sigma, z) \geqslant k^2(z^2 + \sigma^2) \qquad (k = \mathrm{const}) \tag{3.15}$$

Условия (2.3) — (2.5) есть следствие условий теоремы 3.1. Поэтому в рассматриваемом случае решение $x = y = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова, а следовательно, как указывалось выше, оно устойчиво (в малом) и при постоянно действующих возмущениях, т. е. существует число $\eta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что решения, начинающиеся в области $(x^2 + y^2) \leqslant \eta_1^2(\varepsilon)$, удовлетворяют неравенствам $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$. Поэтому для доказательства теоремы 3.1 достаточно показать, что существует число $\eta(\varepsilon)$ такое, что при выполнении неравенств

$$|R_i(x, y, t)| < \eta(\varepsilon) r \qquad \text{при } r^2 = x^2 + y^2 > \eta_1^2(\varepsilon) \tag{3.16}$$

всякая траектория системы (3.17) попадает внутрь области $x^2 + y^2 \leqslant \eta_1^2(\varepsilon)$ при возрастании времени.

Вычислим производную $dv/dt$ вдоль траектории системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) + R_1(x, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = f(\sigma) + R_2(x, y, t) \tag{3.17}$$

Имеем

$$\frac{dv}{dt} = f_1(\sigma)\,[\Phi(\sigma, z) - \Phi(0, z)] - \delta_1\Phi(0, z)\,[\Phi(\sigma, z) - \Phi(\sigma, 0)] + {} \\ + R_1^*(\sigma, z, t)\, f_1(\sigma) + R_2^*(\sigma, z, t)\,\Phi(0, z) \tag{3.18}$$

где $R_1^*$, $R_2^*$ — линейные комбинации функций $R_1$, $R_2$.

Вследствие ограниченности частных производных $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial f/\partial\sigma$ функции $f_1(\sigma)$ и $\Phi(0, z)$ удовлетворяют неравенствам

$$|f_1(\sigma)| < M|\sigma|, \qquad |\Phi(0, z)| < M|z|$$

где $M$ — постоянная.

Принимая во внимание (3.12), (3.13), (3.14) и (3.16), получим оценку:

$$\frac{dv}{dt} < -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \sigma^2 - \delta_1 \varepsilon_2{}^2 z^2 + N\eta(\varepsilon)(\sigma^2 + z^2) \tag{3.19}$$

где $N$ — достаточно большое положительное число.

Из оценки (3.19) непосредственно следует, что можно выбрать число $\eta(\varepsilon)$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{dv}{dt} < -m^2(\sigma^2 + z^2) \qquad (m = \text{const}) \tag{3.20}$$

что и доказывает теорему.

**§ 4.** Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x) + by \tag{4.1}$$

где $a$, $b$ — постоянные, $a \neq 0$, функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ непрерывны, обращаются в начале координат в нуль и удовлетворяют неравенствам

$$|f_i(z)| < M|z| \qquad (i = 1, 2) \tag{4.2}$$

где $M$ — достаточно большое число. Условие (4.2) обеспечивает, в частности, единственность [2] решения $x = y = 0$.

Для асимптотической устойчивости решения $x = y = 0$ системы в малом достаточно, чтобы корни уравнения

$$\begin{vmatrix} x^{-1} f_1(x) - \lambda & a \\ x^{-1} f_2(x) & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.3}$$

при всех $x \neq 0$ имели отрицательные действительные части [5]. Но в таком случае при условиях (4.2) решение $x = y = 0$ системы (4.1) будет также устойчивым [1] при постоянно действующих возмущениях (в малом).

Указанных выше условий недостаточно для устойчивости решения $x = y = 0$ системы (4.1) при любых начальных отклонениях; тем более их, очевидно, недостаточно для устойчивости этого решения в целом при постоянно действующих возмущениях [5].

Укажем одно условие устойчивости в целом решения системы (4.1) при постоянно действующих возмущениях.

*Теорема 4.1.* Пусть выполняются условия (4.2). Решение $x = y = 0$ системы (4.1) устойчиво в целом при постоянно действующих возмущениях, если корни $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k i$ $(k = 1, 2)$ уравнения (4.3) удовлетворяют условию

$$\alpha_k < -\delta \tag{4.4}$$

где $\delta$ — некоторое положительное число.

*Доказательство.* Обозначим

$$h_1(x) = x^{-1} f_1(x) + \tfrac{1}{2}\delta, \qquad h_2(x) = x^{-1} f_2(x) \quad \text{при} \quad x \neq 0, \; b_1 = b + \tfrac{1}{2}\delta \tag{4.5}$$

По условиям теоремы корни уравнения

$$\begin{vmatrix} h_1(x) - \lambda & a \\ h_2(x) & b_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.6}$$

имеют отрицательные действительные части $\alpha_k^*(x)$, удовлетворяющие условиям

$$a_k^*(x) < -\tfrac{1}{2}\delta \qquad (k = 1, 2) \tag{4.7}$$

Но в таком случае, очевидно, функции

$$H_1(x) = h_1(x) + b_1, \qquad H_2(x) = h_1(x)\, b_1 - h_2(x)\, a \tag{4.8}$$

должны удовлетворять неравенствам

$$H_1(x) < -\delta_1, \qquad H_2(x) > \delta_1 \tag{4.9}$$

где $\delta_1$ — достаточно малое положительное число. Рассмотрим функцию

$$u(x, y) = \tfrac{1}{2}(ay - b_1 x)^2 + \int_0^x H_2(x)\, x dx$$

Определенно положительная функция $u(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$u(x, y) \geqslant \tfrac{1}{2}(ay - b_1 x)^2 + \tfrac{1}{2}\delta_1 x^2 \tag{4.10}$$

Вычислим производную $du/dt$ в силу уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay + R_1(x, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x) + by + R_2(x, y, t) \tag{4.11}$$

Имеем

$$\frac{du}{dt} = H_1 H_2 x^2 - \frac{\delta}{2}(ay - b_1 x)^2 - H_2 \frac{\delta}{2} x^2 + R_1 (H_2 x - b_1 (ay - b_1 x)) + \\ + R_2 a (ay - b_1 x)$$

Учитывая (4.9), (3.16) и (4.2), имеем оценку:

$$\frac{du}{dt} < -k^2 (x^2 + y^2) + \eta(\varepsilon) N (x^2 + y^2) \qquad \text{при } x^2 + y^2 > \eta_1^2 \tag{4.12}$$

где $k$ и $N$ — постоянные. Дальнейшее доказательство теоремы 4.1 аналогично доказательству теоремы 3.1.

*Следствие.* Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \tag{4.13}$$

Преобразованием

$$x = x, \qquad y = \frac{dx}{dt} + \int_0^x f(x)\, dx$$

уравнение (4.13) приводится к системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -F(x) + y, \qquad \frac{dy}{dt} = -g(x) \qquad \left(F(x) = \int_0^x f(x)\, dx\right)$$

Применяя к этой системе теорему 4.1, видим, что для устойчивости решения $x = 0$ уравнения (4.13) в целом при постоянно действующих возмущениях достаточно, чтобы корни уравнения

$$\lambda^2 + \frac{F(x)}{x}\lambda + \frac{g(x)}{x} = 0$$

при всех $x \neq 0$ имели отрицательные действительные части, удовлетворяющие неравенству (4.4), и

$$|g(x)| < M|x|$$

где $M$ — постоянная.

Аналогично теореме 4.1 доказывается следующая теорема.

*Теорема 4.2.* Решение $x = y = 0$ системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx + f_2(y)$$

устойчиво в целом при постоянно действующих возмущениях, если выполняются условия (4.2) и корни уравнения

$$\begin{vmatrix} x^{-1} f_1(x) - \lambda & a \\ b & y^{-1} f_2(y) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

удовлетворяют условиям (4.4).

В заключение заметим следующее. Из доказательства теоремы 2.1 видно, что для того, чтобы решение $x = y = 0$ системы (2.1) было асимптотически устойчивым по Ляпунову, достаточно выполнения условий (2.3) и (2.4). Пусть в некоторой окрестности точки $x = y = 0$ функции $F(x, y)$ и $f(\sigma)$ имеют непрерывные производные первого порядка по $x$ и $y$.

Нетрудно проверить, что для выполнения условий (2.3) и (2.4) достаточно, чтобы в этой окрестности за исключением, может быть, лишь самой точки $x = y = 0$ уравнение (3.1) имело корни с отрицательными вещественными частями. При этом безразлично, имеет ли система первого приближения для (2.1) в начале координат корни с нулевой вещественной частью или нет.

Поступила 8 IV 1953

Уральский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
2. Еругин Н. П. Об одной задаче устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
3. Малкин И. Г. Об одной задаче устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.
4. Ершов Б. А. Об устойчивости в целом некоторой системы автоматического регулирования, ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
5. Красовский Н. Н. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
6. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. LXXXVI, № 3, 1952.
7. Барбашин Е. А. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
8. Красовский Н. Н. Об устойчивости при любых начальных возмущениях решений одной нелинейной системы трех уравнений. ПММ, т. XVII, вып. 3, 1953.